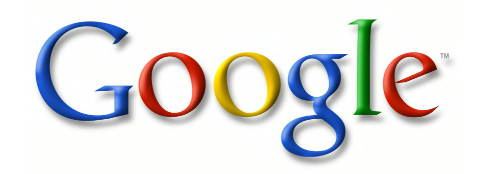


This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

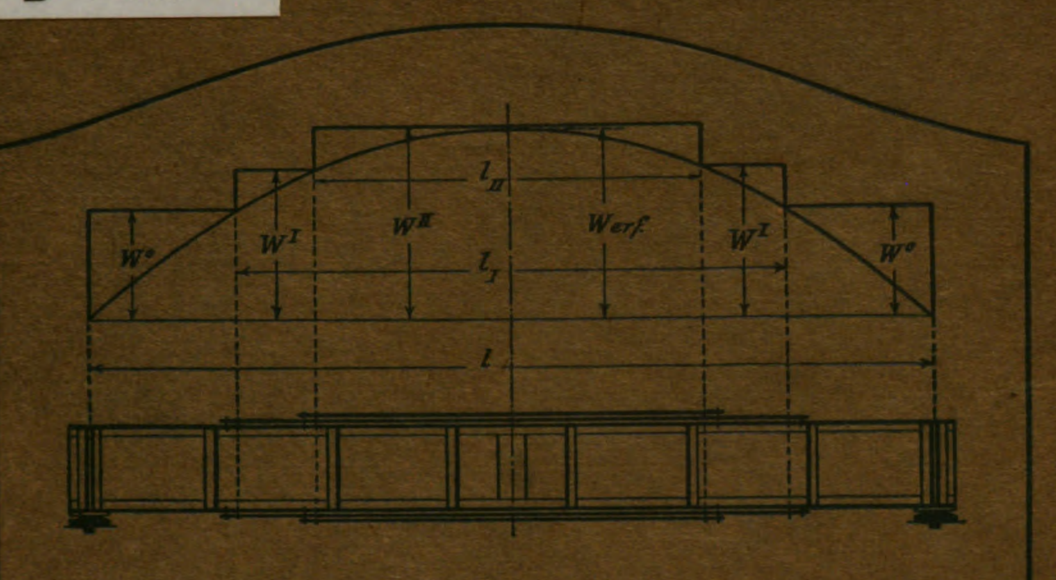
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at http://books.google.com/

B 472277



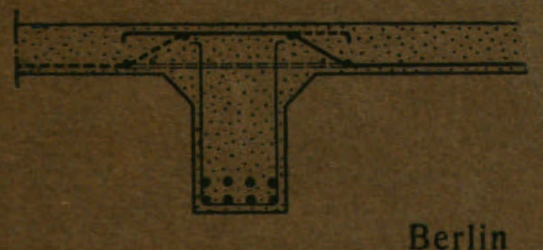
Statik und Festigkeitslehre

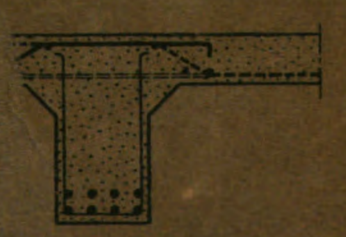
von

Max Fischer

4. Auflage

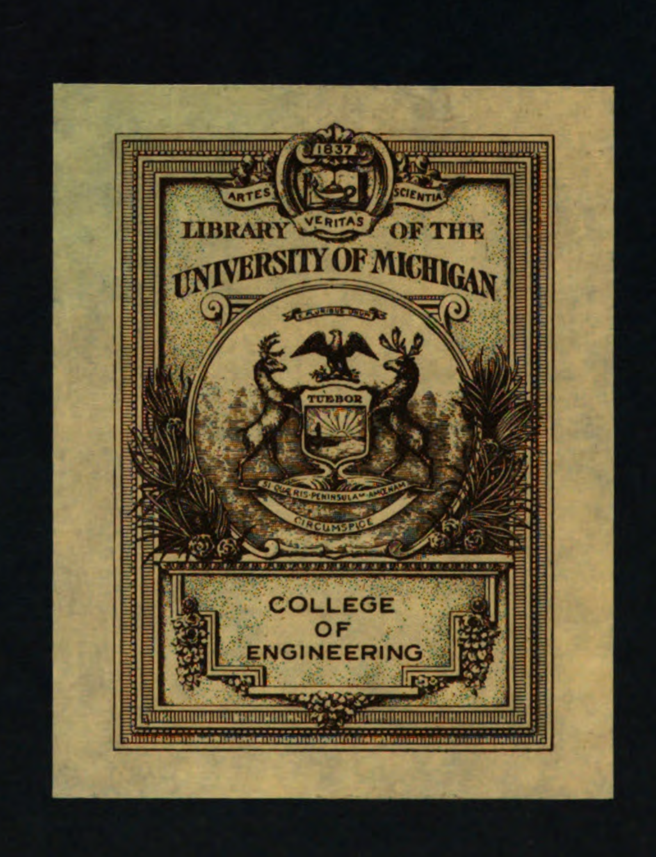
I. Band





Berlin
Verlag von Hermann M... ser

Digitized by Google





Digitized by Google





Digitized by Google

Engineering Library
TA
350
.F53
1919

Allgemeine Erläuterung zu dem Unterrichtswerke

Statik
und
Festigkeitslehre

Vollständiger Lehrgang zum Selbststudium für Ingenieure, Techniker und Studierende

von

Max Fischer.

Vierte Auflage.

Mit zahlreichen Beispielen und Zeichnungen.

Verlag von Hermann Meusser, Berlin.

Das Unterrichtswerk „Statik und Festigkeitslehre" von Max Fischer verfolgt den Zweck, dem Lernenden ein vollständiges, systematisches Selbststudium der gesamten Statik und Festigkeitslehre zu ermöglichen. Die vorliegende Auflage ist eingeteilt in:

Band I:

Grundlagen der Statik und Berechnung von statisch bestimmten vollwandigen Systemen (einschließlich Eisenbeton).

Band II:

Berechnung von statisch bestimmten Fachwerksystemen und Nachträge.

Band III:

Die Lehre von den Formänderungen und Berechnung von statisch unbestimmten Systemen.

Band IV:

Übungsband: Zusammenstellung von ausgeführten Berechnungen aus der Praxis.

Bisher sind erschienen: Band I und II. Band III wird im Januar-Februar 1919 gedruckt. Band IV ist in Bearbeitung.

Digitized by Google

Aufbau des in Band I-IV enthaltenen Stoffes.

Band I (bereits erschienen).

Grundlagen der Statik und Berechnung von statisch bestimmten vollwandigen Systemen.

A. Die Grundlagen der Statik.

a) Entwicklung der Grundlagen der technischen Statik aus der allgemeinen Mechanik.

Die Wirkung von Kräftegruppen. Kennzeichen für das Gleichgewicht eines von Kräften ergriffenen Körpers.

b) Anwendung der mechanischen Grundlagen zur Berechnung der Auflagerkräfte bei statisch bestimmt gelagerten Konstruktionen.

Methoden zur Ermittlung der Auflagerkräfte. Unterschied zwischen statisch bestimmter und statisch unbestimmter Lagerung. Einführung in das Arbeiten mit Einflußlinien (bei Untersuchung beweglicher Lasten).

B. Berechnung von statisch bestimmten vollwandigen Konstruktionen.

(Walz- und Nietträger, Pfeiler, Stützen, Betonkonstruktionen usw.)

a) Einfache Zug- und Druckfestigkeit.

b) Berechnung von auf Biegung beanspruchten Balken.

Spannungskomponenten σ und τ. Nullinie, Trägheits- und Widerstandsmomente für verschiedene Querschnittsformen. Kraftsummen Q und Momentensummen M für verschiedene Belastungsarten, namentlich auch für bewegliche Belastung und für den Gerberschen Träger. Berechnung genieteter Träger. Einiges über die Formänderungen von auf Biegung beanspruchten Trägern (Das Wichtigste über Durchbiegungen). Biegung durch exzentrische Belastung. Besondere Aufgaben aus der Biegungslehre.

c) Berechnung von auf Knickung beanspruchten Körpern.

Säulen und Stützen.

d) Eisenbetonkonstruktionen.

Digitized by Google

Band II (bereits erschienen).

Berechnung von statisch bestimmten Fachwerkkonstruktionen und Nachträge.

A. Fachwerke.

a) Allgemein gültige Verfahren zur Bestimmung der Stabkräfte.

1. Verfahren für einfache Dreieckfachwerke. (Grundlegendes analytisches Verfahren, Kräfteplan, Rittersche Schnittmethode, Culmann.)

2. Verfahren für Fachwerke von unregelmäßiger Gliederung. (Einteilung in statisch bestimmte, labile und statisch unbestimmte Systeme. Ersatzstabmethode. Besondere Belastungen und Konstruktionen.)

b) Besondere Verfahren für Fachwerke mit beweglicher Belastung.

Einflußlinien. Rein rechnerische und rein zeichnerische Verfahren.

c) Verfahren für den Gerberschen Fachwerkträger.

B. Nachträge.

a) Der Dreigelenkbogen.

b) Zusammenfassende Betrachtung sämtlicher statisch bestimmter Tragwerke auf Grund kinematischer Methoden.

Band III

(wird gedruckt Januar-Februar 1919).

Die Lehre von den Formänderungen und Berechnung von statisch unbestimmten Konstruktionen.

A. Eingehende Untersuchung der Formänderungen

von vollwandigen und Fachwerksystemen. (Berechnung der Formänderungen mittels elementarer, geometrischer Methoden und mittels des Prinzips der virtuellen Verrückungen.)

B. Anwendung der Formänderungen

zur Berechnung statisch unbestimmter Konstruktionen. (Entwicklung des grundsätzlichen Gedankenganges zur Berechnung eines jeden statisch unbestimmten Systems. Anwendung auf die verschiedenen in der Praxis vorkommenden Konstruktionen.)

Digitized by Google

Band IV
(in Bearbeitung).

Zusammenstellung ausgeführter Berechnungen.

a) Beispiele von Hochbaukonstruktionen.

Maßgebende Vorschriften über Belastungen, Spannungen usw. Ausgeführte Berechnungen von Trägerlagen, Stützen, Dach- und Fachwerkbauten in Eisen und Eisenbeton.

b) Beispiele von Kranträgern und Verladebrücken.

Ausgeführte Berechnungen von Kranträgern und Transportbrücken in vollwandiger und in Fachwerkkonstruktion.

c) Beispiele von Eisenbahn- und Straßenbrücken.

Eisenbahnvorschriften. Vorschriften für Straßenbrücken. Ausgeführte Berechnungen von Eisenbahn-und Straßenbrücken in Eisen und Eisenbeton.

Bemerkung: Diese Sammlung von Berechnungen **ausgeführter Konstruktionen** soll den Abschluß der in Band I—III durchgenommenen Theorie bilden. Sie wird dem Leser die nötige Übung in der gesamten Aufstellung und Anordnung einer statischen Berechnung geben und ihm gleichzeitig als fertige Vorlagen für seine späteren eigenen Arbeiten dienen.

Band I liegt in 4. unveränderter Auflage fertig vor. (Preis ungebunden etwa M. 23,—,* gebunden etwa M. 26,—.)*

Band II liegt in 3. Auflage fertig vor. (Preis ungebunden M. 18,15,* gebunden M. 21,45.)*

Band III wird gedruckt Januar-Februar 1919.

Band IV ist in Bearbeitung.

Die Preiserhöhung bei dem ersten Bande war leider nicht zu umgehen, da der Druckpreis um etwa 150%, der Papierpreis um 200%, der Einbandpreis ebenfalls um 200% sich erhöhte.

*** Hierzu Teuerungszuschlag.**

Digitized by Google

Statik

und

Festigkeitslehre

Digitized by Google

Digitized by Google

Statik
und
Festigkeitslehre

Vollständiger Lehrgang zum Selbststudium
für Ingenieure, Techniker und Studierende

von

Max Fischer

Erster Band:

Grundlagen der Statik und Berechnung vollwandiger Systeme einschließlich Eisenbeton

Vierte mit der dritten gleichlautende Auflage

Mit zahlreichen Beispielen und Zeichnungen

Berlin
Verlag von Hermann Meusser
1919

Digitized by Google

Alle Rechte vorbehalten
Copyright 1912 by Hermann Meusser, Berlin

Spamersche Buchdruckerei in Leipzig

Digitized by Google

Vorwort zur 1.—3. Auflage.

Mit der Herausgabe dieses Unterrichtswerkes habe ich das Ziel verfolgt, dem Lernenden ein regelrechtes Privatstudium der Statik und Festigkeitslehre zu ermöglichen. Es braucht nicht hervorgehoben zu werden, wie notwendig es für alle technischen Kreise ist, in diesen beiden grundlegenden Wissenschaften über sichere Kenntnisse zu verfügen. Doch möge an dieser Stelle erwähnt werden, worin sich das vorliegende Werk von anderen Lehrbüchern unterscheidet, und hiermit dem Leser zugleich die Wege gezeigt werden, um ein derartiges Selbststudium zweckmäßig und fruchtbringend zu gestalten. Insbesondere möchte ich drei Punkte besprechen: Den Inhalt des Buches, die Darstellungsweise und schließlich die Art eines solchen Selbststudiums.

Maßgebend für den Inhalt waren die Bedürfnisse der Praxis: Das Buch soll den Leser so weit fördern, daß er jede Konstruktion, die in der Praxis vorkommt, selbständig und mit Verständnis berechnen kann. Deshalb beschränkt sich das Werk einerseits nicht auf den Inhalt der sogenannten elementaren Lehrbücher; andererseits sind aber nicht solche Untersuchungen aufgenommen, die nur theoretisches Interesse bieten. Allerdings läßt sich hierbei schwer eine genaue Grenze ziehen. Doch gab mir meine eigene Praxis den besten Anhalt, wie der Stoff zu begrenzen war und welche Gebiete besonders hervorgehoben werden mußten.

Bei der Darstellung war ich bemüht, durch das geschriebene Wort den mündlichen Unterricht nach Möglichkeit zu ersetzen. Das Werk ist entstanden aus den Statikkursen, die ich in Ingenieurkreisen gehalten habe. Demgemäß habe ich auch in dem Buche die Einteilung in einzelne „Vorträge" beibehalten. Ferner habe ich, um das Buch allen technischen Kreisen zugänglich zu machen, die vollständig elementare Darstellungsweise beibehalten. Hierbei möchte ich jedoch betonen, daß „elementar" durchaus nicht gleichbedeutend ist mit oberflächlich; vielmehr läßt sich auch auf elementarem Wege eine Untersuchung sehr wohl gründlich und wissenschaftlich erledigen. Allerdings führen die Methoden der

356391

Digitized by Google

höheren Mathematik in vielen Fällen schneller zum Ziele. Doch ist dieser Zeitgewinn im Verhältnis zu der gesamten Arbeit, die zum Verstehen eines mechanischen Vorganges notwendig ist, gar nicht so erheblich. Außerdem glaube ich, daß die Kleinarbeit, die eine elementare Ableitung mit sich bringt, dem Lernenden wiederum in anderer Weise zugute kommt.

Hinsichtlich der Art des Selbststudiums möchte ich auf Grund der Erfahrungen, die ich in meinen Statikkursen erworben habe, besonders folgendes hervorheben: Im Grunde genommen ist die technische Statik nichts weiter als die fortwährende Anwendung einiger weniger Sätze der Mechanik. Wer diese Grundlagen wirklich erfaßt hat, wird bei weiterem Studium überrascht sein, wie einfach und beinahe selbstverständlich sich alles Folgende ergibt. Leider besteht aber gerade in technischen Kreisen die Neigung, die Anfangsgründe der Statik zu überfliegen, um sofort zu den schwierigeren Gebieten überzugehen. Diese Auffassung aber ist ein entscheidender Fehler! Die zahlreichen Mißerfolge, namentlich beim Selbststudium der Statik, beruhen nach meinen Erfahrungen nicht auf der Schwierigkeit des Stoffes — denn diese ist wirklich nicht vorhanden —, sondern einzig und allein auf einer falschen, die Grundlagen vernachlässigenden Lernmethode. Soweit über die Art des Statikstudiums.

Berlin, August 1912. Der Verfasser.

Bemerkung zur 3. Auflage.

In der vorliegenden dritten Auflage ist der Abschnitt über Knickfestigkeit vollständig umgearbeitet. Außerdem sind an zahlreichen Stellen Umänderungen und Erweiterungen vorgenommen. Da der Satz der zweiten Auflage stereotypiert war, boten diese Verbesserungen recht erhebliche Schwierigkeiten und konnten nur durch Einschaltung von Seiten und Figuren durchgeführt werden. Der Verlagsbuchhandlung, die ohne Rücksicht auf die Kosten die Änderungen vornehmen ließ, spreche ich auch an dieser Stelle für dieses Entgegenkommen meinen Dank aus.

Der Verfasser.

Digitized by Google

Inhaltsverzeichnis von Band I.

A. Allgemeine Grundlagen.

Abschnitt I.

Die Grundlagen der Statik.

Seite

Digitized by Google

Abschnitt II.

Die Berechnung der Auflagerkräfte bei statisch bestimmt gelagerten, ebenen Systemen.

B. Berechnung vollwandiger Systeme. (Festigkeitslehre.)

Abschnitt III.

Zug- und Druckfestigkeit.

Digitized by Google

Abschnitt IV.

Die Biegungsfestigkeit.

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Abschnitt V.

Die Knickfestigkeit.

Abschnitt VI.

Der Eisenbeton.

Digitized by Google

Abschnitt I.

Die Grundlagen der Statik.

1. Vortrag:

Das Verhalten von Kräften, die an einem Punkte angreifen.

§ 1.

Einleitung.

Statik, ein dem Griechischen entnommenes Wort, bedeutet die Lehre vom Gleichgewicht. In der Tat ist die Aufgabe des Statikers beim Entwerfen irgendeiner Konstruktion die, ein Bauwerk zu schaffen, das unter der Einwirkung sämtlicher an ihm angreifenden Kräfte im Gleichgewicht bleibt. Unsere erste Aufgabe wird es deshalb sein, zu untersuchen, worin denn eigentlich die Einwirkung von Kräftegruppen besteht. Wir werden hierbei so vorgehen, daß wir zunächst (im 1. Vortrag) die Wirkung von Kräften untersuchen, die an einem **Punkte** angreifen („Kräfte mit gemeinsamem Angriffspunkte"); im zweiten Vortrag behandeln wir dann die Aufgabe, die Wirkung von Kräften zu bestimmen, die an einem **Körper** angreifen („Kräfte mit verschiedenen Angriffspunkten").

§ 2.

Die Wirkung einer Kraft auf einen Punkt.

Unter „Punkt" verstehen wir nicht einen Punkt im mathematischen Sinne — denn der ist ja nur ein gedachtes Gebilde —, sondern einen Körper mit so kleinen Abmessungen, daß wir ihn als einen Punkt auffassen dürfen. Wenn nun auf einen solchen Punkt a eine Kraft wirkt (Fig. 1), so setzt er sich in Bewegung. Zur Bestimmung seiner Bewegung sind zwei Angaben nötig, nämlich: 1. die *Richtung* der Bewegung, 2. die *Geschwindigkeit* der Bewegung. Hinsichtlich dieser beiden Angaben zeigt die Beobachtung folgendes:

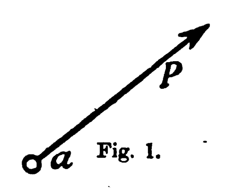


Fig. 1.

Digitized by Google

Die *Richtung* der Bewegung stimmt überein mit der Richtung der Kraft; die *Geschwindigkeit* der Bewegung ist abhängig von der Größe der Kraft. Den genaueren Zusammenhang zwischen Schnelligkeit der Bewegung und Größe der Kraft brauchen wir hier nicht zu untersuchen, das ist Sache der Lehre von der Bewegung (Dynamik). Es genügt, wenn wir uns merken, daß die Wirkung einer an einem Punkte angreifenden Kraft stets eine Inbewegungsetzung dieses Punktes ist, und daß zur Bestimmung der Wirkung der Kraft zwei Angaben nötig sind, nämlich:

1. die **Richtung** der Kraft (diese bestimmt die Richtung der Bewegung);
2. die **Größe** der Kraft (diese bestimmt die Geschwindigkeit der Bewegung).

§ 3.

Die Wirkung zweier Kräfte, die an einem Punkt angreifen.

I. Grundprinzip.

Wenn auf einen **Punkt zwei Kräfte wirken** (Fig. 2), so kann man nicht ohne weiteres angeben, in welcher Richtung er sich bewegen wird. Die Erfahrung zeigt, daß er sich weder in Richtung der einen, noch in Richtung der anderen Kraft bewegt, sondern daß er einen Mittelweg einschlägt. Genauer läßt sich die Sache nur durch einen Versuch feststellen. Da aber bei einem Experiment die Bewegung sich schlecht verfolgen läßt, wollen wir, um die

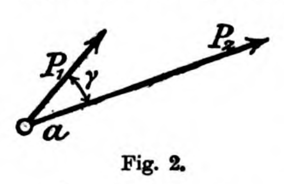


Fig. 2.

Wirkung zweier Kräfte P_1 und P_2 zu bestimmen, einen nach Art einer Federwage konstruierten Apparat benutzen. In Fig. 3 haben wir eine Führung F, die auf jeder Seite einen Schlitz hat. Durch diesen Schlitz gehen nach einem Punkte a zwei Fäden, die durch die Gewichte P_1 und P_2 belastet sind. Gestützt wird dieser Punkt durch eine geaichte Spiralfeder; im übrigen ist er in der Führung frei verschiebbar. Die Führung F ist um ihren Mittelpunkt e drehbar. Sobald nun die Kräfte P_1 und P_2 auf den Punkt a zu wirken beginnen, wird sich die Führung F in eine bestimmte Lage einstellen, und die Spiralfeder wird sich um eine bestimmte Strecke zusammendrücken. Der Apparat gibt also

1. aus der Stellung der Führung die **Richtung**,
2. aus der Zusammendrückung der Feder die **Größe**

Digitized by Google

der gemeinsamen Einwirkung der beiden Kräfte P_1 und P_2 auf den Punkt a an. Bei einem solchen Versuch war z. B.

$$P_1 = 5 \text{ kg}, \quad P_2 = 3 \text{ kg} \quad \text{und} \quad \sphericalangle\gamma = 60^0.$$

Es ergab sich dann, daß die Feder um ein Stück zusammengedrückt wurde, das einem Drucke von 7,0 kg entsprach, und daß die Führung sich so einstellte, daß $\sphericalangle\alpha = 21^\circ\, 47'$ und $\sphericalangle\beta = 38^\circ\, 13'$ war. Hiermit war die gemeinsame Einwirkung der beiden Kräfte P_1 und P_2 auf den Punkt a vollständig bestimmt: Wäre der Punkt a nicht durch die Feder festgehalten, so würde er sich in der durch die Winkel α oder β bestimmten Richtung bewegen und zwar mit einer Geschwindigkeit, die einer Kraft von 7,0 kg entsprechen würde. Vergleicht man nun diese Wirkung der beiden Kräfte P_1 und P_2 mit der im vorigen Paragraphen untersuchten Wirkung *einer* Kraft, so kann man sagen: Beide Kräfte zusammen wirken genau so, wie eine einzige Kraft wirken würde, die eine Größe von 7,0 kg hätte, und die in der durch die Winkel α oder β bestimmten Richtung angebracht wäre. Diese gedachte Kraft existiert also in Wirklichkeit gar nicht, sondern wir ziehen sie nur zum Vergleich heran, um die gemeinsame Wirkung der beiden tatsächlich vorhandenen Kräfte P_1 und P_2 zu bestimmen. Und zwar ist es für viele Untersuchungen zweckmäßig, sie einzuführen, da wir uns ja von der Wirkung *einer* Kraft eine viel klarere und einfachere Vorstellung machen können, als wenn zwei Kräfte zugleich vorhanden sind.

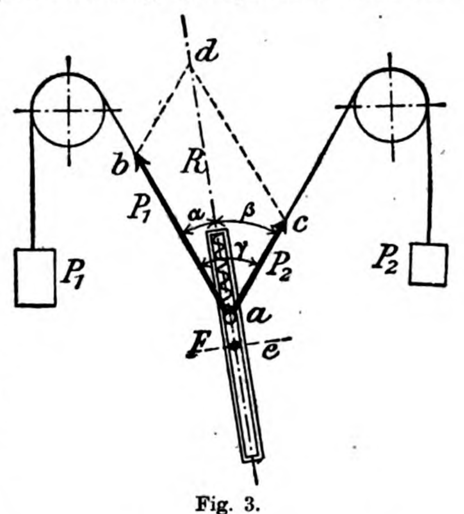


Fig. 3.

Diese gedachte Kraft nennen wir: **„Ersatzkraft, Mittelkraft, Resultierende** oder **Resultante“** und bezeichnen sie mit dem Buchstaben „R“. Natürlich können wir nun aber nicht, wenn wir irgend zwei andere Kräfte P_1 und P_2 haben, erst jedesmal mit unserem Apparat einen Versuch machen, um für diese beiden Kräfte ihre Ersatzkraft zu bestimmen. Wir müssen vielmehr aus dem einen Versuch gewissermaßen ein Rezept ableiten, das auch für alle an-

Digitized by Google

deren möglichen Fälle gilt. Diese Regel finden wir nun auf folgende Weise: Wir tragen auf der Richtung von P_1 (Fig. 3) die Größe dieser Kraft in einem beliebigen Maßstabe als Länge ab (z. B. 1 kg = 0,5 cm; also P_1 = 5 kg = 2,5 cm), ebenso auf der Richtung von P_2 die Größe dieser Kraft ebenfalls in diesem Maßstabe als Länge ab (also P_2 = 3 kg = 1,5 cm), zeichnen dann aus diesen beiden Längen das Parallelogramm *a b c d* und die Diagonale *a d*. Messen wir nun die Länge der Diagonalen, so finden wir, daß sie 3,5 cm lang ist (s. Fig. 3). Nun hatten wir vorhin beim Auftragen der Kräfte 1 kg durch 0,5 cm dargestellt; daraus folgt, daß, wenn wir die Diagonale als Darstellung einer Kraft auffassen, sie 7,0 kg zu bedeuten hätte. Genau ebenso groß hatte sich aber vorhin die Ersatzkraft von P_1 und P_2 ergeben. *Wir haben also das wichtige Resultat, daß die Diagonale zeichnerisch die Größe der Ersatzkraft R der beiden Kräfte P_1 und P_2 darstellt.* Aber auch die Richtung stimmt überein. Denn wenn wir die Winkel α und β abmessen, die die Diagonale mit den Seiten *a b* und *a c* einschließt, so werden wir finden, daß $\alpha = 21° 47'$ und $\beta = 38° 13'$ ist. Durch diesen Kunstgriff, die beiden Kräfte P_1 und P_2 zeichnerisch durch die beiden Strecken *a b* und *a c* darzustellen, haben wir also erreicht, daß wir nur das Parallelogramm *a b c d* zu zeichnen brauchen, und daß dann dessen Diagonale nach Größe und Richtung diejenige Kraft *R* angibt, deren Wirkung gleich ist der Gesamtwirkung von P_1 und P_2 zusammen. Auch wenn wir den Versuch mit zwei beliebigen anderen Kräften ausführen, immer wird sich ergeben, daß die Diagonale des aus den beiden Kräften konstruierten Parallelogramms zeichnerisch die Ersatzkraft der beiden Kräfte wiedergibt. Allgemein haben wir also den Satz:

Greifen an einem Punkte zwei Kräfte an, so ist ihre Gesamtwirkung gleich der Wirkung einer gedachten Kraft, deren Größe und Richtung gefunden wird durch die Diagonale des Parallelogramms, das aus den beiden gegebenen Kräften konstruiert ist.

Dieses ist der Satz vom „Parallelogramm der Kräfte". Zurzeit ist er ja ein allbekannter Satz der Mechanik. Man darf aber nicht übersehen, daß er durchaus nicht selbstverständlich ist, sondern durch Versuche direkt bewiesen werden muß. In der Geschichte der Mechanik hat es sogar sehr lange gedauert, bis man auf den Gedanken gekommen ist, die gegebenen Kräfte durch Strecken darzustellen und dann aus diesen Strecken das Parallelogramm zu konstruieren. Die Pendelgesetze, die Fallgesetze und vieles andere war bereits bekannt, bis es gelang, die Wirkung zweier Kräfte auf

Digitized by Google

diese einfache Weise darzustellen. Wir verdanken diese Untersuchung den Physikern Newton und Varignon. Namentlich der erstere hat den Satz vom Parallelogramm der Kräfte zur Grundlage der gesamten Mechanik gemacht. Wir bezeichnen ihn als *Grundsatz*, *Prinzip* oder *Axiom*. Die späteren Sätze, die aus diesen Prinzipien abgeleitet sind, bilden dann die eigentlichen „*Lehrsätze*". Den Vorgang, die Wirkung zweier Kräfte durch die Wirkung einer (gedachten) Kraft zum Ausdruck zu bringen, bezeichnet man als das „**Zusammensetzen**" der beiden Kräfte.

II. Praktische Anwendungsmethoden des Grundprinzips.

Zur praktischen Ermittelung von R können wir verschiedene Wege einschlagen, je nachdem wir graphisch (zeichnerisch) oder analytisch (rechnerisch) vorgehen wollen.

Erste Methode: Graphisch.

Um hiernach zwei Kräfte P_1 und P_2 (Fig. 4 a) durch ihre Ersatzkraft R zu ersetzen, verfahren wir nach dem oben entwickelten Satze: Wir stellen P_1 dar nach Größe und Richtung

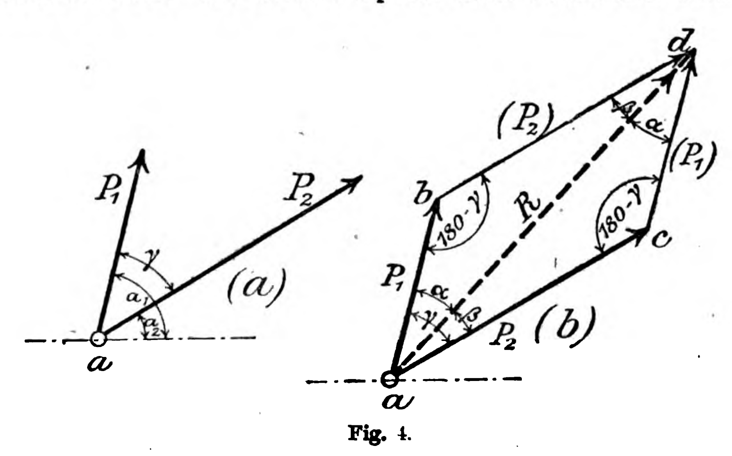


Fig. 4.

durch die Strecke $a\,b$, ebenso P_2 durch $a\,c$ (Fig. 4 b), zeichnen das zugehörige Parallelogramm und erhalten die gesuchte Ersatzkraft R, dargestellt nach Größe und Richtung durch die Diagonale $a\,d$. Man sieht jedoch aus Fig. 4b, daß es genügt, eines der beiden Dreiecke, $a\,b\,d$ oder $a\,c\,d$, zu zeichnen; zwei Seiten von diesen Dreiecken sind die gegebenen Kräfte, und die dritte Seite ist die gesuchte Ersatzkraft. Der Maßstab, in dem die Resultierende R aus der Fig. 4b abzumessen ist, ist natürlich derselbe, in dem die

Digitized by Google

gegebenen Kräfte P_1 und P_2 aufgezeichnet wurden. Die Dreiecke abd und acd heißen die **„Kräftedreiecke“.**

Zweite Methode: Analytisch.

In den Kräftedreiecken abd oder acd sind bekannt zwei Seiten (nämlich P_1 und P_2) und der eingeschlossene Winkel (nämlich gleich $180 - \gamma$). (Der Winkel γ ist natürlich bekannt, da ja die beiden Kräfte P_1 und P_2 nach Größe und Richtung gegeben sind.) Wir können also die dritte Seite, R, statt durch Zeichnung auch auf rechnerischem Wege finden. Zur Ausrechnung einer derartigen geometrischen Figur stehen bekanntlich zwei Wege zur Verfügung:

a) mit Hilfe der Trigonometrie,
b) mit Hilfe der analytischen Geometrie.

a) Berechnung von R mit Hilfe der Trigonometrie.

Bezeichnen wir in einem beliebigen Dreiecke die drei Seiten mit a, b, c, und den Winkel, der c gegenüberliegt, mit γ, so ist bekanntlich nach dem Kosinussatz:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma .$$

Angewendet auf eines der beiden Kräftedreiecke (Fig. 4) ergibt sich:

$$R^2 = P_1^2 + P_2^2 - 2P_1P_2\cos(180 - \gamma) .$$

Nun ist $\cos(180 - \gamma) = -\cos\gamma$; also:

$$R^2 = P_1^2 + P_2^2 + 2P_1P_2\cos\gamma ,$$

$$\text{(I)} \qquad R = \sqrt{P_1^2 + P_2^2 + 2P_1P_2\cos\gamma} .$$

Die Winkel α oder β finden wir mit Hilfe des Sinussatzes:

$$\sin\alpha : \sin(180 - \gamma) = P_2 : R ;$$

hieraus

$$\text{(II)} \qquad \sin\alpha = \frac{\sin\gamma \cdot P_2}{R} ;$$

entsprechend

$$\text{(II)} \qquad \sin\beta = \frac{\sin\gamma \cdot P_1}{R} .$$

[Es ist $\sin(180 - \gamma) = \sin\gamma$.] Aus den beiden Gleichungen (II) ergibt sich außerdem

$$\text{(III)} \qquad \sin\alpha : \sin\beta = P_2 : P_1 .$$

Wir finden also bei der trigonometrischen Ausrechnung des Kräftedreiecks die Größe von R aus der Gleichung (I) und die Richtung von R aus den Gleichungen (II).

Digitized by Google

b) Berechnung von R mit Hilfe der analytischen Geometrie.

Fig. 4 und Fig. 5.

Um auf diesem Wege die Ersatzkraft R, d. h. die Länge $a\,d$ und den Winkel α_R, durch den wir jetzt die Richtung von R festlegen wollen, zu bestimmen, ziehe ich durch Punkt a ein rechtwinkliges Achsenkreuz x, y. Dann fälle ich von den Punkten b und d auf die beiden Achsen die Lote $b\,b'$ und $d\,d'$, resp. $b\,b''$ und $d\,d''$, und erhalte

$$a\,b' = P_1 \cos\alpha_1\,; \quad b'd' = P_2 \cos\alpha_2\,;$$
$$a\,b'' = P_1 \sin\alpha_1\,; \quad b''d'' = P_2 \sin\alpha_2\,,$$

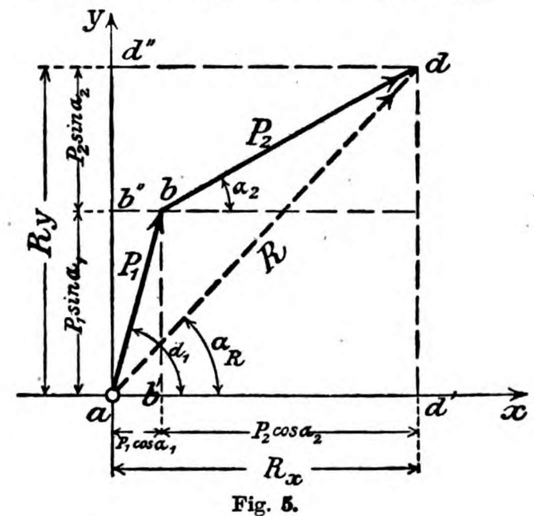


Fig. 5.

worin α_1 und α_2 die Neigungswinkel der beiden nach Größe und Richtung gegebenen Kräfte P_1 und P_2 sind. Bezeichnen wir die Strecke $a\,d'$ mit R_x, und die Strecke $a\,d''$ mit R_y, so ist also

$$R_x = P_1 \cdot \cos\alpha_1 + P_2 \cdot \cos\alpha_2\,;$$
$$R_y = P_1 \cdot \sin\alpha_1 + P_2 \cdot \sin\alpha_2\,.$$

Nachdem wir hiermit die Strecken R_x und R_y bestimmt haben, finden wir nach Fig. 5 die Größe von R aus der Gleichung

$$\text{(I)} \qquad R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}\,,$$

und die Richtung von R aus einer der Gleichungen

$$\text{(II)} \quad \sin\alpha_R = \frac{R_y}{R}\,; \quad \cos\alpha_R = \frac{R_x}{R}\,; \quad \operatorname{tg}\alpha_R = \frac{R_y}{R_x}\,; \quad \operatorname{ctg}\alpha_R = \frac{R_x}{R_y}\,.$$

Die Berechnung von R mit Hilfe der analytischen Geometrie ist also dann am Platze, wenn die Neigungswinkel α_1 und α_2 der

Digitized by Google

gegebenen Kräfte bekannt sind. Dieser Fall liegt aber bei technischen Aufgaben fast stets vor, so daß wir bei Berechnung von Fachwerken usw. fast ausschließlich nach dieser Methode verfahren werden. Die Strecken ab', $b'd'$ usw. nennt man die „*Projektionen*" der Kräfte P_1, P_2 usw. auf die x- bzw. y-Achse.

§ 3a.

Beispiel zu § 3.

Es sei in Fig. 4a: $P_1 = 25$ kg, $P_2 = 40$ kg; Neigungswinkel $\alpha_1 = 75°$, $\alpha_2 = 30°$ (also $\gamma = 45°$). Welche eine Kraft R hätte dieselbe Wirkung wie P_1 und P_2 zusammen?

Graphische Methode. (Fig. 6.)

Wir nehmen zunächst einen Kräftemaßstab an, z. B. 10 kg = 1 cm. Nun tragen wir von einem beliebigen Punkte a aus die eine Kraft maßstäblich nach Größe und Richtung auf und reihen an den Endpunkt dieser Kraft die zweite Kraft an. Dann ist die Ersatzkraft maßstäblich dargestellt durch die dritte Seite des entstandenen „*Kräftedreiecks*". Hinsichtlich der Pfeilrichtung von R merken wir uns: Die Ersatzkraft geht *von* dem Anfangspunkt der zuerst gezeichneten Kraft *nach* dem Endpunkte der zweiten Kraft. Die Reihenfolge, in der die Kräfte aneinandergesetzt werden, ist gleichgültig (Fig. 6a und 6b; man wird natürlich immer nur eines von den beiden Dreiecken zeichnen.) Sobald wir dann Fig. 6a oder 6b gezeichnet haben, messen wir die Länge R und die Winkel α bzw. β ab und finden

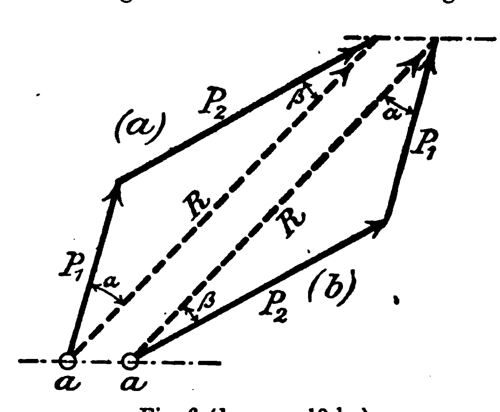


Fig. 6 (1 cm = 10 kg).

$$R = 6{,}03 \text{ cm} = 60{,}3 \text{ kg}; \quad \alpha = 28°; \quad \beta = 17°.$$

Somit ist die Ersatzkraft nach Größe und Richtung bestimmt.

Analytische Methode.

a) Die *trigonometrische Lösung* ergibt

$$R = \sqrt{625 + 1600 + 2 \cdot 25 \cdot 40 \cdot 0{,}707} = \sqrt{3639} = 60{,}32 \text{ kg},$$

Digitized by Google

$$\sin\alpha = \frac{\sin 45^\circ \cdot 40}{60{,}32} = 0{,}469\,;$$

$$\alpha = 27^\circ\,57'\,; \qquad \beta = 17^0\,3'.$$

b) Bei der *Lösung mit analytischer Geometrie* berechnen wir zunächst:

$$R_x = P_1 \cos\alpha_1 + P_2 \cos\alpha_2 = 25 \cdot \cos 75^\circ + 40 \cdot \cos 30^\circ$$
$$= 6{,}47 + 34{,}64 = 41{,}11 \text{ kg}\,;$$
$$R_y = P_1 \sin\alpha_1 + P_2 \sin\alpha_2 = 25 \cdot \sin 75^\circ + 40 \cdot \sin 30^\circ$$
$$= 24{,}15 + 20{,}00 = 44{,}15 \text{ kg}.$$

Hieraus

$$R = \sqrt{41{,}11^2 + 44{,}15^2}$$
$$= \sqrt{1690{,}03 + 1949{,}22} = 60{,}32 \text{ kg};$$

und die Richtung von R finden wir z. B. aus

$$\operatorname{tg}\alpha_R = \frac{44{,}15}{41{,}11} = 1{,}074\,; \qquad \alpha_R = 47^0\,3'.$$

Wollen wir auch hier die Winkel α und β berechnen, so haben wir

$$\alpha = 75^\circ - 47^\circ\,3' = 27^\circ\,57'\,;$$
$$\beta = 47^\circ\,3' - 30^\circ = 17^\circ\,3'.$$

§ 4.

Die Wirkung beliebig vieler Kräfte, die an einem Punkt angreifen.

I. Grundprinzip.

Durch die Untersuchungen der vorigen Paragraphen sind wir instand gesetzt, auch die Wirkung beliebig vieler Kräfte mit gemeinsamem Angriffspunkte zu bestimmen. In Fig. 7 handelt es sich um die Wirkung der 4 gegebenen Kräfte P_1, P_2, P_3, P_4 auf den Punkt m. Wir beginnen damit, daß wir die Wirkung zweier beliebiger Kräfte, z. B. P_1 und P_2, ersetzen durch ihre Ersatzkraft R_{1-2}. Um diese zu finden, zeichnen wir also ein Kräftedreieck $a\,b\,c$ (Fig. 7b), von dem zwei Seiten die gegebenen Kräfte sind, während die dritte Seite, R_{1-2}, die gesuchte Ersatzkraft ergibt. Jetzt können wir uns demnach P_1 und P_2 in Fig. 7a entfernt denken, und statt der beiden Kräfte angebracht die eine Kraft R_{1-2}. Nun verbinde ich R_{1-2} mit einer der übriggebliebenen Kräfte, z. B. mit P_3, indem ich in Fig. 7b an den Endpunkt von R_{1-2} die Kraft P_3 ansetze. Die Ersatzkraft R_{1-3} ist jetzt

Digitized by Google

in ihrer Wirkung auf Punkt m gleichwertig mit der Wirkung von P_3 und R_{1-2}, d. h. gleich der Wirkung von $(P_1 + P_2 + P_3)$. Zum Schlusse setze ich an den Endpunkt von R_{1-3} die letzte Kraft, P_4, und erhalte $a\,e = R_{1-4} =$ Ersatzkraft von $(P_1 + P_2 + P_3 + P_4)$.

Aus Fig. 7b ist ersichtlich, daß die Linien $a\,c$ und $a\,d$ nur zur Erklärung des Verfahrens erforderlich waren; um R_{1-4} zu bestimmen, genügt die Linie $a\,e$. Für die praktische Bestimmung der Ersatzkraft genügt also die Aufzeichnung des Polygons (Vielecks) $a\,b\,c\,d\,e$; wir nennen dieses das „Kräftepolygon". Es ist dadurch entstanden, daß wir von einem beliebigen Punkte aus eine Kraft (P_1) aufzeichneten, an den Endpunkt dieser Kraft eine nächste anreihten, an deren Endpunkt die folgende zeichneten usw.

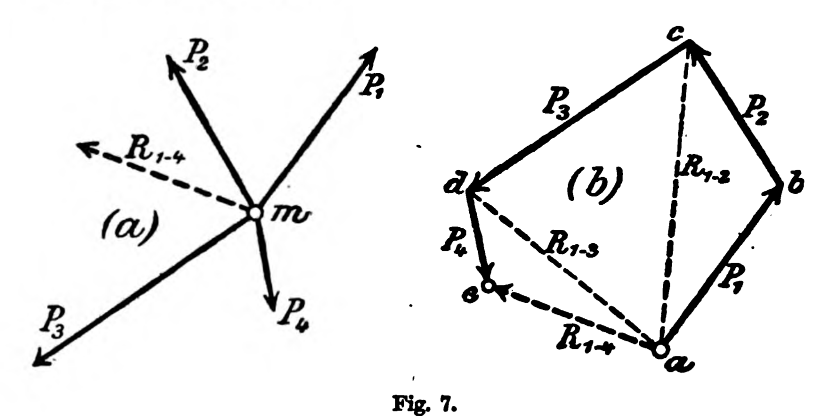


Fig. 7.

Die Reihenfolge, in der die Kräfte hingezeichnet werden, ist gleichgültig. Denn bei zwei Kräften können wir entweder zuerst P_1 und dann P_2, oder zuerst P_2 und dann P_1 aneinanderreihen, wie in § 3a hervorgehoben ist. Indem wir nun je zwei Kräfte miteinander vertauschen, können wir auch bei beliebig vielen Kräften jede gewünschte Reihenfolge erzielen.

II. Praktische Anwendungsformen des Grundprinzips.

Mit Hilfe des „*Kräftepolygons*" können wir also auch bei beliebig vielen Kräften jene Kraft R angeben, die in ihrer Wirkung der Gesamtwirkung der gegebenen Kräfte gleichwertig ist. Je nachdem wir es nun vorziehen, entweder mit Reißschiene und Dreieck, oder aber mit dem Rechenschieber, zu arbeiten, können wir die Bestimmung der Resultierenden entweder zeichnerisch oder rechnerisch durchführen.

Digitized by Google

Erste Methode: Graphisch.

Hierzu ist zu der soeben erläuterten allgemeinen Ableitung des Kräftepolygons wenig hinzuzufügen. Wir nehmen also einen uns bequem erscheinenden Kräftemaßstab an; dann zeichnen wir in diesem Maßstab zunächst eine der gegebenen Kräfte auf (Fig. 7b); reihen an deren Endpunkt eine andere Kraft an; an deren Endpunkt wieder eine Kraft usw. In dem Kräftepolygon Fig. 7b erscheinen also die Kräfte von Fig. 7a sämtlich noch einmal. Und zwar müssen sie genau parallel den gegebenen Kräften sein, und auch die Pfeilrichtung muß natürlich dieselbe sein. (Die Pfeilspitze darf also nicht etwa umgedreht eingezeichnet werden.) Es muß auch darauf aufgepaßt werden, daß eine neue Kraft immer da angesetzt wird, wo die vorhin gezeichnete aufhört. Auf diese Weise bekommt man dann ein richtiges Kräftepolygon. Die Resultierende R ist dargestellt durch die Verbindungslinie des Anfangspunktes mit dem Endpunkt des Polygons; die Pfeilrichtung der Resultierenden zeigt *von* dem Anfangspunkt der zuerst gezeichneten Kraft *nach* dem Endpunkt der zuletzt gezeichneten Kraft. (Auf diese Richtungsbezeichnung *von* .... *nach* ist genau zu achten!)

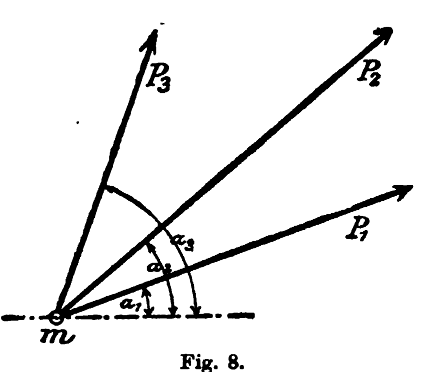


Fig. 8.

Zweite Methode: Analytisch.

Wir haben hier zwei Unterabteilungen, nämlich:

a) mit Hilfe der *Trigonometrie*,

b) mit Hilfe der *analytischen Geometrie*.

Das trigonometrische Verfahren ist aber bei mehreren Kräften sehr umständlich. (Man muß erst zwei Kräfte zusammenfassen, dann die dritte hinzunehmen, dann die vierte usw.) Für die Praxis ist nur das Verfahren mit analytischer Geometrie brauchbar. Es entspricht natürlich genau demjenigen für zwei Kräfte: Um z. B. die drei Kräfte P_1, P_2 und P_3 in Fig. 8 durch ihre Resultierende zu ersetzen, wollen wir uns zu diesen Kräften das Kräftepolygon skizziert denken (Fig. 9). Dann zeichnen wir ein rechtwinkliges Achsenkreuz x, y, loten die Endpunkte des Polygons auf die Achsen hinunter und zeichnen hierdurch die Projektionen sowohl der gegebenen als auch der gesuchten Kraft R_{1-3}. Von letzterer

Digitized by Google

sind die Projektionen wieder mit R_x und R_y benannt. Sie ergeben sich nach der Figur:

$$(1) \qquad R_x = P_1 \cos\alpha_1 + P_2 \cos\alpha_2 + P_3 \cos\alpha_3 \,,$$

$$(2) \qquad R_y = P_1 \sin\alpha_1 + P_2 \sin\alpha_2 + P_3 \sin\alpha_3 \,.$$

Aus diesen Gleichungen sind R_x und R_y zu berechnen. (Die P und α sind ja gegeben.) Hierauf finden wir die Größe von R aus

$$(\mathrm{I}) \qquad R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$$

und die Richtung von R aus einer der Gleichungen

$$(\mathrm{II}) \quad \sin\alpha_R = \frac{R_y}{R}\,; \quad \cos\alpha_R = \frac{R_x}{R}\,; \quad \mathrm{tg}\,\alpha_R = \frac{R_y}{R_x}\,; \quad \mathrm{ctg}\,\alpha_R = \frac{R_x}{R_y}\,.$$

Bei dieser Methode braucht man bei einiger Übung das Kräftepolygon gar nicht einmal aufzuskizzieren, sondern hat nur der Reihe nach die Gleichungen (1), (2), (I) und (II) auszurechnen. [Von (II) natürlich nur einen der vier Werte, da schon jeder derselben zur Bestimmung des Winkels α_R und hiermit der Richtung von R ausreicht.]

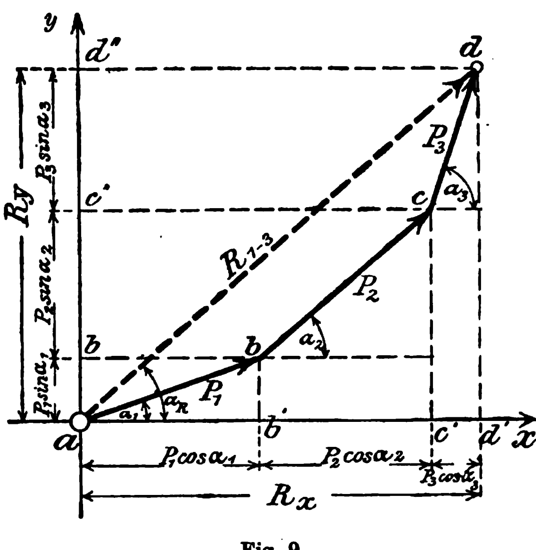


Fig. 9.

Hierbei ist aber zu beachten, daß in den Ausdrücken (1) und (2) auch Glieder mit negativen Vorzeichen vorkommen können. Haben wir z. B. die drei Kräfte P_1, P_2 und P_3 in Fig. 10, so würde deren Kräftepolygon-Skizze nach Fig. 11 aussehen. Fangen wir hier einmal mit R_y (das ist also die Projektion von R auf die y-Achse) an, so erhalten wir nach der Figur:

$$R_y = P_1 \sin\alpha_1 + P_2 \sin\alpha_2 - P_3 \sin\alpha_3 \,.$$

(Von der Strecke $a\,c''$ muß die Strecke $c''\,d''$ *abgezogen* werden, um $a\,d''$ zu erhalten.) Das letzte Glied erscheint jetzt also mit negativem Vorzeichen. Dieses kommt eben daher, weil die Pfeilspitze von P_3 nach unten zeigt, während P_1 und P_2 nach oben zeigen.

Digitized by Google

Genau dasselbe ist bei R_x, der Projektion von R auf die x-Achse, der Fall. Wenn die Kräfte sämtlich nach derselben Seite, z. B. nach rechts, zeigen, bekommen auch alle das gleiche Vorzeichen, weil sich dann die Projektionen einfach addieren (Fig. 9). Zeigt aber ein Teil der Kräfte nach rechts, der andere nach links, so heben sich die Projektionen teilweise auf und müssen also subtra-

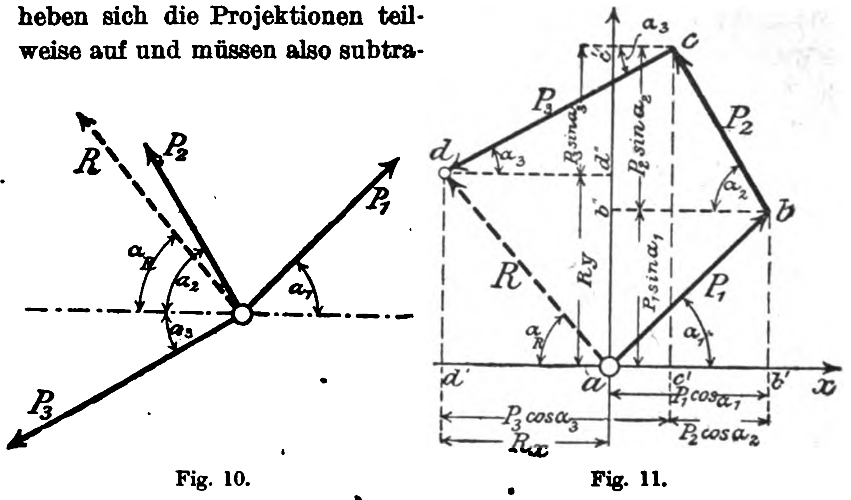


Fig. 10. Fig. 11.

hiert werden. Wir wollen im folgenden die nach *rechts* zeigenden Kräfte mit *positivem* und die nach *links* zeigenden mit *negativem* Vorzeichen einführen. Kommt dann für R_x etwas Positives heraus, so bedeutet dieses, daß R_x rechts vom „*Nullpunkte*“ a in Fig. 11 fällt; kommt etwas Negatives heraus, so fällt R_x links von a (Fig. 11).

§ 4a.
Beispiele zu § 4.
Erste Aufgabe.

Es sei in Fig. 10:

$$P_1 = 30\,\text{kg}; \quad P_2 = 25\,\text{kg}; \quad P_3 = 35\,\text{kg};$$
$$\alpha_1 = 45^\circ; \quad \alpha_2 = 60^\circ; \quad \alpha_3 = 30^\circ.$$

Welche eine Kraft könnte alle drei Kräfte ersetzen?

Wir stellen zunächst R_x und R_y auf, und zwar legen wir folgende Vorzeichenregeln zugrunde:

für R_x { eine nach *rechts* zeigende Kraft bekommt *positives* Vorzeichen,
„ „ *links* „ „ „ *negatives* „ ;

für R_y { eine nach *oben* zeigende Kraft bekommt *positives* Vorzeichen,
„ „ *unten* „ „ „ *negatives* „ .

Es wird also

$$R_x = +30 \cdot \cos 45^\circ - 25 \cdot \cos 60^\circ - 35 \cdot \cos 30^\circ = -21{,}6\ \text{kg},$$
$$R_y = +30 \cdot \sin 45^\circ + 25 \cdot \sin 60^\circ - 35 \cdot \sin 30^\circ = +25{,}4\ „$$

Digitized by Google

Für R_x ist etwas Negatives herausgekommen. Hierdurch ist angezeigt — entsprechend der von uns zugrunde gelegten Vorzeichenannahme —, daß R_x nach *links* vom Nullpunkte aus liegt. R_y liegt nach *oben* von a, da es mit positivem Vorzeichen erschienen ist. (Man sieht, daß die obigen Vorzeichenregeln an und für sich willkürlich sind. Es kommt nur darauf an, entgegengesetzte Richtungen durch entgegengesetzte Vorzeichen zu unterscheiden. Man muß aber bei Beginn der Rechnung jeder Richtung ein Vorzeichen zuteilen, um nachher bei R_x und R_y entscheiden zu können, nach welcher Seite vom Nullpunkte a aus sie liegen.) Aus R_x und R_y finden wir:

$$\text{(I)} \qquad R = \sqrt{(-21{,}6^2) + 25{,}4^2} = 33{,}4\,\text{kg};$$

$$\text{(II)} \qquad \text{tg}\,\alpha_R = \frac{25{,}4}{21{,}6} = 1{,}17; \quad \alpha_R = 49^\circ\,30'.$$

Bei $\text{tg}\,\alpha_R$ brauchen wir nur die Zahlen von R_x und R_y, ohne Vorzeichen, einzuführen; da ja schon vorhin aus der Lage von R_x und R_y entschieden ist, daß R nach links oben geht. Auch bei dem Wurzelzeichen in Gleichung (I) kommt das Vorzeichen nicht mehr in Betracht, da das Quadrat einer jeden Zahl positiv ist. Die Vorzeichen von R_x und R_y sind also nur nötig, um zu bestimmen, ob die Resultierende R nach rechts oben, oder nach links oben, oder nach rechts unten, oder nach links unten geht.

Wann treten die beiden letzten Fälle ein?

Zweite Aufgabe.

An einem Punkte greifen folgende Kräfte an:

nach rechts oben	$P_1 = 100$ kg	*unter dem Neigungswinkel*	$\alpha_1 = 20^\circ$;
„ „ „	$P_2 = 80$ „	„ „ „	$\alpha_2 = 60^\circ$;
„ *links oben*	$P_3 = 120$ „	„ „ „	$\alpha_3 = 30^\circ$;
„ *links unten*	$P_4 = 130$ „	„ „ „	$\alpha_4 = 40^\circ$;
„ *rechts unten*	$P_5 = 90$ „	„ „ „	$\alpha_5 = 50^\circ$.

(Als Neigungswinkel nehmen wir immer die spitzen Winkel der Kräfte gegen die x-Achse.)

Wie groß ist und welche Richtung hat die Ersatzkraft R dieser Kräfte?

a) Graphische Lösung:

Man zeichne den Punkt mit seinen fünf Kräften auf, hierzu das Kräftepolygon, und messe aus diesem R nach Größe und Richtung ab (Kräftemaßstab z. B. 20 kg = 1,0 cm).

Digitized by Google

b) Analytische Lösung:

Wir berechnen

$$R_x = +100 \cdot \cos 20^\circ + 80 \cdot \cos 60^\circ - 120 \cdot \cos 30^\circ - 130 \cdot \cos 40^\circ + 90 \cdot \cos 50^\circ$$
$$= 94 + 40 - 104 - 100 + 58 = -12 \text{ kg}.$$

Wir haben bei R_x die nach rechts zeigenden Kräfte mit positivem Vorzeichen versehen und die nach links zeigenden mit negativem. Da nun R_x mit negativem Vorzeichen herausgekommen ist, so folgt daraus, daß es nach links liegt.

$$R_y = +100 \cdot \sin 20^\circ + 80 \cdot \sin 60^\circ + 120 \cdot \sin 30^\circ - 130 \cdot \sin 40^\circ - 90 \cdot \sin 50^\circ$$
$$= +34 + 69 + 60 - 84 - 69 = +10 \text{ kg},$$

und zwar liegt R_y nach oben, da das positive Vorzeichen für die nach oben zeigenden Kräfte genommen wurde.

Nun bestimmen wir die Größe von R aus

$$R = \sqrt{12^2 + 10^2} = \sqrt{144 + 100} = 15{,}6 \text{ kg}.$$

Da R_x nach links und R_y nach oben zeigt, so geht R nach links oben. Der genaue Neigungswinkel von R ergibt sich z. B. aus:

$$\operatorname{tg} \alpha_R = \frac{R_y}{R_x} = \frac{10}{12} = 0{,}835; \qquad \alpha_R = 40^\circ.$$

Unter diesem Winkel würde sich also der Punkt unter der Einwirkung der fünf Kräfte nach links oben bewegen.

Anleitung zum praktischen Rechnen: Auf der Rückseite des Rechenschiebers sind auf dessen beweglichem Teile, der sog. „Zunge", die Sinus angegeben. Um also z. B. $90 \cdot \cos 50^\circ$ auszurechnen, nimmt man dafür $90 \cdot \sin 40^\circ$ [da $\cos 50^\circ = \sin(90 - 50)^\circ$ ist], stellt auf der Rückseite die Zahl 40° an den Markierstrich, schiebt den Glasläufer auf der Vorderseite über die Zahl 9 der obersten Teilung und liest dann auf der oberen Teilung der Zunge das Resultat 57,9 ab.

Dritte Aufgabe.

Auf einen Punkt wirken folgende Kräfte ein:

horizontal nach rechts $P_1 = 60$ kg (also $\alpha_1 = 0^\circ$),
„ „ *links* $P_2 = 40$ „ („ $\alpha_2 = 0^\circ$),
vertikal nach oben $P_3 = 70$ „ („ $\alpha_3 = 90^\circ$),
„ „ *unten* $P_4 = 20$ „ („ $\alpha_4 = 90^\circ$).

Die Ersatzkraft R ist zu bestimmen!

a) Die *graphische* Lösung führe man selber durch!

b) Analytisch. Bei der Aufstellung des Summenausdruckes R_x wollen wir wieder die nach *rechts* zeigenden Kräfte mit *positivem*

Digitized by Google

und die nach *links* zeigenden mit *negativem* Vorzeichen einführen. Eine Kraft, die *rechtwinklig* zur x-Achse steht, muß dann also sowohl das positive als auch das negative Vorzeichen bekommen, da sie sowohl zu der einen wie zu der anderen Seite gerechnet werden kann.

Bei R_y wollen wir die Richtung nach *oben positiv* und die nach *unten negativ* nehmen. Einer Kraft, die *rechtwinklig* zur y-Achse steht, geben wir zunächst beide Vorzeichen.

Dann wird

$$R_x = +P_1 \cdot \cos 0° - P_2 \cdot \cos 0° \pm P_3 \cdot \cos 90° \pm P_4 \cdot \cos 90°,$$
$$R_y = \pm P_1 \cdot \sin 0° \pm P_2 \cdot \sin 0° + P_3 \cdot \sin 90° - P_4 \cdot \sin 90°.$$

Nun ist aber bekanntlich:

$$\cos 0° = 1; \quad \cos 90° = 0,$$
$$\sin 0° = 0; \quad \sin 90° = 1.$$

Die obigen Gleichungen gehen also über in:

$$R_x = +P_1 \cdot 1 - P_2 \cdot 1 \pm P_3 \cdot 0 \pm P_4 \cdot 0,$$
$$R_y = \pm P_1 \cdot 0 \pm P_2 \cdot 0 + P_3 \cdot 1 - P_4 \cdot 1.$$

Wenn man eine Zahl mit Null multipliziert, so erhält man das Resultat Null. In den obigen Ausdrücken fallen also die Glieder, die den Faktor Null haben, fort, und wir haben das Resultat

$$(1) \qquad R_x = +P_1 - P_2;$$
$$(2) \qquad R_y = +P_3 - P_4.$$

(Die weitere Berechnung führe man selber aus!)

Aus den Gleichungen (1) und (2) wollen wir uns für alle folgenden Berechnungen merken:

Bei dem Summenausdruck R_x erscheinen die in Richtung der x-Achse wirkenden Kräfte in natürlicher Größe, und die rechtwinklig dazu stehenden fallen vollständig fort.

Bei dem Summenausdruck R_y erscheinen die in Richtung der y-Achse wirkenden Kräfte in natürlicher Größe, und die rechtwinklig dazu stehenden fallen vollständig fort.

Noch einfacher als aus der Rechnung ergeben sich diese beiden Regeln ja auch aus der Figur. Man ersieht, in Übereinstimmung mit dem Obigen, aus dem Kräftepolygon folgendes: Bei der x-Achse projiziert sich eine horizontale Kraft in natürlicher Größe, und eine vertikale Kraft als Punkt (also von der Länge Null). Da-

Digitized by Google

gegen bei der y-Achse erscheint die Projektion einer vertikalen Kraft in natürlicher Größe, und die Projektion einer horizontalen Kraft wird gleich Null.

Vierte Aufgabe.

Auf einen Punkt wirken folgende drei Kräfte:

nach rechts oben $P_1 = 120$ kg *unter einem Winkel* $\alpha_1 = 30°$
„ *links unten* $P_2 = 130$ „ „ „ „ $\alpha_2 = 45°$
„ „ „ $P_3 = 24$ „ „ „ „ $\alpha_3 = 60°$

Gesucht ist die Ersatzkraft!

Resultat: R geht direkt vertikal abwärts und hat die Größe von 52,7 kg. (Dieses folgt daraus, daß $R_x = 0$ und $R_y = 52,7$ kg herauskommt; $\operatorname{tg}\alpha_R$ ergibt sich gleich unendlich, entsprechend einem Winkel von 90°.)

§ 5.

Die Gleichgewichtsbedingung von Kräften, die an einem Punkte angreifen.

I. Grundprinzip.

Wenn wir zu einem beliebigen Kräftesystem das Kräftepolygon zeichnen, so wird im allgemeinen der in Fig. 7—11 angenommene Fall eintreten: Punkt e fällt nicht mit Punkt a zusammen, und die gedachte Kraft ae gibt die Wirkung des Kräftesystems an.

Wenn aber beim Aufzeichnen des Polygons der in Fig. 12 angenommene besondere Fall eintritt, daß der Endpunkt e zusammenfällt mit dem Anfangspunkte a, so wird $ae = 0$. Die Kraft, deren Wirkung gleich ist der Gesamtwirkung von $(P_1 + P_2 + P_3 + P_4)$, ist gleich Null. Mit anderen Worten: Das Kräftesystem bringt keine Wirkung auf den Punkt m hervor, es bildet ein „Gleichgewichtssystem".

Dieser besondere Fall, daß mehrere an einem Punkte angreifende Kräfte den Punkt nicht in Bewegung setzen (wie man doch im allgemeinen annehmen müßte), sondern ihn in Ruhe

Digitized by Google

halten, bildet die Grundlage für alle weiteren Untersuchungen. Deshalb ist die Frage: „Wann halten mehrere an einem Punkte

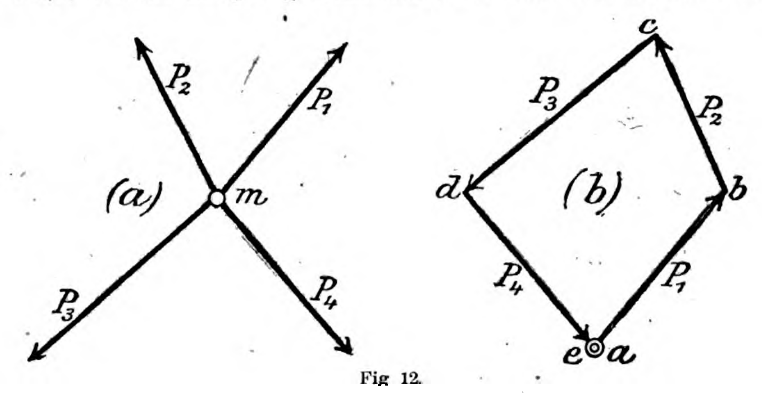


Fig 12.

angreifende Kräfte diesen Punkt im Ruhezustand?“ für uns von der größten Wichtigkeit. Die prinzipielle Antwort lautet: „dann, wenn sich die Resultierende dieser Kräfte gleich Null ergibt.“

Um nun zu entscheiden, ob die Ersatzkraft irgendeiner Kräftegruppe gleich Null ist, können wir wieder entweder graphisch oder analytisch vorgehen.

II. Verschiedene Anwendungsmethoden des Grundprinzips.

Erste Methode: Graphisch.

Um festzustellen, ob R gleich Null ist, zeichnen wir unter Zugrundelegung eines Kräftemaßstabes zu den gegebenen Kräften

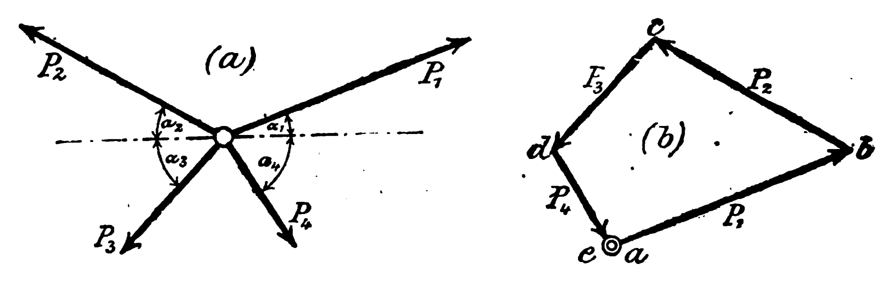


Fig. 13.

(Fig. 13a) ein Kräftepolygon (Fig. 13b). Wenn sich dann zeigt, daß der Endpunkt der zuletzt gezeichneten Kraft (Punkt e) von selber zurückfällt in den Anfangspunkt der zuerst gezeichneten

Digitized by Google

Kraft (Punkt *a*), so bedeutet dieses, daß R gleich Null ist. Das heißt also, daß diese Kräftegruppe die besondere Eigenschaft hat, daß sie ihren Angriffspunkt (Fig. 13a) in Ruhe hält. Und das Kennzeichen dafür ist:

„*Das Kräftepolygon schließt sich.*“

Zweite Methode: Analytisch.

Zur analytischen Bestimmung von R hatten wir im § 4 den Ausdruck abgeleitet

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}\,.$$

Da das Quadrat einer Zahl stets positiv ist (auch wenn die Zahl selber negativ ist), haben wir unter dem Wurzelzeichen eine Summe, die stets aus zwei positiven Gliedern besteht. Eine solche Summe kann nur dann gleich Null werden, wenn jedes der beiden Glieder gleich Null ist [während eine Summe, die aus einem positiven und aus einem negativen Gliede besteht, z. B. $a + (-b)$, auch dann zu Null wird, wenn beide Glieder gleich groß sind].

Damit also

$$R = 0$$

wird, muß sein

$$R_x = 0\,, \quad R_y = 0\,.$$

In Worten heißt dieses: Um zu entscheiden, ob eine an einem Punkt angreifende Kräftegruppe diesen Punkt in Ruhe halten wird, denken wir uns durch den Punkt ein rechtwinkliges Achsenkreuz x, y gezogen und berechnen die Projektionen der Kräfte auf die x-Achse (nämlich $P_1 \cdot \cos\alpha_1$, $P_2 \cdot \cos\alpha_2$ usw.) und auf die y-Achse (nämlich $P_1 \cdot \sin\alpha_1$, $P_2 \cdot \sin\alpha_2$ usw.). Dann nehmen wir bei der x-Achse die nach rechts und die nach links zeigenden Projektionen mit *verschiedenen* Vorzeichen und bestimmen mit Berücksichtigung der Vorzeichen die Summe R_x der Projektionen. Entsprechend nehmen wir bei der y-Achse die nach oben und die nach unten zeigenden Projektionen mit *verschiedenen* Vorzeichen und rechnen die Summe R_y dieser Projektionen aus. *Wenn sich dann sowohl für R_x als auch für R_y der Wert Null ergibt, bleibt der Punkt in Ruhe.*

Die Bedingung, daß R_x gleich Null sein muß, läßt sich auch in der Form aussprechen: Es muß bei der x-Achse die Summe der nach rechts zeigenden Projektionen gleich der Summe der nach links zeigenden Projektionen sein. (Denn R_x entsteht ja aus der Addition dieser beiden, *mit verschiedenen Vorzeichen* zu nehmen-

Digitized by Google

den Teilsummen). Entsprechend kann man statt „$R_y = 0$“ sagen: Es müssen bei der y-Achse die nach oben zeigenden Projektionen zusammen gleich den nach unten zeigenden sein. Diese Form der Gleichgewichtsbedingungen ist für die Anwendung sehr bequem. Wir wollen sie übersichtlich zusammenstellen:

I. *Die Summe der nach rechts zeigenden Projektionen muß gleich der „ „ „ links „ „ sein.*

II. *Die Summe der nach oben zeigenden Projektionen muß gleich der „ „ „ unten „ „ sein.*

Diese Bedingung, daß R_x und R_y gleich Null sein müssen, damit R gleich Null ist, kann man auch noch auf einem anderen, recht anschaulichen Wege ableiten. Wenn nämlich R nicht gleich Null ist, und man projiziert R auf ein Achsenkreuz x, y, so wird man doch für die Projektionen R_x und R_y gewisse Werte bekommen. Nur wenn zufällig R senkrecht zur x-Achse steht, wird $R_x = 0$; jedoch hat dann R_y einen endlichen Wert (nämlich dann ist R_y gleich R). Und wenn umgekehrt R senkrecht zur y-Achse steht, wird $R_y = 0$; aber dann hat R_x einen endlichen Wert. Auf jeden Fall können, solange R nicht gleich Null ist, entweder beide Projektionen R_x und R_y, oder wenigstens eine von beiden, ebenfalls nicht gleich Null werden. Daraus folgt aber umgekehrt, daß, wenn trotzdem *beide* Projektionen R_x und R_y gleich Null werden, dieses nur dann möglich sein kann, wenn auch R gleich Null ist.

Also ist die Bedingung:

$$R_x = 0\,, \qquad R_y = 0$$

ein absolut sicheres Kennzeichen dafür, daß $R = 0$ ist.

Aus dieser Ableitung ersieht man aber auch noch folgendes: Man braucht die x- und die y-Achse gar nicht rechtwinklig zueinander zu nehmen. Man kann vielmehr eine beliebige x-Achse nehmen und zunächst R_x bilden ($R_x = P_1 \cdot \cos\alpha_1 + P_2 \cdot \cos\alpha_2 + \ldots$). Dann kann man eine beliebige, eventuell schief dazu stehende y-Achse nehmen und R_y bilden; und zwar ist jetzt $R_y = P_1 \cdot \cos\beta_1 + P_2 \cdot \cos\beta_2 + \ldots$, worin $\beta_1, \beta_2, \ldots$ die Neigungswinkel der Kräfte P_1, $P_2, \ldots$ gegen die neue y-Achse sind. Ergibt sich hierbei, daß sowohl R_x als auch R_y gleich Null ist, so ist dieses eine ausreichende Bedingung dafür, daß auch R gleich Null ist. Meistens ist es allerdings am bequemsten, die Achsen rechtwinklig zueinander zu nehmen.

Digitized by Google

§ 5a.

Beispiele zu § 5.

Erste Aufgabe.

In Fig. 13 sei:

$P_1 = 35\,\text{kg}$; $P_2 = 30\,\text{kg}$; $P_3 = 20\,\text{kg}$; $P_4 = 15\,\text{kg}$,

$\alpha_1 = 20°$; $\alpha_2 = 30°$; $\alpha_3 = 45°$; $\alpha_4 = 61°$.

Es ist nachzuweisen, daß der Punkt m in Ruhe bleibt!

Graphisch:

Beim maßstäblichen Aufzeichnen des Kräftepolygons (Fig. 13b) zeigt sich, daß sich dieses „schließt". Daraus folgt, daß die vier Kräfte in Fig. 13a sich das Gleichgewicht halten.

Analytisch:

Wir bilden

$$R_x = +P_1 \cos\alpha_1 - P_2 \cos\alpha_2 - P_3 \cos\alpha_3 + P_4 \cos\alpha_4\,,$$

$$R_y = +P_1 \sin\alpha_1 + P_2 \sin\alpha_2 - P_3 \sin\alpha_3 - P_4 \sin\alpha_4\,.$$

Nun setzen wir die Zahlenwerte ein und finden

$$R_x = +35 \cdot 0{,}940 - 30 \cdot 0{,}866 - 20 \cdot 0{,}707 + 15 \cdot 0{,}485\,,$$

$$R_y = +35 \cdot 0{,}342 + 30 \cdot 0{,}500 - 20 \cdot 0{,}707 - 15 \cdot 0{,}875\,.$$

$$R_x = +32{,}9 - 26{,}0 - 14{,}1 + 7{,}2 = 0\,,$$

$$R_y = +12{,}0 + 15{,}0 - 14{,}1 - 13{,}0 = 0\,.$$

Da sich sowohl R_x als auch R_y gleich Null ergeben hat, ist es sicher, daß der Punkt in Ruhe bleibt.

Noch bequemer rechnet es sich, wenn man untersucht, ob

I. die Summe der nach rechts zeigenden Projektionen gleich
der „ „ „ links „ „ ist;

II. die Summe der nach oben zeigenden Projektionen gleich
der „ „ „ unten „ „ ist.

Diese Untersuchung führe man selber durch!

Zweite Aufgabe.

Auf einen Punkt wirken folgende vier Kräfte ein:

nach rechts oben	$P_1 = 19$ kg	*unter*	$\sphericalangle\alpha_1 = 40°$	(Die Winkel α sind
„ *links* „	$P_2 = 75$ „	„	$\sphericalangle\alpha_2 = 60°$	immer die spitzen
„ *links unten*	$P_3 = 85$ „	„	$\sphericalangle\alpha_3 = 20°$	Winkel gegen die
„ *rechts* „	$P_4 = 114{,}5$ kg	„	$\sphericalangle\alpha_4 = 25°$	x-Achse!)

Es ist nachzuweisen, daß der Punkt sich unter der Einwirkung dieser Kräfte nicht bewegen wird, sondern in Ruhe bleibt!

Digitized by Google

§ 6.

Die Wirkung einer Kraft, dargestellt durch die Wirkung mehrerer Kräfte.

Der Zweck, den wir mit unseren bisherigen Untersuchungen verfolgt haben, ist einleuchtend: Erstens gelangten wir auf diese Weise zu den Gleichgewichtsbedingungen, außerdem ist es natürlich stets bequemer, wenn wir statt mehrerer an einem Punkte angreifenden Kräfte nur eine Kraft (die Ersatzkraft) in die Rechnung einzuführen haben. Nun kann aber auch der umgekehrte Fall eintreten, daß es zweckmäßig ist, die Wirkung einer Kraft darzustellen durch die Wirkung mehrerer Kräfte.

Nehmen wir z. B. an, in Fig. 14a sei m der Knotenpunkt im Obergurt eines Binders. P_1 ist die Knotenlast infolge Eigengewicht, P_2 infolge Schnee und P_3 infolge Wind. P_1 und P_2 wirken vertikal nach unten; P_3 ist rechtwinklig zur Dachfläche. Wenn es nun gelingt, P_3 zu ersetzen durch zwei Kräfte, von denen die eine vertikal und die andere horizontal ist (Fig. 14b), so können wir die vertikale Kraft P_3' zusammenfassen mit P_1 und P_2 (Fig. 14c), und die Wirkung von P_3'' entweder getrennt untersuchen oder — bei flachen Dächern — einfach gar nicht berücksichtigen. In der Tat lassen sich die beiden Kräfte P_3' und P_3'' stets angeben. Die Aufgabe ist nichts anderes als die Umkehrung von § 3. Wir finden die beiden gesuchten Kräfte, indem wir ein Parallelogramm konstruieren, dessen Diagonale nach Größe und Richtung gleich der gegebenen Kraft ist und dessen Seiten die vorgeschriebenen Richtungen haben.

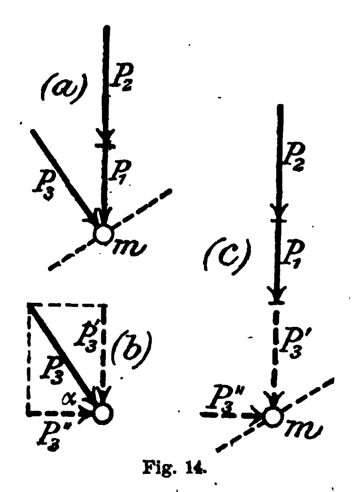


Fig. 14.

Bei dem vorliegenden Beispiele sind die Richtungen vertikal und horizontal; daher geht das Parallelogramm in ein Rechteck über. Bezeichnen wir den Winkel, den die Kraft P_3 gegen die horizontale Richtung bildet, mit α, so ist (Fig. 14b)

die *„horizontale Seitenkraft"* $P_3'' = P_3 \cdot \cos\alpha$,

„ *„vertikale Seitenkraft"* $P_3' = P_3 \cdot \sin\alpha$.

(Diese beiden Werte muß man sich für die folgenden Berechnungen merken.)

Digitized by Google

Man nennt diesen Vorgang das „Zerlegen“ einer Kraft; die beiden Kräfte P' und P'' heißen **„Seitenkräfte“** oder **„Komponenten“** von P. Man darf aber nicht übersehen, daß das Zerlegen einer Kraft kein physikalischer, sondern nur ein gedachter Vorgang ist, den wir zu dem Zwecke ausführen, um die Zahlenrechnung zu vereinfachen.

§ 7.

Beispiele zu § 6 und Schlußbetrachtung.

Erste Aufgabe.

Die Kraft P in Fig. 15a ist zu ersetzen durch zwei Kräfte P_1 und P_2, deren Richtungen in die angegebenen Linien fallen.

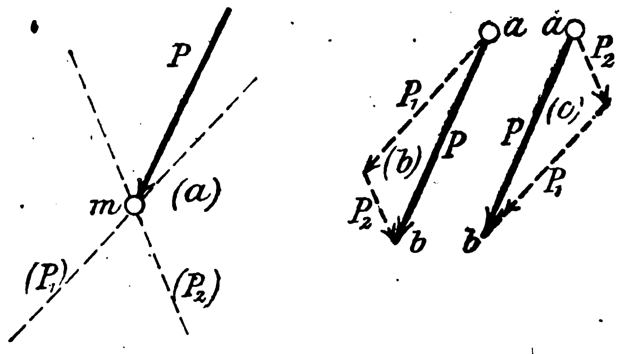


Fig. 15.

Lösung: Wir zeichnen $ab = P$ und ziehen durch die Endpunkte parallele Linien zu den gegebenen Richtungen. (Entweder nach Fig. 15b oder 15c.) Die Pfeilrichtungen von P_1 und P_2 sind so einzuzeichnen, daß P, deren Wirkung nach der Aufgabe gleich sein soll den Wirkungen von P_1 und P_2 zusammen, von dem Aufangspunkte der einen Kraft nach dem Endpunkte der anderen zeigt.

Zweite Aufgabe.

Die Kraft P in Fig. 16 soll ersetzt werden durch eine Kraft P_1, deren Größe und Richtung bereits vorgeschrieben ist, und durch eine zweite Kraft P_2, die in Größe und Richtung zunächst unbestimmt ist.

(Diese Aufgabe spielt eine wichtige Rolle bei der Ableitung des Seilpolygons; § 9.)

Lösung: Wir zeichnen zunächst $ab = P$ und an den einen Endpunkt die nach Größe und Richtung bereits vorgeschriebene

Digitized by Google

Kraft P_1 (Fig. 16b oder 16c). Dann bekommen wir durch die dritte Seite des Kräftedreiecks die dritte Kraft nach Größe und Richtung. Die Pfeilrichtung von P_2 bestimmt sich wieder in der

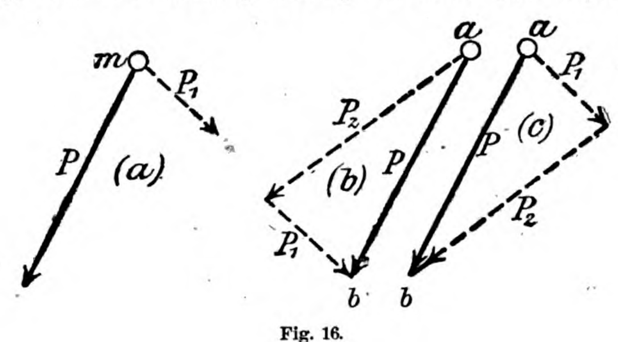


Fig. 16.

Weise, daß die Wirkung der gegebenen Kraft P gleich sein muß den Wirkungen von P_1 und P_2 zusammen. Sind die Pfeile richtig eingezeichnet, so geht also P von dem Anfangspunkt der einen Kraft nach dem Endpunkt der anderen.

Zusammenfassung zum 1. Vortrag.

Den Anfang bildete die Betrachtung der Wirkung **einer** Kraft auf einen Punkt. Dieser Fall wurde direkt aus der Anschauung erledigt.

Alle übrigen Fälle ließen sich nun an diesen Grundfall anschließen. Und zwar wurden noch folgende Fragen behandelt:

I. Wie läßt sich die Wirkung **mehrerer** Kräfte auf einen Punkt am bequemsten darstellen? (Antwort: Durch ihre Resultierende R.)

II. Welche besondere Eigenschaft muß eine Kräftegruppe haben, die ihren Angriffspunkt im Ruhezustand hält? (Sie muß $R = 0$ haben.)

III. Wie läßt sich eine Kraft durch mehrere Kräfte ersetzen? (Kräftezerlegung.)

2. Vortrag:

Das Verhalten von Kräften, die an einem Körper angreifen.

§ 8.

Die Wirkung einer Kraft, die an einem Körper angreift.

I. Allgemeines über die Wirkung der Kraft.

Im 1. Vortrag haben wir die Wirkung von Kräften bestimmt, die an einem Punkte angreifen. Genauer gesagt: an einem Körper von so kleinen Abmessungen, daß er zu einem Punkte zusammengeschrumpft ist.

Digitized by Google

Im 2. Vortrag wollen wir den Fall untersuchen, daß es sich um einen Körper von normalen, endlichen Abmessungen handelt, in dessen einzelnen Punkten die Kräfte angreifen. Um die Untersuchung zu vereinfachen, nehmen wir zunächst an, daß der Körper sich nur in einer *Ebene* ausdehnt und daß auch sämtliche Kräfte in dieser Ebene enthalten seien. Statt „Körper“ müßten wir also eigentlich „Scheibe“ sagen. Und die Aufgabe lautet dann: Auf eine solche *Scheibe* wirken Kräfte, die sämtlich innerhalb der Scheibenebene liegen. Worin äußert sich die Wirkung dieser Kräfte?

Wir beginnen mit dem allereinfachsten Fall, daß nur eine Kraft auf den Körper einwirkt. Wie bewegt er sich dann? Augenscheinlich ist dieses doch eine wirklich elementare Aufgabe, und trotzdem, wie wenige Ingenieure können darauf eine richtige Antwort geben! Dabei ist es so leicht, die Sache zu untersuchen: Wir nehmen ein Stück recht glattes Zeichenpapier als Unterlage. Legen darauf ein anderes Stückchen Papier. Halten darüber ein Lineal und üben längs dieses Lineals auf das Stückchen Papier eine Kraft aus. (Indem wir mit einer Nadel od. dgl. längs des Lineals fortwährend kleine Stöße ausüben.) Dann haben wir einen Körper, auf den (abgesehen von der sehr kleinen Reibung) in einer bestimmten Richtung eine Kraft wirkt, und können mit eigenen Augen sehen, was geschieht. Nämlich: Der Körper setzt sich in Bewegung, und zwar macht er zugleich eine fortschreitende und drehende Bewegung. Und wenn man genauer hinsieht, so zeigt sich: *Ein* Punkt des Körpers bewegt sich geradlinig fort, und zwar in Richtung der Kraft. Die anderen Punkte bewegen sich mit diesem Punkte zusammen und rotieren außerdem um diesen Punkt herum. Diesen einen ausgezeichneten Punkt nennt man in der Mechanik den „*Schwerpunkt*“ des Körpers. Der Versuch hat uns also folgendes gelehrt: Wirkt auf einen frei beweglichen Körper in einer bestimmten Richtung eine Kraft, so bewegt sich der Schwerpunkt des Körpers geradlinig in der Richtung der Kraft, und die anderen Punkte des Körpers kreisen um den Schwerpunkt herum. (Nur wenn die Richtung der Kraft zufällig durch den Schwerpunkt geht, ist die Drehgeschwindigkeit der anderen Punkte gleich Null; dann bewegen sich sämtliche Punkte geradlinig.)

Hiermit ist das, was wir für die Statik von der Wirkung einer auf einen Körper wirkenden Kraft wissen müssen, zunächst erledigt.

Digitized by Google

II. Die erforderlichen Bestimmungsstücke der Kraft.

Wieviel Angaben müssen nun über eine Kraft gemacht werden, um deren Wirkung zu bestimmen? Im vorigen Vortrag genügte es, von jeder Kraft zu wissen: Größe und Richtung. Diese beiden Angaben genügen aber nicht, sobald die Kräfte zerstreut an einem *Körper* angreifen. Nehmen wir einen für uns sehr wichtigen Fall, die Berechnung eines Fachwerkträgers (Fig. 17). Um die Wirkung der Kraft *P*, z. B. die Spannungen in den einzelnen Stäben, zu bestimmen, brauchen wir drei Angaben:

(I) 1. *Größe*, 2. *Richtung*, 3. *Angriffspunkt*

der Kraft.

Daß die ersten beiden Angaben wieder nötig sind, ist ja selbstverständlich. Aber auch die dritte Angabe ist erforderlich; denn es ist klar, daß eine Kraft, die im Punkte *a* angreift, ganz andere Spannungen hervorbringen wird, als wenn sie in *b* oder *a'* angreifen würde.

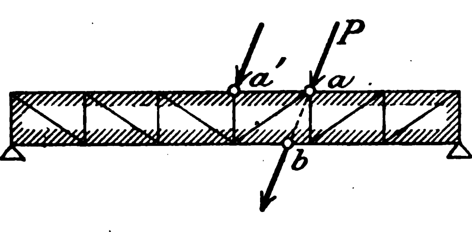


Fig. 17.

Es gibt allerdings Aufgaben, bei denen die Angabe des Angriffspunktes der Kraft bis zu einem gewissen Grade entbehrt werden kann. Wirkt auf einen starren Körper eine Kraft ein, so ist der Bewegungszustand, in den ihn die Kraft versetzt (also die Geschwindigkeit des Schwerpunktes und die Drehgeschwindigkeit um den Schwerpunkt), stets der gleiche, in welchem Punkte ihrer Richtungslinie die Kraft auch angreifen möge. Die Größe und die Richtung der Kraft darf man natürlich nicht ändern, auch darf sie nicht etwa seitlich auf dem Körper verschoben werden; den Angriffspunkt dürfen wir aber *innerhalb ihrer Wirkungslinie* beliebig annehmen, ohne daß dadurch die eintretende Bewegung irgendwie eine andere wird. Um also den Einfluß einer Kraft auf den Bewegungszustand eines starren Körpers anzugeben, sind nicht die unter (I) angeführten Bestimmungsstücke nötig, sondern es genügt die Angabe von

(II) 1. *Größe*, 2. *Richtung*, 3. *Lage der Kraft*

auf dem Körper. (Augenscheinlich ist es einfacher, die Lage anzugeben, als den genauen Angriffspunkt.) Man drückt dieses so aus: Für die Untersuchung der Bewegung eines starren Körpers

Digitized by Google

kann der Angriffspunkt einer Kraft beliebig auf ihrer Wirkungslinie verschoben werden. (Satz von der „*Verschiebung des Angriffspunktes*".)

Die „Verschiebung des Angriffspunktes" ist ferner zulässig bei der Untersuchung des Ruhezustandes eines starren Körpers (§ 12). Denn der Ruhezustand ist nichts anderes als ein besonderer Fall der Bewegung, nämlich, wenn alle Geschwindigkeiten gleich Null werden.

Weiter werden wir sehen (Abschnitt II), daß die Berechnung der Auflagerkräfte eines Trägers eine direkte Anwendung der für den Ruhezustand eines starren Körpers aufgestellten Regeln ist. (Allerdings müssen die Auflager in bestimmter Weise konstruiert sein. Näheres in Abschnitt II.) Es gilt also auch für diese Berechnungen, daß der Angriffspunkt einer Kraft innerhalb ihrer Richtungslinie beliebig angenommen werden darf. Hat z. B. der in Fig. 17 gezeichnete Träger ein festes und ein verschiebliches Lager, so erhalten wir, wenn wir ihn nach den im Abschnitt II entwickelten Methoden berechnen, in der Tat die gleichen Auflagerkräfte, gleichgültig, ob die Last P im Punkte a oder in b angreift.

Dagegen ist die Verschiebung des Angriffspunktes im allgemeinen nicht zulässig, wenn es sich um die Berechnung der im *Innern* eines Körpers wirkenden Kräfte handelt.

§ 9.

Die Wirkung mehrerer Kräfte, die an einem Körper angreifen.

Nun wollen wir den Fall untersuchen, daß auf den Körper nicht eine Kraft, sondern mehrere Kräfte einwirken. Wie können wir deren Wirkung am einfachsten zur Darstellung bringen? Die Antwort lautet: „Dadurch, daß wir diejenige Kraft R bestimmen, deren Wirkung gleich ist der Wirkung sämtlicher gegebenen Kräfte zusammen."

Allerdings läßt sich eine solche Ersatzkraft nicht immer angeben. Wenn es sich in Fig. 18 um die Berechnung der im Innern des Körpers auftretenden Kräfte (Spannungen) handelt, kommt es sehr wohl darauf an, daß die Kraft P_1 im Punkte *1*, die Kraft P_2 im Punkte *2* usw. angreift. Es muß dann eben jede Kraft an der Stelle in die Rechnung eingeführt werden, wo sie ihren Angriffspunkt hat, und weitere Rechnungsvereinfachungen können nicht vorgenommen werden. Namentlich kann die Wirkung der Kräfte nicht durch die Wirkung *einer* Kraft ersetzt werden.

Digitized by Google

Wenn es sich aber in Fig. 18 nur um die Berechnung der an den Auflagern A und B auftretenden Auflagerkräfte handelt, läßt sich die Wirkung des vorhandenen Lastensystems durch die Wirkung *einer* Kraft R darstellen; nämlich auf folgende Weisen:

I. Methode: Graphisch mittels Kräftezug.

1. Wir denken uns in Fig. 18 die beiden Kräfte P_1 und P_2 nach dem Schnittpunkt *1,2* ihrer beiden Richtungslinien verlegt. (Diese Verschiebung ist ja bei der Aufgabe zulässig, da hierdurch die Auflagerkräfte nicht geändert werden.) Dadurch haben wir den Vorteil, daß wir es dann mit zwei Kräften zu tun haben, die

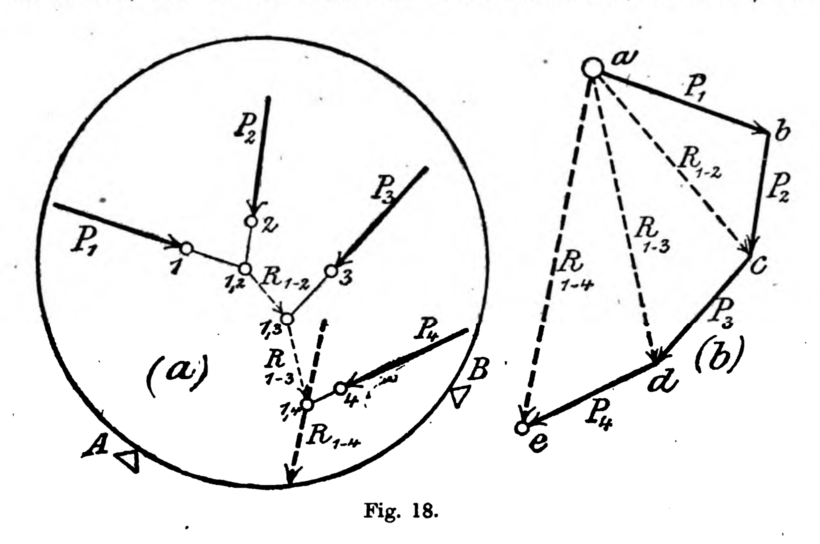


Fig. 18.

gemeinsam an einem Punkte angreifen. Wir haben also den Fall, daß die beiden Kräfte P_1 und P_2 verschiedene Angriffspunkte haben, zurückgeführt auf den bereits im 1. Vortrage untersuchten Fall, daß die beiden Kräfte einen *gemeinsamen* Angriffspunkt haben, und können die dort angegebene Methode zur Bestimmung der Ersatzkraft auch hier anwenden. (Man beachte, daß das Parallelogramm der Kräfte nur für den Fall abgeleitet und durch den Versuch bewiesen wurde, daß die Kräfte einen gemeinsamen Angriffspunkt haben.)

Wir reihen also von einem beliebigen Punkte a aus (Fig. 18b) die beiden Kräfte aneinander und erhalten die Ersatzkraft R_{1-2} von P_1 und P_2 dargestellt durch die Strecke ac. Nun können wir uns in Fig. 18a die beiden Kräfte P_1 und P_2 entfernt denken und statt der beiden die eine Kraft R_{1-2} angebracht.

Digitized by Google

In derselben Weise fassen wir dann R_{1-2} und P_3 zusammen: Wir denken uns die beiden Kräfte nach dem Schnittpunkte *1,3* ihrer Wirkungslinien verlegt, bestimmen in Fig. 18b die Ersatzkraft R_{1-3} und zeichnen diese in Fig. 18a ein. Zum Schluß verbinden wir R_{1-3} und P_4 und finden R_{1-4} als Ersatzkraft von $(P_1 + P_2 + P_3 + P_4)$.

Der Sinn dieser Untersuchung ist also folgender: Bringen wir an dem Körper die eine gedachte Kraft R_{1-4} an, deren Größe und Richtung durch die Strecke $a\,e$ (*von* dem Anfangspunkte der zuerst hingezeichneten Kraft *nach* dem Endpunkte der letzten Kraft) des Kräftepolygons, und deren Lage auf dem Körper durch

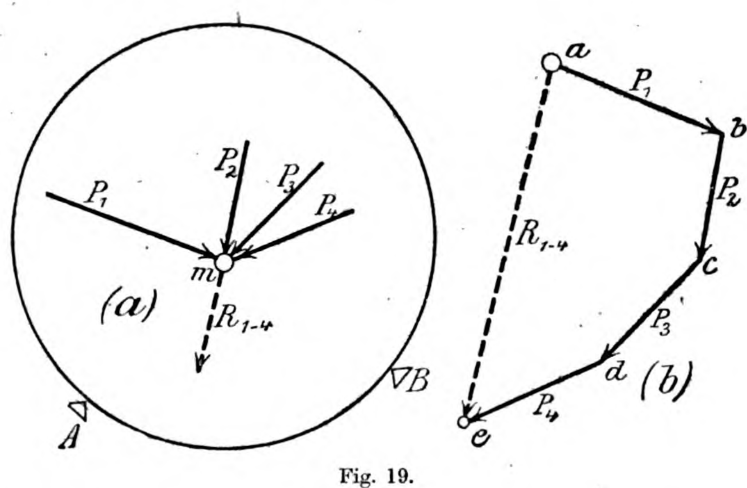


Fig. 19.

den Punkt *1,4* des „**Kräftezuges**" bestimmt ist, so bringt diese eine Kraft denselben Bewegungszustand bzw. dieselben Auflagerdrücke A und B hervor, wie das in Wirklichkeit vorhandene Kräftesystem P_1, P_2, P_3, P_4.

2. Wir wollen nun noch den Unterschied besprechen, der zwischen den beiden Aufgaben: die Ersatzkraft für Kräfte mit *gemeinsamem* Angriffspunkte und mit *verschiedenen* Angriffspunkten zu bestimmen, besteht. Denken wir uns in Fig. 19a die vorhin untersuchten Kräfte P_1, P_2, P_3, P_4 unverändert in Größe und Richtung, diesmal aber an einem gemeinsamen Angriffspunkte m wirkend, so finden wir ihre Ersatzkraft in bekannter Weise durch Konstruktion des Kräftepolygons $a\,e$ (Fig. 19b). Nun ist aber Fig. 19b vollständig gleich Fig. 18b, da wir dieselben Kräfte P_1 bis P_4 in Größe und Richtung aneinandergereiht haben. Daraus

Digitized by Google

folgt, daß auch die Ersatzkraft R_{1-4} der vier Kräfte mit *gemeinsamem* Angriffspunkte gleich ist der Ersatzkraft der vier Kräfte mit *verschiedenen* Angriffspunkten. Der Unterschied besteht nur darin, daß im ersten Falle auch die Lage von R_{1-4} sofort angegeben ist (sie muß natürlich ebenfalls durch den gemeinschaftlichen Angriffspunkt m gehen), während im zweiten Falle erst durch die Konstruktion des „Kräftezuges“ die Lage von R_{1-4} festgelegt wurde. Wenn wir also im folgenden mit der Aufgabe zu tun haben, die Ersatzkraft von Kräften mit verschiedenen Angriffspunkten zu finden, so können wir *Größe* und *Richtung* von R so bestimmen, als ob die Kräfte einen gemeinsamen Angriffspunkt hätten, also die in § 4 besprochenen graphischen oder analytischen Methoden verwenden. Eine besondere Untersuchung erfordert nur die Frage, welche *Lage* wir dieser gedachten Kraft R zuweisen müssen, damit wir sie (in dem angegebenen Umfange) als Ersatz für das gegebene Kräftesystem einführen dürfen. Die eine und natürlichste Methode, um die Lage von R zu bestimmen, haben wir bereits in dem „*Kräftezuge*“ kennen gelernt. Bei parallelen Kräften kann man sie leider nicht verwenden, weil die Schnittpunkte von parallelen Linien unendlich weit entfernt liegen. Für derartige Fälle werden wir im folgenden zwei Methoden kennen lernen, die stets zum Ziele führen.

II. Methode: Graphisch mittels Seilpolygon.

Wir gehen von derselben Aufgabe aus, die wir in Fig. 18 dargestellt haben, nur wollen wir annehmen, daß die Richtungen der vier gegebenen Kräfte etwas geändert sind (Fig. 20).

Wollen wir hier R_{1-4} mittels Kräftezug bestimmen, so wird die Zeichnung insofern recht schwierig, als die Schnittpunkte der gegebenen Kräfte weit außerhalb des Zeichenblattes liegen. Wir helfen uns deshalb in anderer Weise:

Wir wissen aus § 6, daß die Wirkung *einer* Kraft sich darstellen läßt durch die Wirkung *zweier* Kräfte. Wenden wir dieses auf P_1 an, so können wir in einem beliebigen Punkte die Kraft ersetzen durch zwei Seitenkräfte I und II, deren Richtungen willkürlich zu wählen sind und deren Größen sich dann aus dem Kräftedreieck Fig. 20b ergeben. (Vgl. hierzu Fig. 15 namentlich auch hinsichtlich der eingezeichneten Pfeile.)

Ebenso ersetzen wir P_2 durch zwei Komponenten. Jetzt wählen wir aber die Richtungen der beiden Seitenkräfte nicht beliebig, sondern wir nehmen die eine Seitenkraft, II', so, daß sie

Digitized by Google

der Größe nach gleich der Seitenkraft *II* von P_1, in der Richtung aber entgegengesetzt *II* ist. Durch diese Annahme ist dann die zweite Seitenkraft von P_2, *III*, bereits nach Größe und Richtung bestimmt (s. Fig. 20c und vgl. Fig. 16). Den Punkt, in dem in Fig. 20a die Kraft P_2 zerlegt wird, nehmen wir jetzt auch nicht

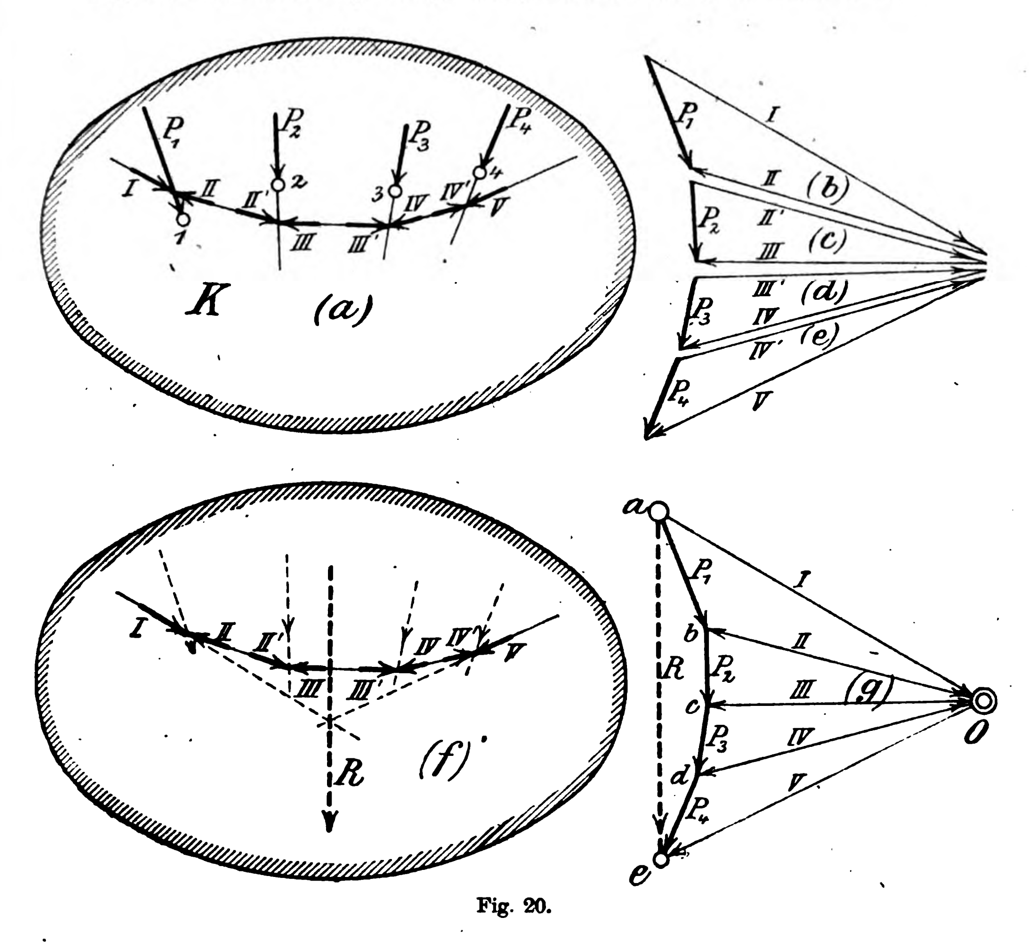


Fig. 20.

mehr beliebig, sondern wählen ihn so, daß er auf der Verlängerung von *II* liegt; mit anderen Worten: daß *II* und *II'* in einer Geraden liegen.

Wenn wir in derselben Weise jede folgende Kraft, z. B. P_3, so zerlegen, daß die erste Komponente dieser Kraft entgegengesetzt ist der zweiten Komponente der vorhergegangenen Kraft, und dann diese Seitenkräfte in Fig. 20a so einzeichnen, daß *II* und *II'*, *III* und *III'*, *IV* und *IV'* paarweis in einer Linie liegen,

Digitized by Google

so erhalten wir das in Fig. 20f dargestellte Kräftesystem als Ersatz der ursprünglich vorhandenen Kräfte P_1, P_2, P_3, P_4. Es sind jetzt also diese vier Kräfte ersetzt durch acht Kräfte. Von diesen sind aber bei den mittleren sechs je zwei, nämlich *II* und *II'*, *III* und *III'*, *IV* und *IV'*, gleichgroß, entgegengesetzt gerichtet und in einer Geraden liegend. Von diesen sechs Kräften *heben sich also je zwei und zwei gegenseitig auf*, und wir haben somit durch die geschickte Anordnung bei der Zerlegung erreicht, daß wir die vier Kräfte P_1, P_2, P_3, P_4 schließlich ersetzt haben durch die zwei Kräfte *I* und *V*. Diese beiden Kräfte bringen wir dann zum Schnitt und bestimmen hierdurch R_{1-4}.

Wenn wir nun noch den selbstverständlichen Schritt tun und die Figuren 20b, c, d, e zusammenschieben zu einer Figur (Fig. 20g), so erhalten wir das unter dem Namen **„Seilpolygon"** bekannte Verfahren zur Bestimmung der Ersatzkraft:

„Um von beliebig vielen Kräften P_1, P_2, P_3, ... P_n die Ersatzkraft R nach Größe, Richtung und Lage zu bestimmen, reihen wir von einem beliebigen Punkte a aus die Kräfte zu einem Kräftepolygon aneinander und bestimmen zunächst die Größe und Richtung der Ersatzkraft durch die Linie ae *von* dem Anfangspunkte der ersten Kraft *nach* dem Endpunkte der letzten Kraft. Um nun die Lage von R zu bestimmen, ziehen wir von dem beliebigen **„Pole"** O nach den Eckpunkten des Kräftepolygons die **„Polstrahlen"** *I*, *II*, *III* usw. und parallel hierzu die **„Seilstrahlen"** zwischen den einzelnen Kräften. Hierbei kann die Lage des Seilstrahles *I* in Fig. 20f beliebig gewählt werden. Durch den Schnittpunkt des ersten und des letzten Seilstrahles ist dann die Lage von R bestimmt."

Der Name „Seilpolygon" kommt daher, weil ein Seil, das mit den Kräften P_1, P_2, P_3 usw. belastet ist, so durchhängt, daß es die Form der Seilstrahlen annimmt.

Wenn man an einem Körper viele Kräfte zusammenzusetzen hat, kann es leicht vorkommen, daß man eine Kraft versehentlich überspringt oder einen Strahl an falscher Stelle zieht. Um solche Fehler zu vermeiden, merke man: Ist die Zahl der Kräfte n, so ist die Zahl der Pol- und der Seilstrahlen je $(n + 1)$. Ferner: Je drei Linien, die in Fig. 20g ein Dreieck bilden (z. B. *II*, *III* und P_2), schneiden sich in Fig. 20a in einem Punkte. Und namentlich: Ein Polstrahl, der in Fig. 20g nach dem Zusammenhangspunkt zweier Kräfte geht (z. B. Strahl *III* nach dem Schnitt-

Digitized by Google

punkte von P_2 und P_3), kommt als Seilstrahl in Fig. 20a zwischen diesen beiden Kräften zu liegen. (Diese Regel schützt vor dem Überspringen einer Kraft).

III. Methode: Analytisch.

Wir wollen jetzt die Resultierende (d. h. also ihre Größe, ihre Richtung und ihre Lage auf dem Körper) auf rechnerischem Wege ermitteln.

Wir beginnen

1. Rechnerische Bestimmung der Größe und Richtung von R.

Bei der I. Methode haben wir unter 2. gesehen, daß bei beliebig vielen, auf einem Körper zerstreut liegenden Kräften die Größe und die Richtung der Ersatzkraft genau dieselbe ist, als ob die Kräfte gemeinsam in einem Punkte zusammenlaufen würden. Für letzteren Fall haben wir aber bereits die betreffenden Formeln zur Bestimmung der Größe und Richtung von R entwickelt. Wir können also diese Formeln auch auf unseren Fall (d. h. wenn die Kräfte nicht in einem Punkte zusammenlaufen) anwenden. Wir werden demnach so vorgehen: Wir denken uns eine beliebige x-Richtung gezogen, bestimmen von jeder Kraft den (spitzen) Neigungswinkel α gegen diese Richtung und berechnen die Ausdrücke (§ 4, II. Methode)

$$(1) \qquad R_x = \pm P_1 \cdot \cos\alpha_1 \pm P_2 \cdot \cos\alpha_2 \pm P_3 \cdot \cos\alpha_3 \pm \ldots$$

$$(2) \qquad R_y = \pm P_1 \cdot \sin\alpha_1 \pm P_2 \cdot \sin\alpha_2 \pm P_3 \cdot \sin\alpha_3 \pm \ldots$$

[Betreffs der Vorzeichen betrachten wir die Kräfte von der x-Achse aus und geben dann bei R_x den nach rechts und nach links, und bei R_y den nach oben und nach unten zeigenden Kräften *verschiedene* Vorzeichen. Gewöhnlich nehmen wir die x-Richtung horizontal; nötig ist dieses natürlich nicht. (Man kann ja jede Richtung durch Drehung des Zeichenblattes zur Horizontalen machen)].

Diese Summenausdrücke R_x und R_y stellen dann die Projektionen der Resultierenden R auf die x- und die senkrecht dazu stehende y-Richtung dar. Aus ihren Projektionen ergibt sich hieraus R selber nach Größe und Richtung

$$(\mathrm{I}) \qquad R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}\,,$$

$$(\mathrm{II}) \quad \sin\alpha_R = \frac{R_y}{R}\,; \quad \text{oder} \quad \cos\alpha_R = \frac{R_x}{R}\,; \quad \operatorname{tg}\alpha_R = \frac{R_y}{R_x}\,; \quad \operatorname{ctg}\alpha_R = \frac{R_x}{R_y}$$

Digitized by Google

2. *Rechnerische Bestimmung der Lage von R.*

a) Geometrischer Hilfssatz.

Zur Bestimmung der Lage von R wollen wir einen geometrischen Satz verwenden, der zunächst abgeleitet werden möge. Diesen Satz verstehen wir auf folgende Weise:

Wir zeichnen ein Parallelogramm $ABCD$ (Fig. 21 oder 22). Die Längen der von einem Eckpunkte A ausgehenden Seiten bzw. Diagonalen seien $AB = a$, $AC = b$, $AD = d$. Hierauf nehmen wir einen Punkt E an und fällen von diesem aus auf a, b und d die Lote p_1, p_2 und r. Dann wird behauptet, daß das Produkt aus d mal r gleich der Summe bzw. Differenz der Produkte aus a mal p_1 und b mal p_2 ist. In Formeln: Es ist

$$\text{(I)} \qquad d \cdot r = a \cdot p_1 + b \cdot p_2 \, ,$$

bzw.

$$\text{(II)} \qquad d \cdot r = a \cdot p_1 - b \cdot p_2 \qquad \text{oder} \qquad d \cdot r = b \cdot p_2 - a \cdot p_1 \, .$$

(Welcher von diesen drei Fällen eintritt, hängt von der Lage des Punktes E ab; s. später.)

Beweis. Bei einem praktischen Mathematikunterricht wird man einen solchen Satz folgendermaßen beweisen: Man zeichnet das Parallelogramm maßstäblich auf, nimmt Punkt E, fällt die Lote, rechnet die Produkte $d \cdot r$, $a \cdot p_1$ und $b \cdot p_2$ und sieht nun nach, ob eine der obigen Gleichungen tatsächlich erfüllt ist. Auf diese Weise — aber auch nur auf diese Weise! — kann man derartige Sätze wirklich in sich aufnehmen.

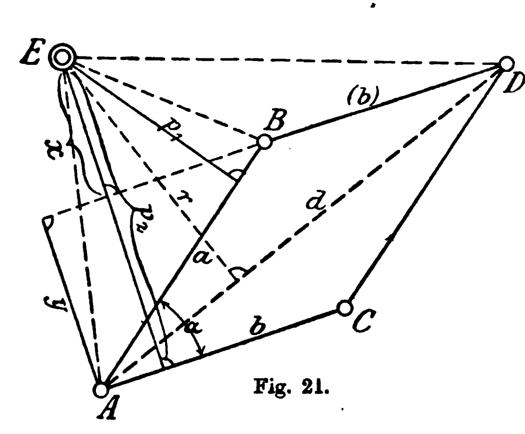


Fig. 21.

Deshalb zeichne auch der Leser unbedingt die Figur für verschiedene Lagen des Punktes E auf und finde dadurch von selber, wann $d \cdot r$ gleich der Summe, und wann es gleich der Differenz der beiden Glieder $a \cdot p_1$ und $b \cdot p_2$ ist. Folgendes wird sich zeigen: Liegt der Punkt E außerhalb des Winkels α, den die Seiten a und b, bzw. deren Verlängerungen, miteinander einschließen, so ist $d \cdot r$ gleich der Summe (Fig. 21). Liegt jedoch Punkt E innerhalb des Winkels zwischen a und b, bzw. deren Verlängerungen, so ist $d \cdot r$

Digitized by Google

gleich der Differenz aus dem größeren weniger dem kleineren der beiden Produkte (Fig. 22). Noch einfacher und systematischer merkt man sich diesen Unterschied in einer anderen Weise, die namentlich auch für die folgenden Untersuchungen recht bequem ist:

Wir zeichnen auf den Strecken a, b und d Pfeile ein, die von A nach B, bzw. nach C und D gerichtet sind (Fig. 22). Je nachdem dann der Pfeil einer Strecke *rechts*herum oder *links*herum um den Punkt E zeigt, bekommt das betreffende Produkt aus dieser Strecke mal dem Lote verschiedene Vorzeichen. Und zwar gibt man gewöhnlich der Richtung „*rechtsherum*" das *positive* und der Richtung „*linksherum*" das *negative* Vorzeichen. Hiernach würde also in Fig. 21 sein:

$$-d \cdot r = -a \cdot p_1 - b \cdot p_2 \quad \text{d. h.:} \quad d \cdot r = a \cdot p_1 + b \cdot p_2 ;$$

und in Fig. 22:

$$+d \cdot r = +a \cdot p_1 - b \cdot p_2 .$$

(Man probiere diese Regel an mehreren, maßstäblich zu zeichnenden Figuren aus! Und namentlich überzeuge man sich, daß man natürlich die Vorzeichen auch umgekehrt festsetzen könnte und trotzdem die gleichen Endresultate erhält!)

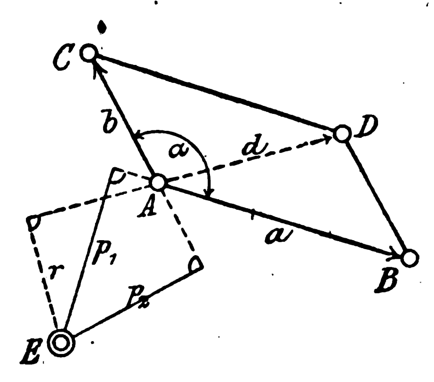


Fig. 22.

Nachdem der Satz durch Probieren hoffentlich zum Verständnis gekommen ist, soll auch das Studieren zu seinem Rechte kommen. Wir wollen ihn also auch noch mathematisch beweisen; der Einfachheit wegen aber nur für den Fall Fig. 21. Dieser Beweis lautet:

Das Produkt $d \cdot r$ läßt sich nach Fig. 21 darstellen durch den doppelten Inhalt des Dreiecks AED; also

$$d \cdot r = 2 \cdot \triangle AED .$$

Nun ist

$$\triangle AED = \triangle AEB + \triangle BED + \triangle ABD .$$

Die Inhalte der drei Dreiecke auf der rechten Seite lassen sich aber sehr leicht angeben:

Digitized by Google

Es ist nämlich $$\triangle AEB = \frac{a \cdot p_1}{2},$$

$$\triangle BED = \frac{b \cdot x}{2},$$

$$\triangle ABD = \frac{b \cdot y}{2}.$$

Also

$$\triangle AED = \frac{a \cdot p_1}{2} + \frac{b \cdot x}{2} + \frac{b \cdot y}{2}$$

$$= \frac{a \cdot p_1}{2} + \frac{b(x+y)}{2}$$

$$= \frac{a \cdot p_1}{2} + \frac{b \cdot p_2}{2}.$$

Nun war $\triangle AED = \frac{d \cdot r}{2}$; also ist

$$\frac{d \cdot r}{2} = \frac{a \cdot p_1}{2} + \frac{b \cdot p_2}{2},$$

$$d \cdot r = a \cdot p_1 + b \cdot p_2 \quad \text{(w. z. b. w.)}.$$

b) Verwendung des Satzes in der Mechanik.

Die Anwendung des soeben abgeleiteten geometrischen Satzes auf die Mechanik ist naheliegend. Aus allen bisherigen Untersuchungen ist hervorgegangen, daß das Prinzip vom Parallelogramm der Kräfte die Grundlage bildet für alle Aufgaben, bei denen es sich um den Ersats eines Kräftesystems durch eine Einzelkraft (oder umgekehrt) handelt. Zunächst werden wir also den Satz auf das Parallelogramm der Kräfte anwenden. In Fig. 23 sind die beiden Kräfte P_1 und P_2 geometrisch dargestellt. Wir wissen, daß dann ihre Ersatzkraft durch die Diagonale R bestimmt ist. Wenden wir jetzt auf dieses Parallelogramm den soeben abgeleiteten Satz an, indem

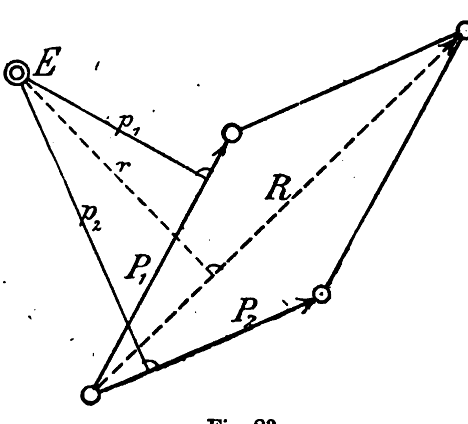


Fig. 23.

Digitized by Google

wir von einem beliebigen Punkte E die Lote r, p_1, p_2 ziehen, so erhalten wir

$$-R \cdot r = -P_1 \cdot p_1 - P_2 \cdot p_2 ;$$

hieraus

$$+R \cdot r = +P_1 \cdot p_1 + P_2 \cdot p_2 ;$$

d. h. *das Produkt aus der Ersatzkraft mal ihrem Abstande von E ist gleich der Summe der Produkte der beiden Kräfte mal ihren Abständen.* Da dieses Produkt aus einer Kraft mal der Entfernung von einem Punkt in der Mechanik oft vorkommt, hat man einen besonderen Namen dafür eingeführt; man nennt es das „statische Moment" der betreffenden Kraft in bezug auf den Punkt. Der soeben abgeleitete Satz läßt sich also ausdrücken:

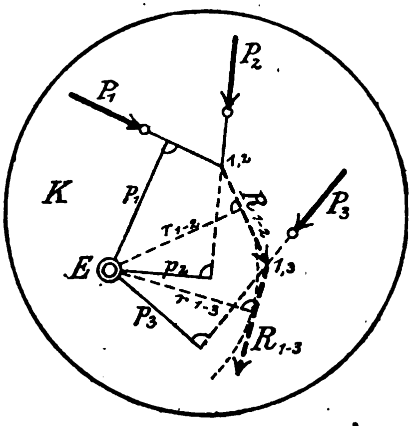


Fig. 24.

Das statische Moment der Ersatzkraft R ist gleich der Summe (bzw. Differenz) der statischen Momente der beiden ursprünglichen Kräfte.

Wir müssen aber noch untersuchen, ob dieser Satz auch dann gültig ist, wenn wir mehr als zwei Kräfte haben, die außerdem an verschiedenen Punkten angreifen. Um dieses festzustellen, ist in Fig. 24 mittels Kräftezug (das Kräftepolygon ist fortgelassen) die Ersatzkraft von P_1, P_2, P_3 bestimmt. Nun können wir zunächst den Satz anwenden auf Punkt *1,2*, in dem P_1 und P_2 sich schneiden:

$$R_{1-2} \cdot r_{1-2} = P_1 \cdot p_1 + P_2 \cdot p_2 ;$$

ferner auf Punkt *1,3:*

$$R_{1-3} \cdot r_{1-3} = R_{1-2} \cdot r_{1-2} + P_3 \cdot p_3 ,$$

da am Punkte *1,3* die beiden Kräfte R_{1-2} und P_3 angreifen. Hiermit ergibt sich auch für mehrere Kräfte:

$$R_{1-3} \cdot r_{1-3} = P_1 \cdot p_1 + P_2 \cdot p_2 + P_3 \cdot p_3 .$$

Wie aber aus der Ableitung von dem geometrischen Satze her folgt, müssen in der obigen Gleichung die Produkte verschiedene Vorzeichen bekommen, je nachdem die Pfeilrichtungen rechts- oder linksherum um den Punkt E zeigen. In Fig. 24 sind der Bequemlichkeit wegen die Kräfte so angenommen, daß sie alle rechts-

Digitized by Google

herum zeigen. Allgemein muß man aber bei einer beliebigen Kräftegruppe die Gleichung so schreiben:

$$\text{(I)} \qquad R \cdot r = \pm P_1 \cdot p_1 \pm P_2 \cdot p_2 \pm P_3 \cdot p_3 \pm \ldots$$

In Worten: „Hat man eine beliebige Gruppe von Kräften, deren Ersatzkraft gleich R sei, und fällt von einem beliebigen Punkte E auf diese Kräfte die Lote, so ist das Produkt aus Ersatzkraft mal zugehörigem Lot gleich der Summe, bzw. Differenz, der Produkte aus den gegebenen Kräften mal ihren Loten.“ Kürzer kann man sagen:

Das statische Moment der Resultierenden ist gleich der Summe, bzw. Differenz, der statischen Momente der einzelnen Kräfte.

Der Punkt E möge **„Bezugspunkt“** heißen. Dieses ist der **„Satz vom statischen Moment der Kräfte“.** Bei seiner Anwendung wollen wir uns erinnern, daß er nichts weiter ist als die Übertragung eines, für jedes beliebige Parallelogramm geltenden, Mathematik-Satzes auf das Parallelogramm der Kräfte.

c) Nach diesen Vorbereitungen gehen wir zur analytischen Bestimmung der Lage von R. (Größe von R und Neigungswinkel α_R sind schon früher bestimmt, mittels R_x und R_y.) Wir brauchen nur die obige Gleichung (I) aufzulösen und erhalten den Abstand r der Resultierenden vom Punkte E:

$$r = \frac{\pm P_1 \cdot p_1 \pm P_2 \cdot p_2 \pm P_3 \cdot p_3 \pm \ldots}{R}.$$

Wenn r ausgerechnet ist, schlagen wir um E mit r den Kreis und zeichnen unter dem bereits früher berechneten Neigungswinkel α_R die Tangente an den Kreis. Diese ist dann die Resultierende. Hat sich für den Ausdruck $\pm P_1 \cdot p_1 \pm P_2 \cdot p_2 \pm P_3 \cdot p_3 \pm \ldots$ ein positiver Wert ergeben, so ist die Tangente so an den Kreis zu legen, daß R „rechtsherum“ um den Punkt E zeigt; und umgekehrt. Somit ist also die Lage von R vollständig bestimmt.

Zusammenfassung von § 9.

Die Aufgabe dieses Paragraphen lautete: Wie können wir beliebig viele, auf einem Körper zerstreut liegende Kräfte ersetzen durch eine einzige Kraft? Hierzu drei Lösungen:

I. Methode (Kräftezug): Größe und Richtung von R mittels Kräftepolygon. Die Lage von R auf dem Körper mittels Kräftezug.

II. Methode (Seilpolygon): Größe und Richtung von R mittels Kräftepolygon. Die Lage von R mittels Seilpolygon.

III. Methode (Analytisch): Größe und Richtung von R mittels R_x und R_y. Die Lage mittels des Satzes vom statischen Moment der Kräfte.

Digitized by Google

Alles dieses ist unter der Voraussetzung abgeleitet, daß es bei der betreffenden statischen Untersuchung zulässig ist, den Angriffspunkt einer Kraft innerhalb deren Wirkungslinie beliebig zu verschieben. Sonst darf man überhaupt keine Resultierende einführen, sondern muß mit jeder Kraft einzeln rechnen. Die schöne, durch Einführung von R erzielte Vereinfachung der Rechnung fällt dann also fort.

§ 10.

Ergänzungen und Beispiele zu § 9.

Erste Aufgabe.

Auf eine Stützmauer $ABCD$ wirke der horizontal angenommene Erddruck E_1 (infolge des Gewichts der Hinterfüllungserde), *der Erddruck* E_2 (infolge der Auflast hinter der Mauer), *ferner die Last* P (Auflast auf der Mauer selber) *und das Eigengewicht* G. *Die Ersatzkraft von diesen vier Kräften ist zu bestimmen!* (Fig. 25 und 26.)

In Zahlen sei:

$E_1 = 12{,}0\,\mathrm{t}$; $E_2 = 3{,}0\,\mathrm{t}$; $P = 8{,}5\,\mathrm{t}$; $G = 26{,}0\,\mathrm{t}$.
$e_1 = 2{,}3\,\mathrm{m}$; $e_2 = 3{,}4\,\mathrm{m}$; $p = 2{,}5\,\mathrm{m}$; $g = 2{,}0\,\mathrm{m}$. (Fig. 26.)

I. Bestimmung von R mittels Kräftezug. (Fig. 25.)

Wir reihen von einem beliebigen Punkte a aus die vier Kräfte aneinander. Nun denken wir uns P und E_2 nach ihrem Schnittpunkt *1,2* verlegt und ersetzen sie hier durch ihre Ersatzkraft ac. Diese bringen wir mit E_1 zum Schnitt im Punkte *1,3* und ziehen durch *1,3* die Parallele zu ad. Diese Parallele schneidet die letzte Kraft, G, im Punkte *1,4*. Durch *1,4* ziehen wir dann die Ersatzkraft R von allen vier Kräften.

Der Sinn dieser Untersuchung ist also folgender: Wenn wir den Körper $ABCD$ als Ganzes betrachten (ohne auf die inneren Spannungen zu achten), so verhält er sich unter dem Einfluß der angreifenden vier Kräfte geradeso, als ob nur die eine Kraft R in der gezeichneten Größe, Richtung und Lage auf ihn einwirken würde. Unterstützt ist der Körper auf der Fläche AD. Damit er nun im Gleichgewicht bleibt, müssen die Unterstützungskräfte ihrerseits sich zu einer Ersatzkraft R' zusammenfassen lassen, die gerade entgegengesetzt R ist. Aus dieser Bedingung werden wir dann später den Druck auf den Erdboden und die sogenannten Kantenpressungen bestimmen.

Digitized by Google

II. Bestimmung von R mittels Seilpolygon. (Fig. 26.)

Wir reihen zunächst vom Punkte a aus die Kräfte aneinander. Die Reihenfolge ist beliebig, doch macht man sie natürlich so, daß die Zeichnung möglichst übersichtlich wird. Die Strecke ae gibt dann Größe und Richtung von R an. Um noch die Lage zu finden, ziehen wir vom beliebigen „Pole" O die Polstrahlen I, II, III, IV, V und zeichnen parallel dazu (in Fig. 26a) die Seilstrahlen I, II, III, IV, V. Durch den Schnittpunkt des ersten

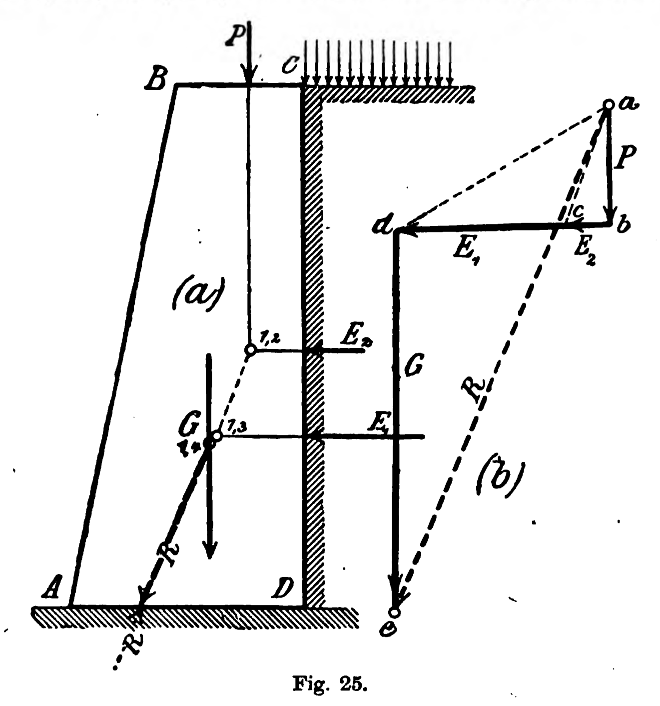


Fig. 25.

und des letzten Strahles (Strahl I und Strahl V) ziehen wir dann die Parallele zu der Seite R in Fig. 26b. Somit ist die Resultierende nach Größe, Richtung und Lage bestimmt.

III. Analytische Bestimmung von R. (Fig. 26.)

Wir wollen bei diesem Beispiel für die x-Achse die Richtung nach links und für die y-Achse die Richtung nach unten positiv nehmen. Also umgekehrt wie gewöhnlich. Dann werden nämlich die Ausdrücke R_x und R_y am einfachsten, weil alle Zahlen mit positivem Zeichen erscheinen.

Beim Aufstellen des Wertes R_x wollen wir beachten, daß die horizontalen Kräfte in natürlicher Größe und die vertikalen gleich

Digitized by Google

Null einzusetzen sind; bei R_y ist es umgekehrt (vgl. drittes Beispiel in § 4a). Somit wird:

$$(1) \qquad R_x = E_1 + E_2 = 12{,}0 + 3{,}0 = 15{,}0\,,$$

$$(2) \qquad R_y = P + G = 8{,}5 + 26{,}0 = 34{,}5\,;$$

$$(\mathrm{I}) \qquad R = \sqrt{15{,}0^2 + 34{,}5^2} = \sqrt{225 + 1190} = 37{,}6\ \mathrm{t}\,,$$

$$(\mathrm{II}) \qquad \operatorname{tg}\alpha_R = \frac{34{,}5}{15{,}0} = 2{,}3\,; \qquad \alpha_R = 66^0\,30'.$$

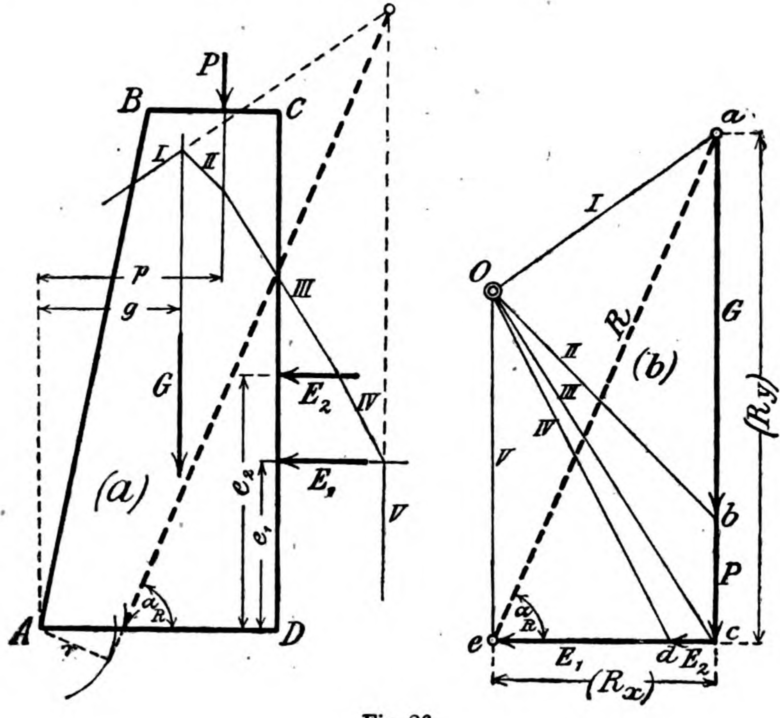


Fig. 26.

R geht nach links unten, da R_x sowohl als R_y sich positiv ergeben haben. Für die statischen Momente nehmen wir „rechtsherum“ als positiv und erhalten, wenn wir Punkt A als Bezugspunkt nehmen:

$$(\mathrm{III}) \qquad \begin{cases} r = \dfrac{+G\cdot g + P\cdot p - E_1\cdot e_1 - E_2\cdot e_2}{R} \\[2ex] \quad = \dfrac{+26{,}0\cdot 2{,}0 + 8{,}5\cdot 2{,}5 - 12{,}0\cdot 2{,}3 - 3{,}0\cdot 3{,}4}{37{,}6} \\[2ex] \quad = \dfrac{+35{,}5}{37{,}6} \\[1ex] r = 0{,}95\ \mathrm{m}. \end{cases}$$

Digitized by Google

Da der Zähler des Bruches (d. i. die Summe $\pm P_1 \cdot p_1 \pm P_2 \cdot p_2$ usw.) positiv herausgekommen ist, muß R rechtsherum um A zeigen. R ist also mit der Pfeilspitze nach linksunten, im Abstande $r = 0{,}95$ m vom Punkt A, so einzuzeichnen, wie in Fig. 26 geschehen.

Zweite Aufgabe.

Man nehme in Fig. 25, 26:

$$E_1 = 15{,}0 \text{ t}; \quad E_2 = 3{,}5 \text{ t}; \quad P = 10{,}0 \text{ t}; \quad G = 30{,}0 \text{ t},$$
$$e_1 = 2{,}7 \text{ m}; \quad e_2 = 4{,}0 \text{ m}; \quad p = 3{,}0 \text{ m}; \quad g = 2{,}2 \text{ m}$$

und bestimme Größe, Richtung und Lage von R nach allen drei Methoden.

Dritte Aufgabe.

Auf die in Fig. 27 gezeichnete Stütze wirken folgende Kräfte ein: Der vertikale Auflagerdruck P_1 des Binders, die Horizontalkraft H infolge Winddruck; der Auflagerdruck P_2 eines Kranträgers; die Kräfte O, D, U, die von den Stäben eines angeschlossenen Konsoldaches ausgeübt werden, und das Eigengewicht G. Gesucht ist R. (Die Resultierende wird gebraucht zur Berechnung der Fußplatte, Anker usw.)

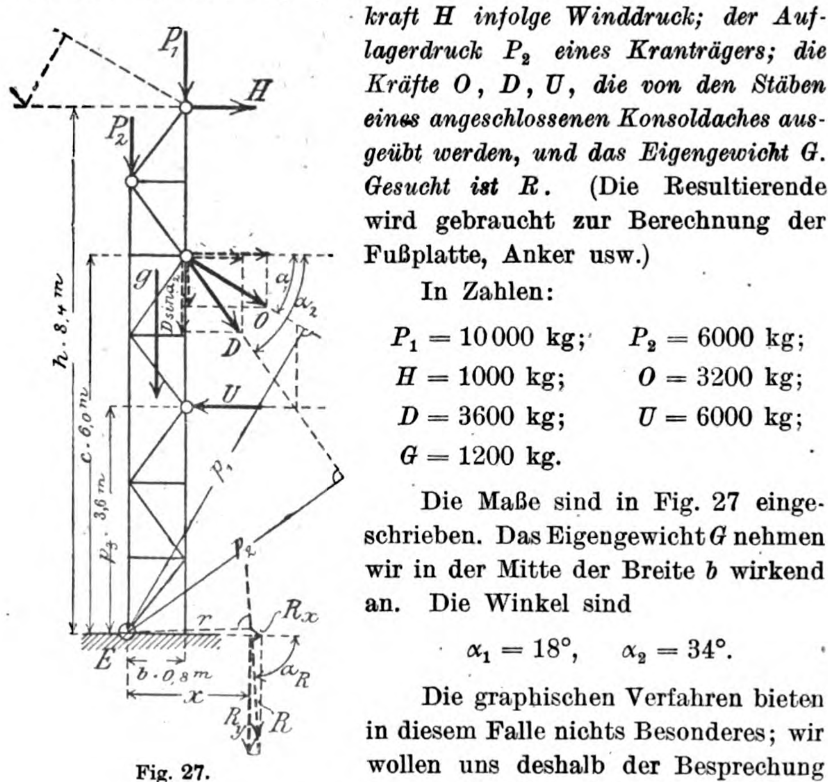


Fig. 27.

In Zahlen:

$$P_1 = 10\,000 \text{ kg}; \quad P_2 = 6000 \text{ kg};$$
$$H = 1000 \text{ kg}; \quad O = 3200 \text{ kg};$$
$$D = 3600 \text{ kg}; \quad U = 6000 \text{ kg};$$
$$G = 1200 \text{ kg}.$$

Die Maße sind in Fig. 27 eingeschrieben. Das Eigengewicht G nehmen wir in der Mitte der Breite b wirkend an. Die Winkel sind

$$\alpha_1 = 18°, \quad \alpha_2 = 34°.$$

Die graphischen Verfahren bieten in diesem Falle nichts Besonderes; wir wollen uns deshalb der Besprechung der analytischen Methode zuwenden:

Wenn bei einer derartigen Berechnung *schräge* Kräfte vorkommen (wie O und D in Fig. 27), empfiehlt es sich stets, diese Kräfte in ihre horizontalen und vertikalen Seitenkräfte zu zerlegen

Digitized by Google

(§ 6). Sonst müssen wir nämlich beim Aufstellen der Momente die Lote p_1 und p_2 abgreifen oder ausrechnen. Statt dessen ist es bequemer, von vornherein dafür zu sorgen, daß nur horizontale und vertikale Kräfte in der Rechnung auftreten. Ferner wollen wir folgendes machen: Bei der Berechnung der Fundamentplatte usw. kommt es vor allen Dingen darauf an, an welcher Stelle die Resultierende R die Platte, bzw. deren Verlängerung, schneidet. Also auf den horizontalen Abstand x des Durchgangspunktes. Um x zu finden, zerlegen wir an dieser Stelle R in seine Seitenkräfte R_x und R_y und haben nach dem Satze vom statischen Moment

$$R \cdot r = R_y \cdot x + R_x \cdot O\,;$$

d. h.

$$R \cdot r = R_y \cdot x\,.$$

Hieraus

$$x = \frac{R \cdot r}{R_y} = \frac{+P_1 \cdot b + H \cdot h + P_2 \cdot O + \ldots}{R_y}\,.$$

Die ganze Rechnung würde sich also so gestalten:

Die Zerlegung der schrägen Kräfte O und D ergibt die

Horizontalkomponenten	Vertikalkomponenten
$O \cdot \cos\alpha_1 = 3200 \cdot \cos 18° = 3030$ kg.	$O \cdot \sin\alpha_1 = 3200 \cdot \sin 18° = 1000$ kg.
$D \cdot \cos\alpha_2 = 3600 \cdot \cos 34° = 2970$ „	$D \cdot \sin\alpha_2 = 3600 \cdot \sin 34° = 2000$ „

Somit wird von der Resultierenden die

Horizontalprojektion	Vertikalprojektion
$R_x = +1000$ kg,	$R_y = +10\,000$ kg,
$+3030$ „	$+\ 6\,000$ „
$+2970$ „	$+\ 1\,000$ „
-6000 „	$+\ 2\,000$ „
$R_x = +1000$ kg,	$+\ 1\,200$ „
	$R_y = +20\,200$ kg,

der Neigungswinkel gegen die Horizontale

$$\operatorname{tg}\alpha_R = \frac{20\,200}{1000} = 20{,}2\,; \qquad \alpha_R = 87° 10'\,;$$

und der Abstand des Durchgangspunktes

$$x = \frac{(10\,000 + 1000 + 2000)\,0{,}8 + (2970 + 3030)\,6{,}0 + 1000 \cdot 8{,}4 - 6000 \cdot 3{,}6 + 1200 \cdot 0{,}4}{20\,200}$$

$$= \frac{+\,33\,700}{20\,200}\,,$$

$$x = 1{,}67 \text{ m.}$$

(Die Resultierende selbst brauchen wir garnicht zu bestimmen.) Aus dieser Aufgabe wollen wir uns also folgenden praktischen **Rechnungsgang** für alle derartige Fälle merken:

Digitized by Google

Zunächst zerlegen wir alle Kräfte so, daß wir es nur mit horizontalen und nur mit vertikalen Kräften zu tun haben. Dann ist die Horizontalprojektion R_x gleich der Summe aller horizontalen Kräfte, Vertikalprojektion R_y „ „ „ „ vertikalen „ (s. hierzu auch Fig. 26), *und der horizontale Abstand x des Durchgangspunktes der Resultierenden von einem Punkte E gleich der Summe der statischen Momente in bezug auf E, dividiert durch die Vertikalprojektion R_y.*

In Formeln:

$P_1 \cdot \cos\alpha_1 = \ldots$	$P_1 \cdot \sin\alpha_1 = \ldots$	$x = \frac{\Sigma M_E}{R_y}$, bzw. $y = \frac{\Sigma M_E}{R_x}$;
$P_2 \cdot \cos\alpha_2 = \ldots$	$P_2 \cdot \sin\alpha_2 = \ldots$	$\left[r = \frac{\Sigma M_E}{R}\right]$.
$\vdots$	$\vdots$	
$R_x = \ldots$	$R_y = \ldots$	

Die Abstände x, bzw. y gehen von E aus horizontal, bzw. vertikal bis zur Resultierenden. [r steht rechtwinklig zur Resultierenden.]

Die Seitenkräfte $P_1 \cos\alpha_1$ usw. kann man auch direkt in die Skizze einschreiben.

Vierte Aufgabe.

Auf den in Fig. 43 (S. 84) gezeichneten Dachbinder wirken folgende Windkräfte (mit ihren Neigungswinkeln α) *ein:*

$W_1 = 1556$ kg; $W_2 = 360$ kg; $W_3 = 625$ kg; $W_4 = 143$ kg,
$\alpha_1 = 45°$; $\alpha_2 = 77°$; $\alpha_3 = 0°$; $\alpha_4 = 77°$.

Die Resultierende soll bestimmt werden! [Die in Fig. 43 außerdem bei A und B eingezeichneten Kräfte gehen uns jetzt nichts an.]

Wir wollen dieses Beispiel so vorführen, wie man zweckmäßig die Sache für die Praxis durchrechnet. Man würde schreiben:

„Die Zerlegung der Kräfte in Horizontal- und in Vertikalkomponenten ergibt:

Horizontalkomponenten	Vertikalkomponenten
$+1556 \cdot \cos 45° = +1100$ kg,	$+1556 \cdot \sin 45° = +1100$ kg,
$+\ 360 \cdot \cos 77° = +\ 80$ „	$+\ 360 \cdot \sin 77° = +\ 350$ „
$+\ 625 \cdot \cos\ 0° = +\ 625$ „	$+\ 625 \cdot \sin\ 0° = 0$ „
$+\ 143 \cdot \cos 77° = +\ 30$ „	$+\ 143 \cdot \sin 77° = +\ 140$ „
Horizontalprojektion $R_x = +1835$ kg der Resultierenden.	Vertikalprojektion $R_y = +1590$ kg der Resultierenden.

I. Größe von R:

$$R = \sqrt{1835^2 + 1590^2} = 2430 \text{ kg}.$$

II. Neigungswinkel von R:

$$\operatorname{tg}\alpha_R = \frac{1590}{1835} = 0{,}87\,; \qquad \alpha_R = 41°$$

gegen die Horizontale.

Digitized by Google

III. Abstand des Durchgangspunktes von R (durch die Linie AB) bis zum Punkte A:

$$x = [(+1100 \cdot 1{,}25 + 80 \cdot 2{,}79 + 625 \cdot 3{,}57 + 30 \cdot 4{,}18) + (1100 \cdot 1{,}25 + 350 \cdot 3{,}75 + 140 \cdot 5{,}50)] \frac{1}{1590}$$
$$= 4{,}65 \text{ m.}$$

Nach diesen drei Angaben zeichne man R in Fig. 43 ein!

Ferner bestimme man den Durchgangspunkt von R mit der durch den Punkt A gezogenen *Vertikalen*. (Dann tritt beim Aufstellen der Momente in den Nenner statt R_y die Projektion R_x.)

Fünfte Aufgabe.

Bei der in Fig. 28 gezeichneten, dreieckförmigen Kräftegruppe $P_1, \ldots, P_n$ soll die Resultierende bestimmt werden.

Wir haben es hier (Fig. 28a) mit einer Gruppe *paralleler* Kräfte zu tun, die die besondere Eigenschaft haben, daß sie in

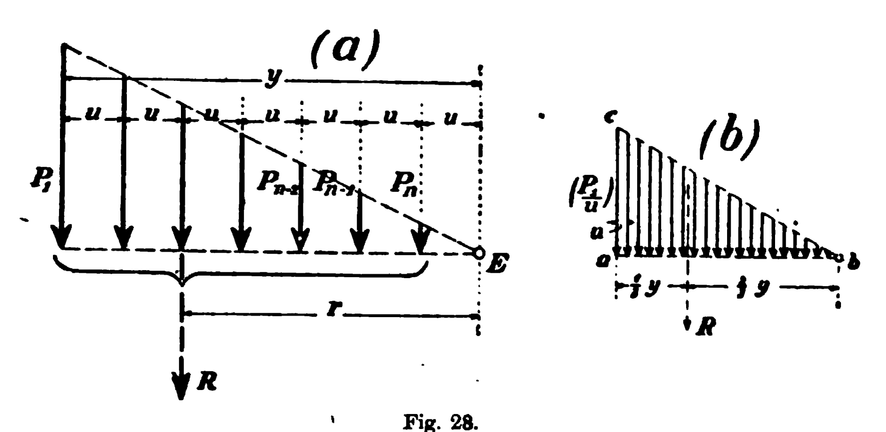


Fig. 28.

gleichen Abständen u voneinander stehen, und daß ferner jede Kraft um das gleiche Stück kleiner als die vorhergehende ist. Verbindet man die Endpunkte dieser Kräfte, so bekommt man eine dreieckförmige Figur; man nennt deshalb eine solche Kräftegruppe eine „*dreieckförmige*" Belastung. Wir werden später öfters mit solchen „dreieckförmigen" Kräftegruppen zu tun haben, so daß es gut ist, ein für allemal ihre Resultierende zu bestimmen.

Im ganzen mögen n Kräfte sein (als Beispiel nehme man $n = 7$). Dann haben wir also auch n solcher Abstände u, so daß die ganze Länge

$$y = n \cdot u$$

Digitized by Google

ist. Zwischen den Kräften lassen sich folgende Beziehungen ableiten. Es verhält sich

$$\frac{P_n}{P_1} = \frac{u}{y} = \frac{u}{n \cdot u} = \frac{1}{n} .$$

Folglich ist

$$P_n = \frac{1}{n} P_1 .$$

Ferner sieht man aus der Figur, daß

$$P_{n-1} = 2 P_n$$

ist, und hieraus folgt

$$P_{n-1} = 2 P_n = \frac{2}{n} P_1 ;$$

entsprechend

$$P_{n-2} = 3 P_n = \frac{3}{n} P_1 ; \quad \text{usw.}$$

Nach dieser Vorbereitung gehen wir dazu über, *Größe*, *Richtung* und *Lage* der Resultierenden zu bestimmen.

1. *Die Größe der Resultierenden bei parallelen Kräften ist gleich der Summe der Kräfte.* Dieses ergibt sich direkt daraus, daß bei parallelen Kräften das Kräftepolygon eine gerade Linie ist, gleich der Summe aller Kräfte. (Natürlich folgt diese Eigenschaft auch aus der analytischen Methode.) Wir erhalten also für unsere Kräftegruppe:

$$R = P_n + P_{n-1} + P_{n-2} + \ldots P_1 .$$

Dieser Ausdruck läßt sich aber noch weiter vereinfachen. Zunächst setzen wir die vorhin für P_n, P_{n-1} usw. aufgestellten Ausdrücke ein, und erhalten

$$R = \frac{1}{n} P_1 + \frac{2}{n} P_1 + \frac{3}{n} P_1 + \ldots P_1$$

$$= \frac{1}{n} P_1 + \frac{2}{n} P_1 + \frac{3}{n} P_1 + \ldots \frac{n}{n} P_1$$

$$R = \frac{P_1}{n} (1 + 2 + 3 + \ldots n) .$$

In der Klammer steht die Summe aller Zahlen von 1 bis n. Es wird wohl noch aus der Mathematik bekannt sein, daß man für derartige „Reihen" Formeln aufstellen kann, die dann direkt die Summe der Reihe angeben. Für die obige Zahlenreihe z. B. gilt die Formel: Es ist

$$1 + 2 + 3 + n = \frac{n(n+1)}{2} .$$

Digitized by Google

Wie groß also auch n sei, man kann die Summe der Zahlen 1 bis n sofort ausrechnen (z. B. $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7$ ist gleich $\frac{7 \cdot 8}{2} = 28$). Mit dieser Vereinfachung bekommen wir unseren Ausdruck für R:

$$R = \frac{P_1}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2},$$

$$\text{(I)} \qquad R = P_1 \cdot \frac{n+1}{2}.$$

Wenn also die erste Kraft, P_1, und die Anzahl n der Kräfte einer solchen „dreieckförmigen" Kräftegruppe gegeben ist, können wir mit Hilfe der Formel (I) sofort die Resultierende (d. h. die Summe aller Kräfte) angeben. Es ist klar, daß diese Formel die Rechnung oft sehr erleichtern wird.

2. Die **Richtung** von R ist natürlich parallel den sämtlichen anderen Kräften.

3. Die **Lage** von R.

Als Bezugspunkt für die statischen Momente wollen wir die Spitze des Dreiecks nehmen. Dann wird

$$R \cdot r = P_n \cdot u + P_{n-1} \cdot 2u + P_{n-2} \cdot 3u + \ldots P_1 \cdot n u$$
$$= u(1 \cdot P_n + 2 \cdot P_{n-1} + 3 \cdot P_{n-2} + \ldots n \cdot P_1).$$

Nun führen wir für P_n, P_{n-1}, P_{n-2} usw. wieder die zu Anfang aufgestellten Ausdrücke ein:

$$P_n = \frac{1}{n} P_1; \qquad P_{n-1} = \frac{2}{n} P_1; \qquad P_{n-2} = \frac{3}{n} P_1; \qquad \text{usw.,}$$

und erhalten

$$R \cdot r = u\left(1 \cdot \frac{1}{n} P_1 + 2 \cdot \frac{2}{n} P_1 + 3 \cdot \frac{3}{n} P_1 + \ldots n \cdot \frac{n}{n} P_1\right)$$
$$= u \frac{P_1}{n} (1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots n^2).$$

Nun sind wir wieder auf eine solche Reihe von Zahlen gekommen. Auch für diese Summe kann man eine kurze Formel aufstellen. Es ist nämlich

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Mit der — übrigens ganz elementaren — Ableitung dieser Formel wollen wir hier keine Zeit verlieren. Man kann ihre Richtigkeit ja auch leicht ausprobieren (z. B. $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2$

Digitized by Google

muß gleich sein $\frac{1}{6} \cdot 7 \cdot 8 \cdot 15 = 140$). Wir setzen nun diese Abkürzung in die obige Gleichung ein und erhalten:

$$R \cdot r = u \cdot \frac{P_1}{n} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$= \frac{P_1 \cdot u(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Hieraus ergibt sich dann der gesuchte Abstand

$$r = \frac{P_1 \cdot u(n+1)(2n+1)}{6 \cdot R}.$$

Für R setzen wir noch den bereits aufgestellten Wert

$$R = P_1 \frac{n+1}{2}$$

ein und erhalten

$$r = \frac{P_1 \cdot u(n+1)(2n+1) \cdot 2}{6 \cdot P_1(n+1)}.$$

Hieraus folgt

$$r = \frac{u(2n+1)}{3}$$

$$= \tfrac{2}{3} n \cdot u + \tfrac{1}{3} u.$$

Nun stellt aber $n \cdot u$ die Länge y dar (Fig. 28). Wir können also den Ausdruck für r auch so schreiben:

$$\text{(II)} \qquad r = \tfrac{2}{3} y + \tfrac{1}{3} u.$$

Somit haben wir durch die einfachen Ausdrücke (I) und (II) Größe und Lage der Resultierenden bestimmt.

Häufig wird der Fall eintreten, daß eine solche dreieckförmige Kräftegruppe aus Kräften besteht, die unmittelbar beieinander stehen (Fig. 28b). Dann wird also der Abstand u unendlich klein, und hierdurch lassen sich die obigen Formeln noch weiter vereinfachen. Nämlich:

In der Beziehung $y = n \cdot u$ drücken wir zunächst die Anzahl n durch die Länge y und den Abstand u aus und erhalten

$$n = \frac{y}{u}.$$

Diesen Wert in die Formel (I) eingesetzt, ergibt

$$R = P_1 \frac{\frac{y}{u} + 1}{2}$$

Digitized by Google

$$= P_1 \frac{y + u}{2u},$$

$$R = \frac{1}{2} \frac{P_1}{u} (y + u).$$

Wenn nun u sehr klein ist im Verhältnis zu y, so können wir statt $y + u$ auch einfach y schreiben, ohne daß dadurch in unsere Zahlenrechnung ein bemerkbarer Fehler hineinkommen kann. Dann erhalten wir also

$$\text{(I a)} \qquad R = \frac{1}{2} \frac{P_1}{u} \cdot y.$$

Dieses Resultat läßt sich an Hand der Fig. 28b so ausdrücken: Dividieren wir die erste Last P_1 durch den Abstand u und tragen die hierdurch bestimmte Größe an der Stelle von P_1 auf (gleich ac), so ist die Resultierende R dargestellt durch den Inhalt des „*Belastungsdreiecks*" abc.

Auch die Lage der Resultierenden läßt sich bei einer solchen stetigen Aufeinanderfolge von Kräften einfach bestimmen. Da u gegenüber y verschwindet, können wir in der ursprünglichen Formel für r das zweite Glied fortlassen und erhalten:

$$\text{(II a)} \qquad r = \tfrac{2}{3} y.$$

In Worten: Folgen bei einer dreieckförmigen Kräftegruppe die einzelnen Kräfte unmittelbar aufeinander, so ist die Resultierende R von der Spitze des Dreiecks um $\frac{2}{3}$ der „*Belastungslänge*" y entfernt.

Für die Entfernung vom Punkte a bleibt also $\frac{1}{3} y$ übrig.

§ 11.

Das Kräftepaar.

I. Was ist ein Kräftepaar?

Unterschied zwischen Kräftepaar und Einzelkraft.

Auf einen Körper (Fig. 29) mögen zwei Kräfte P_1 und P_2 wirken, die miteinander parallel sind und entgegengesetzte Pfeilrichtung haben. P_1 sei etwas kleiner als P_2. Wenn wir für diese Kräftegruppe die Resultierende bestimmen, z. B. mittels Seilpolygon, so tragen wir also von einem beliebigen Punkte a aus die eine Kraft, P_1, gleich ab auf, reihen die zweite daran und finden hiermit die Resultierende R nach Größe und Richtung,

Digitized by Google

dargestellt durch die Strecke ac. Um die Lage zu bestimmen, ziehen wir die Polstrahlen *I*, *II* und *III*, hierzu parallel die Seilstrahlen *I*, *II* und *III*, bringen den ersten und den letzten Seilstrahl zum Schnitt und finden hieraus einen Punkt S, durch den die Resultierende hindurchgehen muß. Somit ist also R nach Größe, Richtung und Lage bestimmt; und bisher ist nichts Neues hinzugekommen.

Wenn nun aber P_1 größer wird, gleich P_2, so wird die Strecke ac in Fig. 29 gleich Null. Es ist dann $R = 0$. Ferner rückt der Punkt S in Fig. 29 in die Unendlichkeit, denn die Kräfte *I* und *III* werden jetzt parallel und schneiden sich also in der Unendlichkeit. Wir haben also das Resultat, daß, wenn P_1 und P_2 einander gleich sind, sie eine Resultierende ergeben, die

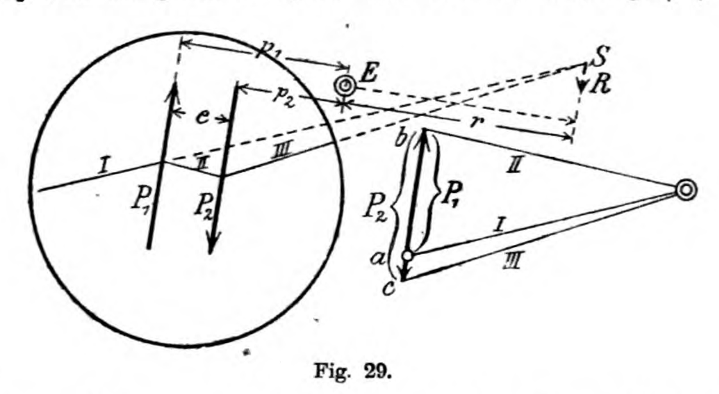


Fig. 29.

die Größe Null hat, und deren Lage in der Unendlichkeit ist. *Man nennt eine solche Kraftgruppe, die aus zwei* ***gleich großen, parallelen und entgegengesetzt gerichteten*** *Kräften* ***besteht***, ***ein „Kräftepaar“.***

Ein Kräftepaar unterscheidet sich also wesentlich von einer anderen Kräftegruppe. Während diese sich durch eine bestimmte Resultierende R ersetzen läßt, kann man für ein Kräftepaar eine im Endlichen liegende Ersatzkraft nicht angeben. Ein Kräftepaar läßt sich also auch nicht weiter vereinfachen — denn eine in der Unendlichkeit liegende Resultierende können wir nicht einzeichnen —, sondern es muß als ein Grundbegriff beibehalten werden.

Auch hinsichtlich der Bewegung, die ein Kräftepaar einem Körper erteilt, nimmt es eine besondere Stellung ein. Im § 8 haben wir gesehen, daß eine einzelne Kraft (sog. „*Einzelkraft*“) einen Körper so bewegt, daß der Schwerpunkt geradlinig fortschreitet, während die anderen Punkte um den Schwerpunkt rotieren. Das

Digitized by Google

Kräftepaar wirkt aber ganz anders: Es läßt den Schwerpunkt im Ruhezustand und verursacht nur eine Drehung der anderen Punkte um jenen („reine“ Drehbewegung).

II. Das statische Moment eines Kräftepaares.

Bezeichnen wir jetzt die beiden Kräfte P_1 und P_2, da sie ja gleich groß sind, gemeinsam mit P, so ist die Summe der statischen Momente dieser Kräfte in bezug auf den Punkt E gleich

$$+P \cdot p_1 - P \cdot p_2 = +P(p_1 - p_2) = +P \cdot e\,.$$

Wir sehen also, die Summe der statischen Momente ist nicht gleich Null. Dasselbe Resultat $P \cdot e$ hätten wir auch bekommen, wenn wir die statischen Momente für irgendeinen anderen Punkt als Bezugspunkt aufgestellt hätten. Denn die Abstände p_1 und p_2 kommen in dem obigen Resultat gar nicht mehr vor, sondern nur der Abstand e der beiden Kräfte voneinander. Wir haben also den Satz:

Bildet man von den beiden im Abstande e voneinander wirkenden Kräften P eines Kräftepaares die Summe der statischen Momente, so bekommt man, unabhängig vom Bezugspunkte, stets den Wert $P \cdot e$.

Man nennt dieses Produkt $P \cdot e$ direkt das „*Moment des Kräftepaares*“. (Man beachte den Unterschied gegen eine Einzelkraft; diese gibt im allgemeinen für verschiedene Bezugspunkte auch verschiedene statische Momente.)

Auch eine beliebige Kräftegruppe, der man es zunächst gar nicht ansieht, kann schließlich auf ein Kräftepaar führen. Haben wir z. B. bei einer Kräftegruppe P_1, P_2, P_3, P_4 die ersten drei Kräfte durch ihre Resultierende R_{1-3} ersetzt, so kann sich ja herausstellen, daß R_{1-3} zufällig ebenso groß wie die letzte Kraft, P_4, ist, ferner mit dieser parallel ist und entgegengesetzte Richtung hat. Dann wirken also die vier Kräfte P_1, P_2, P_3, P_4 genau so wie ein Kräftepaar, da sie ja schließlich ein solches ergeben.

Für die weiteren Untersuchungen ist nun folgende Bemerkung wichtig: *Zeigt sich bei einer Kräftegruppe P_1, P_2, P_3 usw., daß die Summe der statischen Momente dieser Kräfte in bezug auf irgendeinen Punkt gleich Null ist, so kann diese Kräftegruppe auf keinen Fall ein Kräftepaar ergeben.* Der Beweis dieser Behauptung folgt ohne weiteres aus dem Obigen: Wenn ein Kräftepaar wirkt, so bekommen wir niemals das Moment Null, sondern stets einen Wert $P \cdot e$. Da nun das statische Moment der Resultierenden gleich der Summe der statischen Momente der einzelnen Kräfte

Digitized by Google

ist, so müßte eine Kräftegruppe, die schließlich ein Kräftepaar ergeben soll, ebenfalls die Momentensumme $P \cdot e$, niemals aber Null haben.

Wenn eine Kräftegruppe für einen Bezugspunkt die Momentensumme Null ergibt, so kann sie nur eine Resultierende R haben, oder aber ein „Gleichgewichtssystem" bilden. Hierüber handelt der nächste Paragraph.

§ 12.

Die Gleichgewichtsbedingungen von Kräften mit verschiedenen Angriffspunkten.

Aufgabe. Auf einen Körper wirkt eine Kräftegruppe ein. Woran erkennen wir, ob diese Kräftegruppe den Körper im Ruhezustand halten wird oder nicht?

I. Grundprinzip.

Häufig bekommt man auf die obige Frage die Antwort: „Der Körper wird dann im Ruhezustand bleiben, wenn die Resultierende der betreffenden Kräftegruppe gleich Null ist." Diese Antwort ist aber unzureichend. Denn wir haben ja eben gesehen, daß sich eine Resultierende gleich Null auch dann ergibt, wenn auf den Körper ein Kräftepaar wirkt. Und in diesem Falle bleibt der Körper doch nicht im Ruhezustand! (Vgl. Fig. 29.) Wir müssen uns also nach anderen Kennzeichen für das Gleichgewicht umsehen, und diese sind in der Tat bald gefunden.

Es sind doch nur zwei Möglichkeiten vorhanden, nach denen sich die Wirkung einer Kräftegruppe äußert, nämlich:

1. die Kräfte ergeben eine Resultierende R,
2. „ „ „ ein Kräftepaar.

Im ersten Falle findet eine Verschiebung des Schwerpunktes des Körpers statt (und außerdem Drehung der anderen Punkte um den Schwerpunkt; eventuell fällt die Drehung fort, nämlich wenn R durch den Schwerpunkt geht). Im zweiten Falle bleibt der Schwerpunkt in Ruhe und die anderen Punkte drehen sich um ihn. Wenn also Ruhezustand des ganzen Körpers vorhanden sein soll, so darf weder der erste noch der zweite Fall eintreten. D. h.: *Wenn eine auf einen Körper wirkende Kräftegruppe diesen im Ruhezustand halten soll, so muß sie so beschaffen sein, daß sie*

1. *keine Resultierende,*
2. *kein Kräftepaar*

Digitized by Google

ergibt. Eine Kräftegruppe, die diese Eigenschaft hat, nennt man ein **„Gleichgewichtssystem“**.

Um nun in einem bestimmten Falle zu untersuchen, ob die obigen zwei Bedingungen erfüllt sind, haben wir wieder verschiedene Methoden zur Verfügung.

II. Praktische Anwendungsmethoden des Grundprinzips.

I. Methode: Graphisch mittels Kräftezug.

Zunächst untersuchen wir, ob die Resultierende gleich Null wird. Wir reihen also die Kräfte P_1, P_2, P_3 und P_4 (Fig. 30a) zu einem Kräftepolygon aneinander (Fig. 30b). Ergibt sich nun, wie in Fig. 30b, daß das Polygon sich *„schließt“*, d. h. daß der

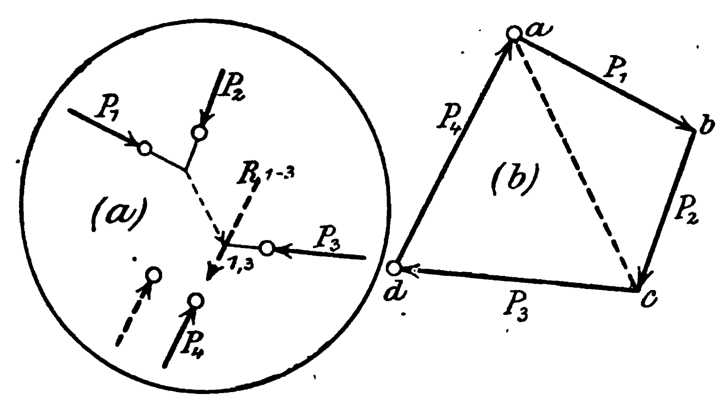


Fig. 30.

Endpunkt der zuletzt gezeichneten Kraft zurückfällt in den Anfangspunkt der zuerst gezeichneten Kraft, so ist R_{1-4} gleich Null. Hiermit ist die erste Bedingung erfüllt.

Nun muß noch untersucht werden, ob auch die zweite Bedingung erfüllt ist, d. h. ob die Kräfte nicht etwa ein Kräftepaar ergeben. Zu dieser Untersuchung bestimmen wir die Resultierende R_{1-3} der ersten drei Kräfte P_1, P_2, P_3. Sie ist in Fig. 30b dargestellt durch die Strecke $a\,d$, und zwar zeigt sie *von a nach d*. Sie ist also gleich groß, aber entgegengesetzt gerichtet der letzten Kraft, P_4, und es ist wohl möglich, daß sie mit dieser ein Kräftepaar bildet. Um auch darüber Gewißheit zu haben, zeichnen wir noch in Fig. 30a die Resultierende R_{1-3} mittels Kräftezug ein. Ergibt sich nun, daß die letzte Kraft, P_4, in derselben Geraden liegt, in der R_{1-3} zu liegen gekommen ist, so heben sich R_{1-3} und P_4 auf und es ist tatsächlich Gleichgewicht vorhanden. Hätte aber

Digitized by Google

P_4 die in Fig. 30a punktiert eingezeichnete Lage, d. h. würde sich ergeben, daß P_4 und R_{1-3} gegeneinander versetzt liegen, so würden sie sich nicht aufheben, sondern vielmehr ein Kräftepaar ergeben. Dann wäre also kein Gleichgewicht vorhanden.

Es war übrigens nicht nötig, daß wir gerade P_1 bis P_3 zu einer Resultierenden zusammenfaßten und dann nachsahen, ob diese mit P_4 in derselben Geraden liegt. Wir hätten natürlich die Kräftegruppe auch anders einteilen können. Zum Beispiel P_1 und P_2 zu einer Resultierenden R_{1-2}, und P_3 und P_4 zu einer Resultierenden R_{3-4} zusammennehmen können. Dann hätte sich im Gleichgewichtsfalle ergeben müssen, daß diese beiden Resultierenden R_{1-2} und R_{3-4} in ein und dieselbe Gerade zu liegen kommen müssen, damit sie sich gegenseitig aufheben. Allgemein wird man also sagen: Wenn eine Kräftegruppe ihren Angriffskörper im Ruhezustand halten soll, so muß sie folgende Eigenschaften haben:

1. *Das aus den Kräften gebildete Kräftepolygon muß sich schließen;*

2. *Teilt man die Kräfte in zwei Gruppen und ersetzt jede Gruppe durch ihre Ersatzkraft, so müssen diese beiden Ersatzkräfte in derselben Geraden liegen.*

Bemerkung: Genau so, wie der Kräftezug überhaupt, versagt diese Methode, wenn die Kräfte untereinander parallel sind.

II. Methode: Graphisch mittels Seilpolygon.

Es soll also nachgewiesen werden, daß die Kräfte 1. keine Resultierende, 2. kein Kräftepaar ergeben.

Um die erste Bedingung zu kontrollieren, zeichnen wir das Kräftepolygon (Fig. 31b). Schließt es sich, wie in Fig. 31b angenommen, so ist R gleich Null.

Nun zeichnen wir vom beliebigen Pole O aus die Polstrahlen I, II, III, IV und V. [Der erste Strahl, I, geht nach dem Anfangspunkt a der zuerst gezeichneten Kraft; der letzte Strahl, V, nach dem Endpunkt e der zuletzt gezeichneten Kraft (vgl. z. B. Fig. 20g). Da a und e zusammenfallen sollten, fallen auch die Strahlen I und V zusammen.] Parallel zu den Polstrahlen zeichnen wir in Fig. 31a die Seilstrahlen. Mit anderen Worten: Wir zerlegen die Kraft P_1 in die Seitenkräfte I und II, P_2 in die Seitenkräfte II und III, P_3 in III und IV und P_4 in IV und V. Und zwar heben sich in Fig. 31a je die beiden Kräfte II, die beiden Kräfte III und die beiden Kräfte IV gegenseitig auf, da sie gleich groß, entgegengesetzt gerichtet sind und in derselben Geraden liegen (vgl. Ableitung des Seilpolygons in § 9). Es bleiben also

Digitized by Google

übrig die beiden Kräfte I und V. Die Kraft I ist in Fig. 31b dargestellt durch die Strecke $\overline{aO}$ (Richtung: *von a nach O*), die Kraft V durch die Strecke $\overline{Oe} = \overline{Oa}$ (Richtung: *von O nach e* bzw. *a*). Die beiden Kräfte I und V sind also nach Fig. 31b gleich groß, aber entgegengesetzt gerichtet. Ergibt sich nun beim Aufzeichnen des Seilpolygons, daß diese beiden Kräfte in ein und dieselbe Gerade fallen, so heben sie sich gegenseitig auf und der Körper bleibt im Ruhezustand. Laufen aber die beiden Kräfte I und V *neben*einander (wie es der Fall wäre, wenn P_4 in Fig. 31a die

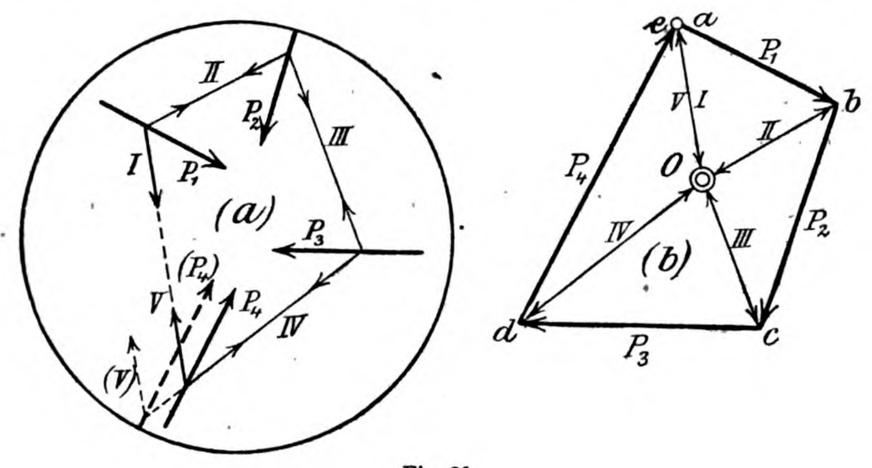


Fig. 31.

punktiert gezeichnete Lage hätte), so ergeben die beiden Kräfte I und V ein Kräftepaar, und es ist *kein* Gleichgewicht. Da im Gleichgewichtsfalle die Seilstrahlen von Fig. 31a eine vollständig geschlossene Figur bilden (ähnlich wie ein geschlossenes Kräftepolygon), so pflegt man die Bedingungen in folgender Form auszusprechen:

1. *Das Kräftepolygon muß sich schließen;*
2. *Das Seilpolygon muß sich schließen.*

III. Methode: Analytisch.

Wir wollen jetzt also auf rechnerischem Wege untersuchen, ob die betreffende Kräftegruppe 1. keine Resultierende und 2. kein Kräftepaar ergibt.

Mit der zweiten Untersuchung wollen wir anfangen. In § 11, am Schlusse, hatten wir folgendes gesehen: Wenn eine auf einen Körper wirkende Kräftegruppe für irgendeinen Punkt die Momentensumme

Digitized by Google

Null hat, so kann diese Gruppe auf keinen Fall ein Kräftepaar ergeben. Um also festzustellen, ob eine zu untersuchende Kräftegruppe ein Kräftepaar ergibt oder nicht, nehmen wir irgendwo einen Bezugspunkt E an, fällen von diesem die Lote auf die Kräfte und bilden von jeder derselben das statische Moment (also Kraft mal Lot). Dann addieren wir sämtliche Momente, wobei wir aber die rechts- und die linksherum um E zeigenden Kräfte durch verschiedene Vorzeichen unterscheiden. Kommt nun bei der Addition die Summe Null heraus, so ergibt die Kräftegruppe **kein** Kräftepaar.

Nun müssen wir noch untersuchen, ob auch die Resultierende gleich Null ist. Hierzu stehen uns verschiedene Wege zur Verfügung:

a) Wir gehen von dem zur Berechnung von R aufgestellten Ausdrucke aus

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}\,.$$

Aus ihm ergibt sich (vgl. auch die entsprechende Ableitung in § 5), daß, wenn

$$\text{(I)} \quad R_x = 0 \qquad \text{und} \qquad \text{(II)} \quad R_y = 0$$

ist, sicher auch R gleich Null wird. In Worten: Um zu erkennen, ob die Resultierende R einer Kräftegruppe gleich Null wird, bilden wir von den Kräften die Summen der Projektionen auf die x- und auf die y-Achse; also

$$\text{(I)} \qquad \pm P_1 \cdot \cos\alpha_1 \pm P_2 \cdot \cos\alpha_2 \pm P_3 \cdot \cos\alpha_3 \ldots;$$

$$\text{(II)} \qquad \pm P_1 \cdot \sin\alpha_1 \pm P_2 \cdot \sin\alpha_2 \pm P_3 \cdot \sin\alpha_3 \ldots.$$

(Bei der x-Achse werden bekanntlich die Richtungen nach rechts und nach links, und bei der y-Achse die Richtungen nach oben und nach unten durch verschiedene Vorzeichen unterschieden.) Ergeben sich beide Summen gleich Null, so ist $R = 0$.

b) Ein anderer Weg, um nachzusehen, ob $R = 0$ wird, ergibt sich aus folgenden zwei Überlegungen:

Wenn auf einen Körper eine Kraft R von zunächst unbestimmter Größe wirkt, und wir projizieren diese Kraft auf eine beliebig gewählte Achse, so bekommen wir doch im allgemeinen eine Projektion von bestimmter Größe. Nur in zwei Fällen kann diese Projektion gleich Null werden; nämlich, wenn entweder die Kraft R selber gleich Null ist, oder wenn die Kraft R rechtwinklig zu der angenommenen Achse steht. (Eine rechtwinklig zu einer Achse stehende Kraft ergibt auf diese Achse als Projektion einen Punkt, also eine Strecke von der Länge Null.) Dieses wollen wir uns zunächst merken.

Digitized by Google

Ferner: Wenn auf einen Körper eine Kraft R von zunächst unbestimmter Größe wirkt, und wir bilden für irgendeinen Punkt E das statische Moment dieser Kraft, so bekommen wir doch im allgemeinen einen bestimmten Wert, Kraft mal Lot. Nur in zwei Fällen kann das statische Moment gleich Null werden; nämlich, wenn entweder die Kraft R selber gleich Null ist, oder wenn die Kraft R durch den Punkt E hindurchgeht. (Dann wird das Lot gleich Null, also auch das Produkt Kraft mal Lot.) Daraus folgt weiter: Ergibt die Kraft R für *zwei* Punkte, E und F, die statischen Momente Null, so ist entweder R gleich Null, oder sie geht durch E und durch F hindurch, d. h. *sie liegt in der Verbindungslinie dieser beiden Punkte.* Auch dieses wollen wir uns merken.

Auf Grund dieser beiden Überlegungen ergibt sich folgender Weg, um festzustellen, ob eine Kräftegruppe eine Resultierende R gleich Null hat. Zunächst bilden wir von den Kräften die Summe R_x der Projektionen auf eine Achse, z. B. auf die x-Achse. Es möge sich $R_x = 0$ ergeben. Daraus folgt, daß, falls R nicht direkt gleich Null ist, es nur rechtwinklig zur x-Achse stehen könnte.

Dann bilden wir für zwei Punkte E und F, deren Verbindungslinie nicht rechtwinklig zur x-Achse steht, die Summe der statischen Momente. Es möge sich jedesmal die Momentensumme Null ergeben. Daraus folgt, daß, falls R nicht selber gleich Null ist, es in der Verbindungslinie EF liegen müßte.

Wenn also eine Kräftegruppe die Eigenschaften hat, daß 1. $R_x = 0$ wird, und daß 2. die Momentensummen für die beiden Punkte E und F beide gleich Null werden, so können wir von dieser Kräftegruppe aussagen: Entweder hat sie eine Resultierende R gleich Null, oder ihre Resultierende R steht senkrecht zur x-Achse und geht außerdem durch die Punkte E und F. Der zweite Fall ist aber unmöglich, da ja die beiden (willkürlich zu wählenden) Punkte E und F so angenommen wurden, daß ihre Verbindungslinie nicht senkrecht zur x-Achse steht. Es bleibt also nur die erste Möglichkeit, nämlich, daß die betreffende Kräftegruppe eine Resultierende gleich Null hat.

Ist nun auf diese Weise nachgewiesen, daß $R = 0$ ist, so ist damit auch bewiesen, daß die Kräftegruppe kein Kräftepaar ergibt. Denn zu letzterem Nachweis gehört ja nur das Aufstellen der statischen Momente für *einen* Punkt, z. B. für E oder F.

Dasselbe, was hier für die x-Achse abgeleitet ist, gilt natürlich auch für die y-Achse. Dann müssen die Punkte E und F so

Digitized by Google

gewählt werden, daß die Verbindungslinie EF nicht rechtwinklig zur y-Achse steht.

c) Ein drittes Kennzeichen, daß die Resultierende gleich Null ist, ist folgendes: Wir bilden von der Kräftegruppe für drei Punkte E, F und G, die nicht in einer geraden Linie liegen, die statischen Momente. Ergibt sich jede der drei Momentensummen gleich Null, so ist R gleich Null. Der Beweis folgt daraus, daß, wenn R nicht gleich Null wäre, es sowohl durch E, als auch durch F, als auch durch G hindurchgehen müßte. Dieses ist aber unmöglich, da die drei Punkte so angenommen sind, daß sie nicht in einer Geraden liegen.

Auch in dieser Untersuchung ist bereits die andere, wegen des eventuellen Kräftepaares, mit enthalten und braucht also nicht besonders ausgeführt zu werden.

Zusammenfassung von § 12.

Um zu erkennen, ob eine auf einen Körper einwirkende Kräftegruppe diesen Körper im Ruhezustand halten wird, haben wir drei Methoden entwickelt:

I. Methode: Graphisch mittels Kräftezug.

1. Wir zeichnen aus den gegebenen Kräften das Kräftepolygon. Dieses muß sich schließen.

2. Dann teilen wir die Kräfte in zwei beliebige Gruppen und zeichnen von jeder Gruppe die Resultierende ein. Diese beiden Resultierenden müssen dann in ein und dieselbe Gerade fallen.

Sind beide Bedingungen erfüllt, dann ist Gleichgewicht.

II. Methode: Graphisch mittels Seilpolygon.

1. Wir zeichnen das Kräftepolygon. Dieses muß sich schließen.

2. Wir zeichnen zu dem Kräftepolygon von einem beliebigen Pol aus das Seilpolygon. Dieses muß sich ebenfalls schließen (d. h. der letzte Seilstrahl muß in dieselbe Gerade fallen, in der der erste liegt).

III. Methode: Analytisch.

IIIa. 1. Wir bilden die Summen der Projektionen der Kräfte:

$$R_x = \pm P_1 \cdot \cos\alpha_1 \pm P_2 \cdot \cos\alpha_2 \pm P_3 \cdot \cos\alpha_3 \ldots, \tag{I}$$

$$R_y = \pm P_1 \cdot \sin\alpha_1 \pm P_2 \cdot \sin\alpha_2 \pm P_3 \cdot \sin\alpha_3 \ldots. \tag{II}$$

Beide Summen müssen sich gleich Null ergeben.

2. Wir bilden für irgendeinen Punkt E die Summe der statischen Momente. Auch diese Summe muß gleich Null sein.

Digitized by Google

In Formeln:

$$(I)\quad R_x = 0\,; \qquad (II)\quad R_y = 0\,; \qquad (III)\quad \Sigma M = 0\,.$$

IIIb. 1. Wir bilden die Summe der Projektionen auf eine beliebige Achse, z. B. R_x. Diese Summe muß sich gleich Null ergeben.

2. Wir bilden die statischen Momente für zwei Punkte E und F, deren Verbindungslinie aber nicht rechtwinklig zu der angenommenen Achse stehen darf. Für beide Punkte muß sich die Momentensumme gleich Null ergeben.

In Formeln:

$$(I)\quad R_x\ (\text{oder } R_y) = 0\,; \qquad (II)\quad \Sigma M_E = 0\,; \qquad (III)\quad \Sigma M_F = 0\,.$$

IIIc. Wir bilden für drei Punkte E, F und G, die aber nicht in einer Geraden liegen dürfen, die statischen Momente. Jede dieser Momentensummen muß sich gleich Null ergeben.

In Formeln:

$$(I)\quad \Sigma M_E = 0\,; \qquad (II)\quad \Sigma M_F = 0\,; \qquad (III)\quad \Sigma M_G = 0\,.$$

§ 12a.

Beispiel zu § 12.

Auf den in Fig. 32 gezeichneten Körper K wirkt die aus den Kräften P_1, P_2, P_3, P_4 und P_5 bestehende Kräftegruppe ein. Wird der Körper K im Ruhezustand bleiben, oder wird er sich in Bewegung setzen?

I. Methode.

Zunächst reihen wir die Kräfte zu einem Kräftepolygon aneinander. (Man führe die Zeichnung selber aus!) Hierbei zeigt sich, daß der Endpunkt der zuletzt gezeichneten Kraft von selber zurückfällt in den Anfangspunkt der zuerst hingezeichneten Kraft. Also ist die erste Bedingung erfüllt. Dann fassen wir z. B. P_1 und P_2, und P_3, P_4 und P_5 zu den Resultierenden R_{1-2} und R_{3-5} zusammen und zeichnen diese in Fig. 32 ein. Hierbei zeigt sich, daß diese beiden Resultierenden in ein und dieselbe Gerade fallen. Also ist auch die zweite Bedingung erfüllt und somit bewiesen, daß die Kräfte so gewählt sind, daß der Körper im Ruhezustand bleibt.

II. Methode.

(Man führe die Zeichnung wieder selber aus!) Zunächst zeichnen wir wieder das Kräftepolygon. Es schließt sich. Dann nehmen wir einen beliebigen Pol, zeichnen die Polstrahlen nach den Ecken

Digitized by Google

des Kräftepolygons und parallel hierzu die Seilstrahlen zwischen den einzelnen Kräften. Hierbei zeigt sich, daß der erste und der letzte Seilstrahl in ein und dieselbe Gerade fallen (d. h. genau gegeneinander laufen). Also ist auch die zweite Bedingung erfüllt. Der Körper bleibt demnach sicher im Ruhezustand.

III. Methode.

IIIa. Da es sich bei jeder analytischen Untersuchung am bequemsten mit horizontalen und mit vertikalen Kräften arbeitet,

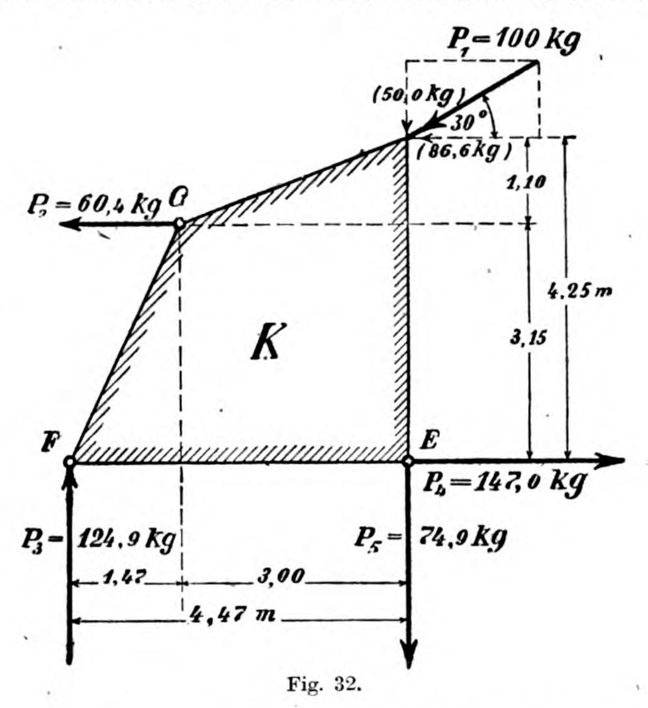


Fig. 32.

zerlegen wir die schräg gerichtete Kraft P_1 zunächst horizontal und vertikal. Und zwar ist

die Horizontalprojektion von P_1 gleich $P_1 \cdot \cos 30° = 100 \cdot 0{,}866 = 86{,}6$ kg,
die Vertikalprojektion von P_1 gleich $P_1 \cdot \sin 30° = 100 \cdot 0{,}500 = 50{,}0$ kg.

Nun stellen wir die Summenausdrücke R_x und R_y auf. Bei R_x wollen wir die Richtung nach links positiv und die Richtung nach rechts negativ nehmen, und bei R_y die Richtung nach unten positiv und nach oben negativ. Dann wird:

$$\text{(I)} \qquad R_x = +86{,}6 + 60{,}4 - 147{,}0 = 0{,}0\,,$$

$$\text{(II)} \qquad R_y = +50{,}0 - 124{,}9 + 74{,}9 = 0{,}0\,.$$

Digitized by Google

(Bei R_x ist natürlich beachtet, daß von einer horizontalen Kraft die Horizontalprojektion gleich der Kraft selber und von einer vertikalen Kraft die Horizontalprojektion gleich Null ist. Umgekehrt bei R_y.)

Die ersten beiden Bedingungen sind also erfüllt. Nun kommt die Untersuchung, ob $\Sigma M = 0$ ist. Als beliebigen Bezugspunkt E nehmen wir den rechten Eckpunkt. Beim Ausrechnen der statischen Momente wollen wir bei der schrägen Kraft P_1 nicht direkt das Produkt Kraft mal Lot bestimmen (weil letzteres in der Figur nicht angegeben ist), sondern nehmen statt der Kraft P_1 selber lieber deren Seitenkräfte 86,6 kg und 50,0 kg. Deren Abstände bis zum Punkte E sind in der Figur enthalten. Ferner beachten wir, daß eine Kraft, die durch den Punkt E hindurchgeht, das statische Moment Null ergibt. Dann wird (Vorzeichenannahme: rechtsherum positiv, linksherum negativ):

$$\text{(III)} \quad \left\{ \begin{aligned} \Sigma M &= -86{,}6 \cdot 4{,}25 - 60{,}4 \cdot 3{,}15 + 124{,}9 \cdot 4{,}47 \\ &= -368{,}0 - 190{,}3 + 558{,}3 \\ &= 0{,}0 \,. \end{aligned} \right.$$

Wir sehen, daß auch die dritte Bedingung erfüllt ist. Der Körper bleibt also im Ruhezustand.

IIIb. Man führe die Berechnung selber durch! (Als x-Achse nehme man z. B. die Horizontale und als Bezugspunkte dann die Punkte E und F.)

IIIc. Nach dieser Methode stellen wir also für drei Punkte die Momentensummen auf. Als Bezugspunkte wählen wir E, F und G (Fig. 32). Statt mit der schrägen Kraft P_1 arbeiten wir natürlich lieber mit deren Projektionen und erhalten (zur Abwechslung: linksherum positiv, rechtsherum negativ eingeführt):

$$\text{(I)} \quad \left\{ \begin{aligned} \Sigma M_E &= +86{,}6 \cdot 4{,}25 + 60{,}4 \cdot 3{,}15 - 124{,}9 \cdot 4{,}47 \\ &= +368{,}0 + 190{,}3 - 558{,}3 \\ &= 0{,}0 \,, \end{aligned} \right.$$

$$\text{(II)} \quad \left\{ \begin{aligned} \Sigma M_F &= +86{,}6 \cdot 4{,}25 + 60{,}4 \cdot 3{,}15 - 50{,}0 \cdot 4{,}47 - 74{,}9 \cdot 4{,}47 \\ &= +368{,}0 + 190{,}3 - 223{,}5 - 334{,}8 \\ &= 0{,}0 \,, \end{aligned} \right.$$

$$\text{(III)} \quad \left\{ \begin{aligned} \Sigma M_G &= +86{,}6 \cdot 1{,}10 + 147{,}0 \cdot 3{,}15 - 50{,}0 \cdot 3{,}00 - 74{,}9 \cdot 3{,}00 - 124{,}9 \cdot 1{,}47 \\ &= +95{,}3 + 463{,}0 - 150{,}0 - 224{,}7 - 183{,}6 \\ &= 0{,}0 \,. \end{aligned} \right.$$

Somit ist auch nach dieser Methode das Gleichgewicht erwiesen.

Aufgabe: Man zeichne selber einen Körper so mit Kräften, daß er im Ruhezustand gehalten wird! (Man wird sehen, daß das

Digitized by Google

Gleichgewicht ein gar nicht so einfach aufzufindender besonderer Fall ist. Im allgemeinen bekommt man die Kräfte natürlich so, daß sie den Körper in Bewegung setzen würden.)

§ 13.

Wiederholungen und Ergänzungen.

Zu den graphischen Methoden I und II ist weiter nichts zu bemerken. Am häufigsten werden aber die analytischen Kennzeichen des Gleichgewichts benutzt, und hierzu mögen noch einige Bemerkungen Platz finden.

1. Andere Form für die analytischen Gleichgewichtsbedingungen.

Statt den Ausdruck für R_x hinzuschreiben und dann nachzusehen, ob dieser gleich Null wird, kann man auch einfach untersuchen, ob die nach rechts zeigenden Horizontalprojektionen zusammen ebenso groß sind wie die nach links zeigenden Horizontalprojektionen. Ist dieses der Fall, so ist augenscheinlich auch R_x gleich Null. (Denn R_x ist ja die Summe aller Horizontalprojektionen, wobei aber die nach rechts und die nach links zeigenden verschiedene Vorzeichen haben.) Ebenso ist R_y gleich Null, wenn die nach oben zeigenden Vertikalprojektionen zusammen gleich sind den nach unten zeigenden Vertikalprojektionen. Ferner ist die Summe der statischen Momente in bezug auf einen Punkt E gleich Null, wenn die rechtsherum zeigenden Momente zusammen gleich sind den linksherum zeigenden Momenten. Die Methode III läßt sich demnach auch so ausdrücken:

IIIa. (I). Die Summe der nach rechts zeigenden Horizontalprojektionen muß gleich sein der Summe der nach links zeigenden Horizontalprojektionen.

(II). Die Summe der nach oben zeigenden Vertikalprojektionen muß gleich sein der Summe der nach unten zeigenden Vertikalprojektionen.

(III). Die Summe der rechtsherum zeigenden statischen Momente in bezug auf einen beliebigen Punkt E muß gleich sein der Summe der linksherum zeigenden Momente.

IIIb. (I). Die Summe der nach der einen Seite zeigenden Projektionen der Kräfte auf eine beliebige Achse muß gleich sein der Summe der nach der anderen Seite zeigenden Projektionen auf diese Achse.

Digitized by Google

(II) und (III). Die Summen der rechtsherum zeigenden Momente in bezug auf zwei Punkte E und F müssen gleich sein den Summen der linksherum zeigenden Momente. Bedingung: Die Linie EF darf nicht rechtwinklig zu der unter (I) angenommenen Achse stehen (sonst ist das Gleichgewicht nicht verbürgt).

IIIc. (I), (II) und (III). Die Summen der rechtsherum zeigenden Momente in bezug auf drei Punkte E, F und G müssen gleich sein den Summen der linksherum zeigenden Momente. Bedingung: E, F und G dürfen nicht in einer Geraden liegen.

---

2. Wie schon in § 5 bei der entsprechenden Untersuchung für Kräfte mit gemeinsamem Angriffspunkte hingewiesen ist, müssen die x- und y-Achse nicht unbedingt senkrecht zueinander stehen. Sie können auch einen schiefen Winkel miteinander bilden. Für jede Achse muß man dann die Projektionen ausrechnen und nachsehen, ob die Summen der Projektionen gleich Null sind. Am bequemsten ist es aber, die Richtungen senkrecht zueinander zu nehmen.

---

3. Umkehrung der bisherigen Aufgabe.

Bisher lautete die Aufgabe doch so: Es soll untersucht werden, ob eine gegebene Kräftegruppe ihren Angriffskörper im Gleichgewicht hält. In dieser Form wird die Aufgabe aber gar nicht so häufig vorkommen wie in einer etwas abgeänderten Form; nämlich:

„Auf einen Körper K wirken Kräfte ein, die zum Teil bekannt, zum Teil aber unbekannt sind. Diese unbekannten Kräfte sind so zu bestimmen, daß der Körper im Gleichgewicht bleibt!“

Für Fig. 33 wäre die Aufgabe z. B. folgende: Die Kräfte P_1 und P_2 seien bekannt ($P_1 = 100$ kg unter $\alpha = 30°$, $P_2 = 60{,}4$ kg unter $\alpha = 0°$). Von den Kräften P_3, P_4 und P_5 seien nur die Richtungen und Lagen bekannt, dagegen die Größen unbekannt. Letztere sollen nun so bestimmt werden, daß der Körper im Ruhezustand bleibt.

Augenscheinlich ist dieses die Umkehrung der früheren Aufgabe. Wir lösen sie also durch Anwendung der entwickelten Methoden. Und zwar wollen wir zunächst die im ersten Absatz dieses Paragraphen abgeleitete Form III a der Gleichungen verwenden. Dann haben wir also die Bedingungen zu Verfügung:

$$\text{(I)} \qquad P_4 = 60{,}4 + 86{,}6\,,$$

$$\text{(II)} \qquad P_3 = 50{,}0 + P_5\,,$$

$$\text{(III)} \qquad P_3 \cdot 4{,}47 = 86{,}6 \cdot 4{,}25 + 60{,}4 \cdot 3{,}15\,.$$

Digitized by Google

Aus diesen Gleichungen ergibt sich

(I) $$P_4 = 147{,}0 \text{ kg},$$

(III) $$P_3 = \frac{368{,}0 + 190{,}3}{4{,}47} = \frac{558{,}3}{4{,}47} = 124{,}9 \text{ kg},$$

(II) $$P_5 = P_3 - 50{,}0 = 124{,}9 - 50{,}0 = 74{,}9 \text{ kg}.$$

Unsere Aufgabe ist somit gelöst: Die Kräfte P_3, P_4 und P_5 müssen die Größe 124,9 kg, 147,0 kg und 74,9 kg haben, damit der Körper im Ruhezustand bleibt. Man kann auch so sagen:

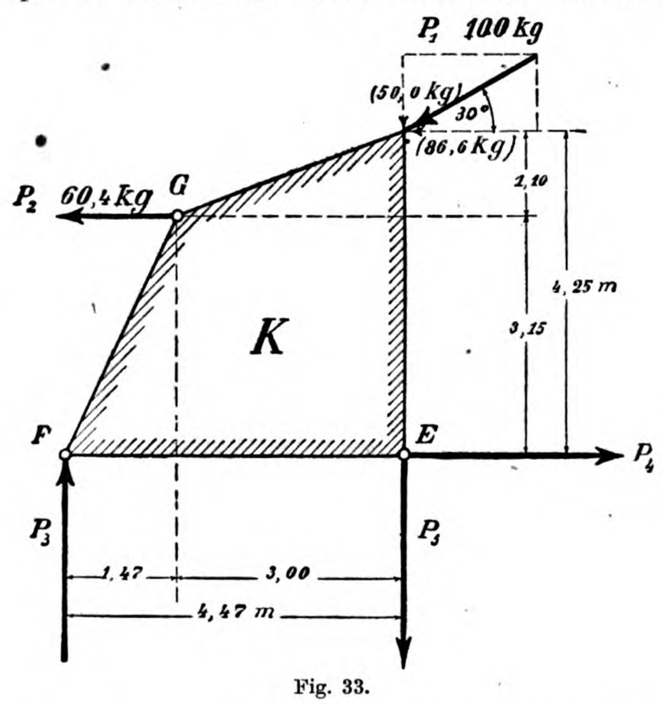


Fig. 33.

Wenn auf den Körper *K* einerseits die „*Lasten*" P_1 und P_2 wirken, so müssen andererseits die „*Stützkräfte*" P_3, P_4 und P_5 angebracht werden, und zwar in der soeben berechneten Größe, damit der Körper im Gleichgewicht ist.

Wir wollen diese Aufgabe auch nach Methode III b (erster Absatz, § 13) lösen. Als Projektionsachse nehmen wir die horizontale Richtung, und als Bezugspunkte die Eckpunkte *E* und *F*. Dann wird:

(I) $$P_4 = 60{,}4 + 86{,}6\,,$$

(II) $$P_3 \cdot 4{,}47 = 86{,}6 \cdot 4{,}25 + 60{,}4 \cdot 3{,}15\,,$$

(III) $$P_5 \cdot 4{,}47 + 50{,}0 \cdot 4{,}47 = 86{,}6 \cdot 4{,}25 + 60{,}4 \cdot 3{,}15\,.$$

Digitized by Google

Hieraus ergeben sich die Werte:

(I) $P_4 = 147{,}0$ kg,

(II) $P_3 = (368{,}0 + 190{,}3)\dfrac{1}{4{,}47} = 124{,}9$ kg,

(III) $P_5 = (368{,}0 + 190{,}3 - 223{,}5)\dfrac{1}{4{,}47} = 74{,}9$ kg.

Dieser Weg ist also noch einfacher, da in jeder Gleichung nur eine Unbekannte vorgekommen ist.

Es möge jetzt schon darauf hingewiesen werden, daß der folgende Abschnitt II nichts weiter ist als eine dauernde Wiederholung dieser soeben gelösten Aufgabe. Es wird sich immer darum handeln, daß an einem Körper gewisse gegebene Kräfte (die sog. „*Lasten*") angreifen, und daß dann drei andere Kräfte (die sog. „*Auflagerkräfte*" H, V und B) von der Art hinzugefügt werden sollen, daß der Körper im Gleichgewicht bleibt. Deshalb ist die vorige Aufgabe von so großer Wichtigkeit für das Folgende.

Ferner sei noch besonders auf eins hingewiesen: Die Lösung der Aufgabe ist eine absolut „*eindeutige*". Das heißt, die drei gesuchten Kräfte P_3, P_4, P_5 dürfen nur die oben ausgerechneten Werte, und keine anderen, haben, falls Gleichgewicht bestehen soll. Es darf also keine dieser drei Kräfte vergrößert oder verkleinert werden; die Kräfte dürfen auch nicht miteinander vertauscht werden; od. dgl. Sonst würde sofort das Gleichgewicht gestört werden. Dieses folgt direkt daraus, daß die Kräfte sich aus linearen Gleichungen ergeben haben, von denen jede einen bestimmten Wert — aber auch nur *einen* Wert — für die betreffende Unbekannte liefert. (Eine quadratische Gleichung z. B. liefert bekanntlich zwei Werte; z. B. folgen aus $x^2 - 4x = -3$ die Werte $x = 1$ und $x = 3$.)

---

4. Spezialfall: Körper mit nur drei Kräften.

Dieser Fall wird so häufig vorkommen, daß wir für ihn die Gleichgewichtsbedingungen noch etwas ummodeln wollen, damit sie besonders einfach werden. Untersuchen wir die Sache mittels Kräftezug (Methode I). Zunächst müssen die drei Kräfte natürlich ein geschlossenes Kräftepolygon ergeben (Fig. 34a und b). Dann kommt die zweite Bedingung, nämlich, daß die Resultierende aus zwei Kräften, z. B. aus P_1 und P_2, mit der dritten Kraft, P_3, in derselben Geraden liegen muß. Diese Untersuchung läßt sich nun für den Fall von drei Kräften etwas vereinfachen. Aus dem ge-

Digitized by Google

schlossenen Kräftepolygon (Fig. 34 b) ergibt sich doch, daß R_{1-2} und P_3 parallel miteinander sind. Wenn also in Fig. 34 a P_3 durch den Schnittpunkt C von P_1 und P_2 hindurchgeht, so ist damit auch bewiesen, daß es mit R_{1-2} in derselben Geraden liegt. Wir brauchen demnach R_{1-2} gar nicht erst einzuzeichnen, sondern haben einfach die beiden Bedingungen:

1. Im Kräftepolygon müssen der Anfangspunkt der ersten Kraft (P_1) und der Endpunkt der letzten Kraft (P_3) zusammenfallen.

2. *Die drei Kräfte müssen sich in einem Punkte schneiden.*

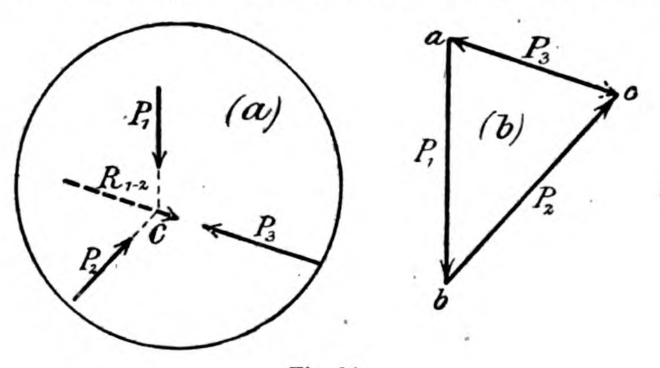


Fig. 34.

Namentlich die letzte Bedingung wird uns gute Dienste leisten bei der Ermittlung der Auflagerkräfte (Abschnitt II). Sie läßt sich übrigens auch auf analytischem Wege schnell ableiten. Stellt man nämlich die Gleichung $\Sigma M = 0$ in bezug auf Punkt C auf, so sind die statischen Momente von P_1 und P_2 gleich Null, da die Lote von C auf P_1 und P_2 gleich Null sind. Damit nun die Summe *aller* statischen Momente Null wird, muß auch das statische Moment von P_3 in bezug Punkt C gleich Null sein; dieses ist aber nur dann möglich, wenn P_3 ebenfalls durch C geht.

Zusammenfassung zum 2. Vortrag.

Von der Wirkung einer Kraft auf einen (scheibenförmigen) Körper sind wir ausgegangen. Anschließend wurden die Fragen behandelt:

I. Wie wirken beliebig viele Kräfte auf einen Körper? (Antwort: Im allgemeinen läßt sich die Wirkung einer Kräftegruppe darstellen durch die Wirkung einer einzigen Kraft R (§ 9, 10). Es kann sich aber auch ein Kräftepaar ergeben (§ 11). Dieses läßt sich nicht durch eine einzige Kraft vereinfachen, sondern muß als ein Grundbegriff beibehalten werden.)

II. Welche besondere Eigenschaften hat eine Kräftegruppe, die ihren Angriffskörper im Ruhezustand hält? (Antwort: Sie erfüllt bestimmte Bedingungen, § 12, 13.)

Digitized by Google

Abschnitt II.

Die Berechnung der Auflagerkräfte bei statisch bestimmt gelagerten, ebenen Systemen.

3. Vortrag:

Die Auflagerkräfte infolge ständiger Belastung.

§ 14.

Die Anzahl der Unbekannten bei den einzelnen Auflagerkonstruktionen.

1. Sobald eine Konstruktion von einem Lastensystem beansprucht wird, müssen an den Auflagerstellen Kräfte entstehen, die den angreifenden Lasten das Gleichgewicht halten. Die Stützung eines Körpers läßt sich natürlich auf verschiedene Weise erzielen. Wir wollen im folgenden zunächst untersuchen, wie die Auflagerung beschaffen sein muß, die gerade noch ausreicht, um bei jeder beliebigen Belastung die Ruhelage des Bauwerks zu sichern. Es sei aber stets vorausgesetzt, daß das Tragwerk und die Lasten in *einer* Ebene enthalten seien; die sogenannten räumlichen Systeme sollen hierbei ausgeschlossen sein. Bei dieser Untersuchung ist es gleichgültig, ob es sich um eine vollwandige oder eine Fachwerkkonstruktion handelt. Wir wollen nur voraussetzen, daß das Bauwerk eine sogenannte „*starre Scheibe*" bildet, d. h. daß die einzelnen Punkte des Tragkörpers so miteinander verbunden sind, daß sie ihre gegenseitige Lage nicht ändern können. Solche Systeme, die Gelenke enthalten (z. B. Dreigelenkbogen), bei denen sich also die einzelnen Teile gegeneinander bewegen können, wollen wir vorläufig noch nicht untersuchen.

An dem Körper K in Fig. 35 greifen die Lasten P_1, P_2, P_3, P_4 an. Zunächst denke ich mir K dadurch gestützt, daß ein

Digitized by Google

beliebiger Punkt *A* durch einen Bolzen mit einem unveränderlichen Körper *W*, dem „*Widerlager*", verbunden wird. Dann ist die Ruhelage von *A* bereits gesichert, und außerdem ist jedem anderen Punkte nur noch eine bestimmte Bewegung gestattet, nämlich die Kreisbewegung um *A*. Um nun noch einen zweiten Punkt, z. B. *B*, festzulegen, genügt es, die Bewegungsfreiheit des Punktes *B* einzuschränken durch die Führung *F*. Eine solche Führung schließt jede andere Bewegung, die nicht mit ihrer Richtung zusammenfällt (also auch die Kreisbewegung mit Radius *r*), aus, so daß Punkt *B* jetzt gezwungen ist, in seiner Ruhelage zu verharren. Da nun infolge der Starrheit des Körpers *K* jeder andere Punkt unverschieblich mit *A* und *B* verbunden ist, ist durch die auf diese Weise erzielte Festlegung zweier Punkte *A* und *B* die Ruhelage der ganzen Konstruktion gesichert.

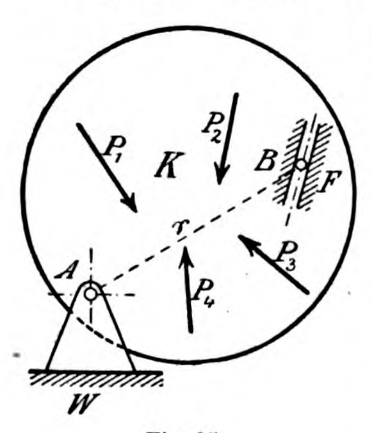


Fig. 35.

Nur wenn die Führung *F* *rechtwinklig* zum Radius *r* stände, könnte der Körper trotz der Stützung eine — allerdings verschwindend kleine — Bewegung ausführen. Auf diesen Ausnahmefall brauchen wir hier aber noch nicht einzugehen.

2. Um nun die Wirkung der verschiedenen Arten von Auflagern zu untersuchen, betrachten wir den in Fig. 36 dargestellten Normalfall: Träger mit einem festen und einem beweglichen Auflager. Im Prinzip stimmt diese Auflagerung überein mit Fig. 35. Wir haben einen Punkt *A*, der vollständig festgehalten ist, und einen Punkt *B*, der sich längs einer Führung verschieben kann.

Um die Konstruktion berechnen zu können, müssen wir von jeder Auflagerkraft drei Bestimmungsstücke angeben: Größe, Richtung und Angriffspunkt.

Die **Größe** des Auflagerdruckes ist stets unbekannt, ihre Ermittlung ist Gegenstand der statischen Berechnung.

Hinsichtlich der **Richtung** zeigt es sich, daß diese je nach der Konstruktion des Auflagers bekannt ist, oder aber durch die Berechnung bestimmt werden muß. Bei dem beweglichen Lager *B* in Fig. 36 kann sich der Lagerteil *U* reibungslos auf dem Widerlager *W* verschieben. Daraus folgt aus der Anschauung, daß die Kraft, mit der *U* und *W* gegeneinander drücken, nur eine be-

Digitized by Google

stimmte Richtung haben kann, nämlich senkrecht zu der Verschiebungsrichtung. Jede andere Richtung der Druckkraft zwischen U und W müßte sich in einer Bewegung von U bemerkbar machen; diese Bewegung ist aber ausgeschlossen, da nach dem Früheren die gezeichnete Lagerung des Trägers hinreicht, um jeden Punkt desselben in der Ruhelage zu sichern. Aus dieser Betrachtung ergibt sich also: Bei einem beweglichen Lager ist die Richtung des Auflagerdruckes ohne weitere Berechnung allein durch die Konstruktion bestimmt; *sie ist nämlich stets senkrecht zur Bewegungsrichtung des Lagers.* Beim festen Auflager liegt der Fall anders. Hier ist (bei beliebig gerichteten Lasten P_1, P_2, P_3, P_4) die Richtung des Druckes zwischen U und W vollständig unbestimmt und muß erst durch die statische Berechnung ermittelt werden.

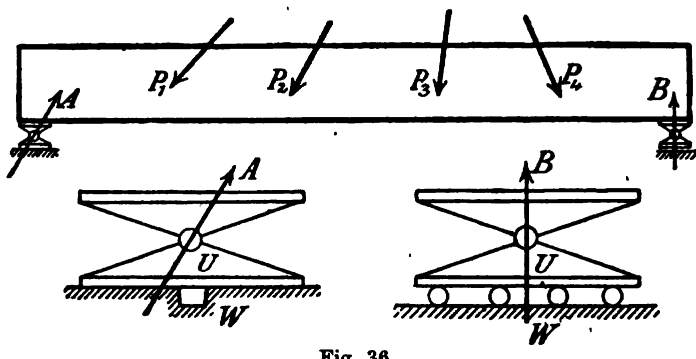


Fig. 36.

Um den **Angriffspunkt** einer Auflagerkraft zu ermitteln, beachten wir, daß eine Kraftübertragung von einem Körper auf einen anderen nur an den Stellen stattfinden kann, an denen sich beide Körper berühren. Richten wir also die Auflager so ein, daß das Widerlager den Träger nur in *einem* Punkte berührt, so kann auch nur an diesem einen Punkte das Widerlager eine Kraft ausüben, und der Angriffspunkt des Auflagerdruckes ist auf diese Weise festgelegt. Bei den Konstruktionen A und B in Fig. 36 findet die Kraftübertragung zwischen Widerlager und Träger allerdings nicht in einem Punkte, sondern in einer Reihe von Punkten, auf dem Umfange des Zapfens, statt. Diese Übertragungsfläche ist aber im Verhältnis zu der gesamten Ausdehnung des Bauwerkes so klein, daß wir für die Berechnung einfach festsetzen: die Berührung des Widerlagers und des Trägers findet nur in *einem* Punkte (wozu wir den Mittelpunkt des Bolzens

Digitized by Google

nehmen) statt. Infolge dieser Annahme ist dann sowohl beim festen als auch beim beweglichen Lager der Angriffspunkt der Auflagerkraft bestimmt. Nur bei einem eingemauerten (eingespannten) Träger ist auch der Angriffspunkt unbekannt, weil sich hier die Auflagerkraft längs einer ganzen Strecke (Einmauerung) verteilt.

Auflagerart	unbekannt	bekannt	
beweglich (1 Unbekannte)	Größe	Richtung	Angriffspunkt
fest (2 „)	Größe Richtung		Angriffspunkt
eingemauert (3 „)	Größe Richtung Angriffspunkt		

3. ***Die Auflagerstäbe.*** Bei der Untersuchung des Körpers K in Fig. 35 waren wir zu dem Resultat gekommen, daß die einfachste Lagerung die ist, bei der der eine Punkt A mit dem Widerlager fest verbunden ist, während ein anderer Punkt B in einer Führung verschieblich gelagert ist. Statt nun A an das Widerlager durch einen Bolzen anzuschließen, können wir den Punkt auch dadurch festlegen, daß wir ihn durch zwei Stäbe, S_1 und S_2, mit dem Widerlager W_1 verbinden. Und die Führung F, in der B sich bewegt, können wir dadurch ersetzen, daß wir Punkt B durch *einen* Stab, S_3, an W_2 anschließen, und zwar so, daß S_3 senkrecht steht zur Führungsrichtung F. Daß dieser Ersatz zulässig ist, ersieht man daraus, daß bei einer Formänderung des Trägers K, z. B. infolge Temperaturänderung, der Punkt B sich auf einem Kreise um O bewegen wird. Da die Bahn des Punktes aber stets sehr klein ist, so können wir statt des Kreisbogens bei B die Tangente an den Kreis setzen; mit anderen Worten: Punkt B bewegt sich zunächst in einer Linie, die senkrecht steht zu S_3. Dieselbe Richtung hatte nach Voraussetzung aber auch die Führung F, so daß die Stützung von B durch den Stab S_3 tatsächlich gleichwertig ist der Stützung durch die Führung F.

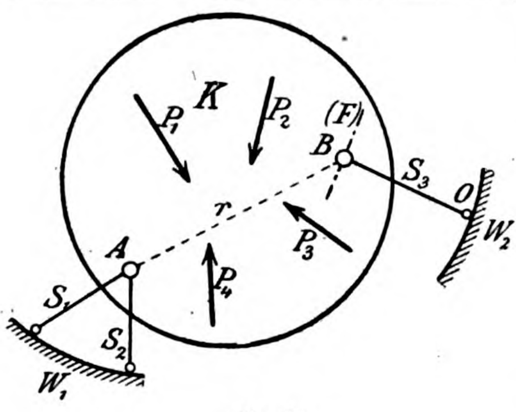


Fig. 37.

Digitized by Google

Derartige Stäbe, die als Ersatz für eine Auflagerkonstruktion dienen, heißen „*Auflagerstäbe*“. Ein festes Lager wird also durch zwei Auflagerstäbe mit beliebigen Richtungen ersetzt, und ein bewegliches Lager durch einen Auflagerstab, dessen Richtung senkrecht genommen werden muß zu der Bewegungsrichtung des zu ersetzenden Lagers. Meistens ist das bewegliche Lager eines Trägers horizontal verschieblich; der Auflagerstab, der ein solches Lager ersetzen soll, muß dann also vertikal stehen und führt in diesem Falle die Bezeichnung „*Pendelstütze*“. Auch die „*Anker*“ sind nichts anderes als Auflagerstäbe zum Ersatz für bewegliche Lager.

§ 15.

Die Methoden zur Berechnung der Auflagerkräfte.

Nachdem wir im vorigen Paragraphen gesehen haben, wieviel Unbekannte bei den einzelnen Auflagerkonstruktionen auftreten, gehen wir jetzt zur eigentlichen Berechnung über.

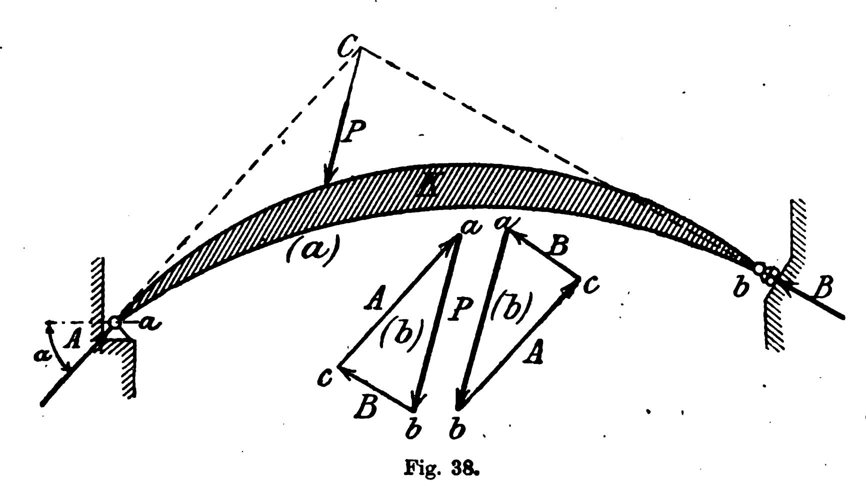


Fig. 38.

Wir gehen wieder von dem wichtigsten Falle aus (Fig. 38): Träger mit einem festen und einem beweglichen Lager. Letzteres nehmen wir, damit die abgeleiteten Formeln allgemein gültig sind, schräg verschieblich an; aus demselben Grunde sind die beiden Auflager in ungleicher Höhe genommen. Nach dem Früheren ist jetzt: beim festen Lager unbekannt 1. die Größe von A, 2. die Richtung, ausgedrückt z. B. durch den Winkel α gegen die Horizontale; bekannt ist dagegen der Angriffspunkt des Auf-

Digitized by Google

lagerdruckes, nämlich Punkt *a*. Beim beweglichen Lager ist unbekannt die Größe von *B*; dagegen sind bekannt die Richtung des Auflagerdruckes (nämlich senkrecht zur Verschiebungsrichtung des Lagers) und der Angriffspunkt (Punkt *b*). Es genügt, wenn wir zunächst als Belastung die eine Kraft *P* annehmen, da sich eine Lastengruppe von beliebig vielen Kräften durch *eine* Kraft, die Ersatzkraft *R*, darstellen läßt.

I. Grundprinzip.

Der grundlegende Gedankengang ist folgender: Die Auflagerkräfte halten den mit den Lasten *P* beanspruchten Körper im Ruhezustand; d. h. sie bilden zusammen mit den Lasten ein **„Gleichgewichtssystem“.** Wenn aber eine Kräftegruppe ein Gleichgewichtssystem bildet, so können wir ganz bestimmte Aussagen machen, nämlich die **Gleichgewichtsbedingungen** anschreiben. Wir tun dies und erhalten hierdurch mathematische Beziehungen zur Ermittlung der bisher unbekannten Kräfte.

II. Verschiedene Anwendungsmethoden des Grundprinzips.

I. Methode: Graphische Bestimmung der Auflagerkräfte mittels Kräftedreieck. (Fig. 38 u. Fig. 34.)

An dem Körper *K* in Fig. 38a greifen im ganzen drei Kräfte an: *P*, *A* und *B*. Nun wissen wir aus § 13: wenn an einem Körper drei Kräfte im Gleichgewichtszustande sein sollen, so müssen sie vor allen Dingen die eine Bedingung erfüllen, daß sie sich in *einem* Punkte schneiden. Wenn ich also in Fig. 38a die beiden Kräfte *P* und *B*, deren Richtungen bereits bekannt sind, im Punkte *C* zum Schnitt bringe, so muß auch die dritte Kraft *A* durch diesen Punkt hindurchgehen. *Hierdurch ist dann die Richtung von A bestimmt.* Um nun noch die Größen von *A* und *B* festzustellen, zeichnen wir in Fig. 38b $P = ab$, ziehen durch *a* und *b* Parallele zu den Richtungen von *A* und *B* und erhalten somit die Größen der Auflagerkräfte.

II. Methode: Graphische Bestimmung der Auflagerkräfte mittels Seilpolygon. (Fig. 39.)

Bei der Untersuchung des Gleichgewichtes mehrerer Kräfte mittels Seilpolygon haben wir in § 12 gesehen, daß die Kräfte nur dann im Gleichgewicht sind, wenn sie zwei Bedingungen erfüllen:

1. Beim Aufzeichnen des Kräftepolygons müssen der Endpunkt der letzten und der Anfangspunkt der ersten Kraft zusammenfallen.

Digitized by Google

2. Beim Aufzeichnen des Seilpolygons müssen der erste und der letzte Seilstrahl in dieselbe Gerade fallen.

Nun zeichnen wir das Kräftepolygon, soweit es sich bereits bestimmen läßt. *A*, die erste Kraft von links aus, ist noch unbekannt; wir beginnen also mit $P = ab$ (Fig. 39b) und ziehen durch einen Endpunkt von *P*, z. B. durch *b*, die Parallele zum Auflagerdruck *B*. Dann nehmen wir einen beliebigen Pol *O* und zeichnen die Polstrahlen *II* und *III*. Polstrahl *I*, der nach dem Anfangspunkt von *A* geht, und Polstrahl *IV*, der nach dem Endpunkt der letzten Kraft, *B*, geht, können noch nicht eingezeichnet werden, da Punkt *c* unbekannt ist. Um nun die Seilstrahlen *II* und *III*, die den Polstrahlen *II* und *III* parallel sind, in Fig. 39a einzuzeichnen, beachten wir folgendes: Seilstrahl *II* muß von der

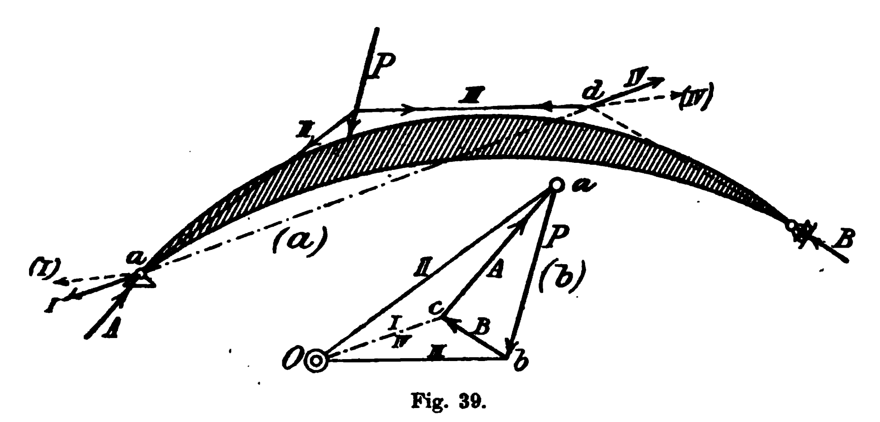


Fig. 39.

Kraft *A* nach der Kraft *P* gehen. Die Richtung von *A* ist jedoch zunächst unbekannt; wir wissen aber die eine Bedingung, daß *A* auf jeden Fall durch Punkt *a* in Fig. 39a gehen muß. Punkt *a* ist also der einzige Punkt auf *A*, den wir kennen, und von diesem Punkte aus ziehen wir Seilstrahl *II* bis zur Kraft *P* und anschließend Seilstrahl *III* bis *B*. Wie sich dann später auch die Kräfte *A* und *B* ergeben werden, die Seilstrahlen *II* und *III* haben auf jeden Fall die vorgeschriebenen Lagen: Seilstrahl *II* geht von der Richtungslinie von *A* nach der von *P*, und Seilstrahl *III* geht von der Richtungslinie von *P* nach der von *B*. Zur Bestimmung der Seilstrahlen *I* und *IV* können wir jetzt die Bedingung benutzen, daß *I* und *IV* in derselben Geraden liegen müssen. Dieses ist, wie Fig. 39a zeigt, nur dann möglich, wenn beide in die Gerade *ad* fallen. Seilstrahl *I* ist nämlich stets parallel zu Seilstrahl *IV*, da beide parallel sind ihrem gemeinsamen Polstrahle *Oc*; würden sie

Digitized by Google

nun eine andere Richtung haben als die der Geraden ad, z. B. so, wie in Fig. 39a punktiert eingezeichnet, so würden sie nebeneinander laufen, und der Körper K könnte nicht im Gleichgewicht sein. Wir haben also durch diese Überlegung die Richtung der Seilstrahlen I und IV bestimmt. Nun können wir, rückwärtsgehend, die Polstrahlen I und IV zeichnen, indem wir durch O die Parallele ziehen zu ad. Diese schneidet die Gerade, die durch b zum Auflagerdruck B parallel gezogen ist, im Punkt c. Dann verbinden wir in Fig. 39b a mit c und erhalten $ca = A$ und $bc = B$.

Um also nach dieser Methode die Auflagerkräfte zu finden, haben wir folgende Regel:

Wir zeichnen die gegebene Kraft P, ziehen vom beliebigen Pole O nach Anfangs- und Endpunkt von P die Polstrahlen II und III und parallel hierzu die Seilstrahlen so, daß der eine Seilstrahl durch den festen Auflagerpunkt geht. Dann verbinden wir die Punkte a und d, in denen die Strahlen II und III die Richtungen von A und B schneiden, durch eine Gerade, die sog. „*Schlußlinie*“, und ziehen durch Pol O die Parallele zu dieser Schlußlinie. Hierdurch bestimmen wir im Kräftepolygon den Schnittpunkt von A und B und zeichnen die Pfeile so ein, daß, wenn man von Punkt a aus den Pfeilen nachgeht, man wieder zum Ausgangspunkt a zurückgelangt.

Statt in Fig. 39a mit II anzufangen, hätten wir auch Strahl III durch a ziehen können. Man muß aber beachten, daß in Fig. 39b A und B so einzuzeichnen sind, daß immer drei Linien, z. B. I, II und A, die sich in Fig. 39a in einem Punkte schneiden, in Fig. 39b die drei Seiten eines Dreiecks bilden. Wir werden von dieser Regel Gebrauch machen, um bei komplizierter Belastung zu entscheiden, welche von den beiden gefundenen Auflagerkräften am festen und welche am beweglichen Lager anzubringen ist.

III. Methode: Analytische Bestimmung der Auflagerkräfte. (Fig. 40.)

Zur analytischen Berechnung wollen wir die Gleichgewichtsbedingung in der Form IIIa von § 13 aufstellen.

Die Richtung der Kraft B ist bekannt, da am beweglichen Lager ja die Auflagerkraft stets senkrecht zur Bewegungsrichtung des Lagers ist. Die Kraftrichtung von B kann also in Fig. 40 schon eingezeichnet werden. Die Kraftrichtung von A ist unbekannt. Wir denken uns, zur bequemeren Berechnung, A in die Seitenkräfte H und V zerlegt, so daß

$$H = A \cdot \cos\alpha_1 \quad \text{und} \quad V = A \cdot \sin\alpha_1$$

Digitized by Google

ist. Dann lauten die Gleichgewichtsbedingungen:

$$\text{(I)} \qquad H = P \cdot \cos\alpha_2 + B \cdot \cos\alpha_3 \,,$$

$$\text{(II)} \qquad V + B \cdot \sin\alpha_3 = P \cdot \sin\alpha_2 \,,$$

$$\text{(III)} \qquad V \cdot x + P \cdot p = H \cdot y + B \cdot b \,.$$

(Der Bezugspunkt E ist, wie bekannt, vollständig willkürlich anzunehmen; x, y, p und b sind die Lote von E auf V, H, P und B.)

In diesen Gleichungen sind unbekannt H, V und B. Dagegen sind bekannt natürlich die Last P mit ihrem Neigungswinkel α_2; ferner der Neigungswinkel α_3 der Auflagerkraft B; und die Lote x, y, p und b, die aus der Figur abzumessen sind. Wir

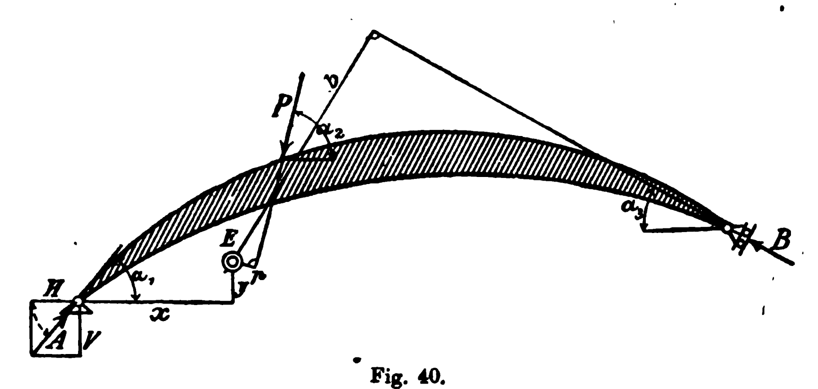


Fig. 40.

schreiben nun die Gleichungen so, daß die Unbekannten immer auf der linken Seite stehen, und erhalten:

$$\text{(I)} \qquad H - B \cdot \cos\alpha_3 = P \cdot \cos\alpha_2 \,,$$

$$\text{(II)} \qquad V + B \cdot \sin\alpha_3 = P \cdot \sin\alpha_2 \,,$$

$$\text{(III)} \qquad V \cdot x - H \cdot y - B \cdot b = -P \cdot p \,.$$

Nun setzen wir die Zahlenwerte ein. Es sei z. B.

$$P = 2400 \text{ kg} \,,$$

$$\alpha_2 = 76^\circ\,; \quad \text{also} \quad \cos\alpha_2 = 0{,}24 \,, \quad \sin\alpha_2 = 0{,}97 \,,$$

$$\alpha_3 = 30^\circ\,; \quad \text{also} \quad \cos\alpha_3 = 0{,}87 \,, \quad \sin\alpha_3 = 0{,}50 \,,$$

$$x = 2{,}10 \text{ m}; \quad y = 0{,}55 \text{ m}; \quad b = 3{,}60 \text{ m}; \quad p = 0{,}30 \text{ m}.$$

Dann erhalten wir:

$$\text{(I)} \qquad H - 0{,}87\,B = 0{,}24\,P = 576 \,,$$

$$\text{(II)} \qquad V + 0{,}50\,B = 0{,}97\,P = 2328 \,,$$

$$\text{(III)} \qquad 2{,}10\,V - 0{,}55\,H - 3{,}60\,B = -0{,}30\,P = -720 \,.$$

Digitized by Google

Dieses sind, wie man sieht, drei einfache Gleichungen mit den drei Unbekannten H, V und B. Man kann sie also auflösen und findet dadurch: $B = 1030$ kg, $H = 1470$ kg, $V = 1810$ kg. Aus H und V ergibt sich schließlich nach Fig. 40

die Größe von A durch: $A = \sqrt{H^2 + V^2} = 2330$ kg,

„ Richtung „ „ „ $\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{V}{H} = 1{,}23; \; \alpha_1 = 51^\circ$.

Somit sind dann die Auflagerkräfte vollständig bestimmt.

Für die praktische Ausrechnung ist der eingeschlagene Weg aber sehr unbequem, da er die Auflösung von drei Gleichungen mit drei Unbekannten erfordert. Im vorliegenden Beispiele wurde die Rechnung jedoch absichtlich so gestaltet, um zu zeigen, daß man bei jeder beliebigen Wahl von E dennoch zum Ziele kommen muß. Wie man in den einzelnen Fällen geschickter vorgehen kann, werden wir beim Durcharbeiten der folgenden Paragraphen sehen.

Vorher wollen wir jedoch noch eine sehr wichtige Betrachtung anstellen: Wir haben bei unserem Beispiele den allgemeinen Fall vorausgesetzt, der bei einem Träger mit einem festen und einem beweglichen Lager überhaupt vorkommen kann, indem wir ein schräg verschiebliches Lager, ferner die Lager in verschiedener Höhe und außerdem schräg gerichtete Belastung annahmen. Es zeigte sich nun, daß auch hier nur drei Unbekannte auftreten und daß diese drei Unbekannten unter allen Umständen mit Hilfe der Gleichgewichtsbedingungen zu berechnen sind. Ein solches System heißt *„statisch bestimmt gelagert“* oder *„äußerlich statisch bestimmt“*. Der Name kommt daher, weil bei derartigen Konstruktionen die Auflagerkräfte (äußeren Kräfte) allein mit Hilfe der Gleichgewichtsbedingungen, die die Statik als Teil der allgemeinen Mechanik zur Verfügung stellt, berechnet werden können.

Betrachten wir hierzu als Gegensatz den Fall, daß der in den Fig. 38—40 untersuchte Träger auch auf der rechten Seite ein festes Lager hätte. Wenn jetzt eine Kraft P auf den Körper einwirkt, so müssen wieder A, P und B durch *einen* Punkt gehen (vgl. Methode I). Jetzt können wir aber diesen Punkt C nicht mehr angeben; die Richtung des Auflagerdruckes B ist unbekannt, da ein festes Lager Auflagerkräfte in jeder Richtung zu übertragen vermag. Wir haben also jetzt vier Unbekannte, A, α_1, B, α_3. Da man aber aus drei Gleichungen niemals vier Unbekannte ausrechnen kann, so ist diese Aufgabe, bei einem Träger

Digitized by Google

mit zwei festen Lagern (einem sog. Zweigelenkbogen) die Auflagerkräfte zu bestimmen, mit den bisher entwickelten Hilfsmitteln nicht zu lösen. Man nennt eine solche Konstruktion *„statisch unbestimmt“* gelagert. Eine kurze Andeutung, wie man bei solchen Aufgaben vorgeht und namentlich — was in vielen Fällen noch wichtiger ist — wie man sich hierbei durch Annahmen helfen kann, bringt der § 18.

§ 16.

Spezialfall: Der einfache Balken mit vertikaler Belastung.

Die Trägerart, die in der Praxis weitaus am meisten vorkommt, ist der in Fig. 41 dargestellte sogenannte *„einfache Balken“*. Auf die innere Konstruktion kommt es bei der Berechnung der Auflagerkräfte nicht an, der Träger kann ein gewalztes Profil, ein genieteter oder ein Fachwerkträger sein; das Kennzeichnende für den *„einfachen Balken“* besteht darin, daß er ein festes Lager (bei A) und ein im *horizontalen* Sinne bewegliches (bei B) besitzt. Außerdem wollen wir noch die Einschränkung machen, daß die Balkenachse horizontal liegt und daß die Lasten vertikal dazu wirken. (Fig. 41.)

Infolge dieser Annahme wird die Berechnung der Auflagerdrücke sehr einfach. Zunächst ist es klar, daß sowohl A als auch B vertikal wirken. Bei B folgt dieses aus dem Umstande, daß das Lager im horizontalen Sinne verschieblich ist; und bei A muß es so sein, weil sonst der Auflagerdruck A die einzige Kraft am Träger wäre, die in der Gleichung $R_x = 0$ eine horizontale Projektion abgeben würde.

I. Die *erste Methode* des vorigen Paragraphen läßt jetzt allerdings im Stiche. Es ist nicht möglich, ein der Fig. 38 entsprechendes Kräftedreieck zu konstruieren. Dieses würde in eine Gerade fallen, so daß wir nur $A + B$, nicht aber A und B getrennt angeben können.

II. Um so einfacher wird jedoch die *zweite Methode*. Bei dem Träger im vorigen Paragraphen war der feste Auflagerpunkt der einzige Punkt, den wir zunächst von der Kraft A angeben konnten. Deshalb mußte Seilstrahl II, der zwischen A und P liegen muß, von diesem Angriffspunkte von A nach P gezogen werden. In Fig. 41 ist die Aufgabe jedoch bedeutend einfacher. Die Größe von A ist allerdings unbekannt; die Richtung dagegen ist gegeben, da nach obigem auch beim festen Lager der Auflagerdruck vertikal sein muß. Wir können also mit Strahl II von einem beliebigen

Digitized by Google

Punkte von A anfangen, ihn bis zur Kraft P ziehen und dann Strahl III ansetzen. Wie sich dann später auch die Größe von A ergeben wird, der Seilstrahl II hat immer die vorgeschriebene Lage zwischen A und P. Die Auflagerkräfte A und B müssen nun so bestimmt werden, daß der erste Seilstrahl I mit dem letzten Seilstrahle IV in eine Gerade fällt. Wir zeichnen deshalb die *Schlußlinie* ein (in der Figur mit ss bezeichnet), bestimmen hierdurch die Richtung der Seilstrahlen I und IV und dann die beiden zusammenfallenden Polstrahlen I, IV, indem wir durch O die Parallele zu ss ziehen. Diese Parallele schneidet A und B ab, und zwar ist A die Strecke zwischen I und II, da im Seilpolygon A, I und II zusammenstoßen. Wir haben hiermit unsere

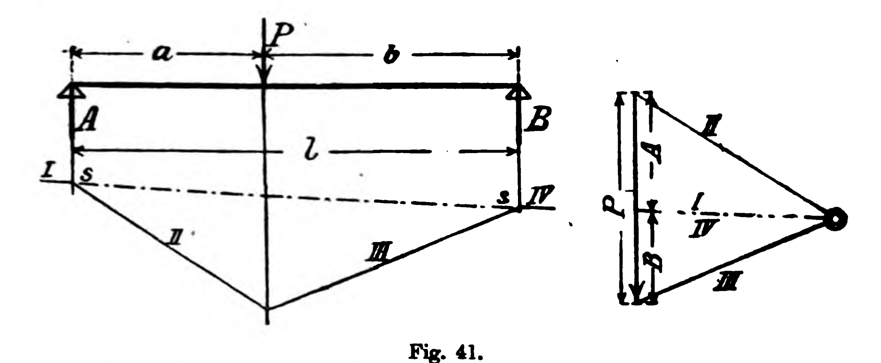


Fig. 41.

Aufgabe gelöst: Die in der Reihenfolge A, P, B aufgetragenen Kräfte ergeben

1. ein Kräftepolygon, bei dem der Endpunkt der zuletzt aufgetragenen Kraft zusammenfällt mit dem Anfangspunkt der ersten Kraft;

2. ein Seilpolygon, bei dem der erste Strahl I in einer Geraden liegt mit dem letzten Strahl IV.

III. Die *analytische Bestimmung* der Auflagerkräfte ist wohl die am häufigsten angewandte. Und zwar ist besonders zweckmäßig die Methode IIIb (§ 12 und 13). Die x-Achse nehmen wir natürlich horizontal, und die I. Bedingung sagt dann aus, daß überhaupt keine Horizontalkräfte auftreten (auch nicht am festen Lager). Für die II. und III. Bedingung müssen wir zwei Bezugspunkte E und F wählen, deren Verbindungslinie nicht rechtwinklig zur x-Achse steht. Wir nehmen hierzu die Auflagerpunkte B und A. Dann haben wir nämlich den Vorteil, daß in der Gleichung (II) der Auflagerdruck B fortfällt, da er das statische Moment Null

Digitized by Google

ergibt; während in Gleichung (III) entsprechend A fortfällt. Die Bedingungen II und III enthalten dann je nur eine Unbekannte und werden dadurch besonders bequem:

$$\text{(II)} \qquad A \cdot l = P \cdot b\,;$$
$$\text{(III)} \qquad B \cdot l = P \cdot a\,.$$

Hieraus ergibt sich sofort:

$$A = \frac{P \cdot b}{l}\,; \qquad B = \frac{P \cdot a}{l}\,.$$

Auf eins sei an dieser Stelle hingewiesen. Häufig wird die Ableitung der Auflagerkräfte folgendermaßen gegeben: „Der Balken ‚kann‘ sich um den Punkt B drehen. Folglich ‚müssen‘ für diesen Punkt die Momente aufgestellt werden, also $A \cdot l = P \cdot b$. Ferner ‚kann‘ er sich um A drehen ... usw.“ Eine solche Ableitung ist direkter Unfug. Erstens braucht B überhaupt kein Drehpunkt zu sein. Denn, wenn z. B. B das bewegliche Lager ist, so dreht sich der Balken gar nicht um B (falls A nachgibt). Sondern er *gleitet* längs der Führung von B, also in horizontaler Richtung. B ist also durchaus kein Drehpunkt, d. h. feststehender Punkt, da er ja selbst die Bewegung mitmacht. Zweitens ist es aber für die Anwendung der Gleichgewichtsbedingungen vollständig gleichgültig, um welchen Punkt sich der Balken eigentlich drehen würde. Aus der Ableitung der Gleichgewichtsbedingungen geht klar hervor, daß wir die Bezugspunkte *vollständig beliebig* nehmen können. Von „Drehpunkten“ ist niemals die Rede gewesen. Man könnte die Bezugspunkte auch bei dieser Aufgabe ganz beliebig annehmen (man tue dieses!) und kommt trotzdem zu denselben Werten für die Auflagerkräfte. Nur um die Ausdrücke (II) und (III) so bequem wie möglich zu machen, haben wir B und A zu Bezugspunkten genommen. Mit dem „Drehen“ des Balkens hat diese Wahl aber absolut gar nichts zu tun.

Man muß sich über diese Sachen Klarheit verschaffen. In der Praxis findet man so häufig eine vollständig verschwommene Vorstellung über das Wesen der Gleichgewichtsbedingungen. Da wird nach „Drehpunkten“ gesucht, um die Momente aufzustellen; dann werden die mutmaßlichen Verschiebungen aufgesucht usw., und schließlich kommt aus diesem Umhertasten ein großer Wirrwarr heraus. Nur ein eingehendes Durchdenken der wissenschaftlichen Grundlagen der Statik kann dagegen helfen.

Digitized by Google

§ 17.

Ergänzungen und Beispiele zu § 15 und § 16.

Wiederholung.

Bei der Untersuchung von Auflagerkräften muß man sich zunächst über die Zahl der Auflagerunbekannten klar werden (§ 14, Zusammenstellung Seite 70). Die eigentliche Berechnung erfolgt dann stets durch **Anwendung der Gleichgewichtsbedingungen.**

Entsprechend den verschiedenen Formen, in denen wir die Gleichgewichtsbedingungen aufgestellt haben (§ 12, 13), können wir sie natürlich auch bei der Berechung der Auflagerkräfte in verschiedenen Formen verwenden. Nämlich:

I. Graphisch durch Kräftedreieck (Bestimmung des Schnittpunktes A, B, P).
II. „ „ Seilpolygon (Geschl. Kräftepolygon; geschl. Seilp.).
III. Analytisch. Hierfür 3 Schreibweisen:

IIIa. $R_x = 0$; $R_y = 0$; $\Sigma M_E = 0$;

IIIb. $R_x = 0$ oder $R_y = 0$; $\Sigma M_E = 0$; $\Sigma M_F = 0$;

IIIc. $\Sigma M_E = 0$; $\Sigma M_F = 0$; $\Sigma M_G = 0$.

Bei der analytischen Methode können die Bezugspunkte E (F, G) an und für sich vollständig beliebig genommen werden. Nur, um die Momentengleichungen möglichst kurz zu erhalten, werden wir besondere Punkte als Bezugspunkte erwählen.

Erste Aufgabe.

Der in Fig. 42 dargestellte Binder hat eine Spannweite von $l = 12{,}0$ m und eine Binderentfernung von 5,0 m. Die Auflagerkräfte infolge Winddruck sind zu bestimmen!

Das feste Lager befinde sich auf der linken Seite. Die Lasten seien:

$W_1 = 1556$ kg; $W_2 = 360$ kg; $W_3 = 625$ kg; $W_4 = 143$ kg,

sämtlich rechtwinklig zur zugehörigen Dachfläche.

I. Bestimmung von A und B mittels Kräftedreieck. (Fig. 42.)

Die Aufgabe unterscheidet sich von der in Fig. 38 behandelten dadurch, daß wir nicht *eine* Kraft, sondern *vier* Kräfte haben. Wir ersetzen also diese zunächst durch ihre Ersatzkraft R. Um letztere zu finden, reihen wir W_1, W_2, W_3 und W_4 zu einem Kräftepolygon $abcde$ in Fig. 42b aneinander und finden Größe und Richtung von R dargestellt durch ae. Die Lage von R bestimmen wir am besten mittels Seilpolygon, da für den Kräftezug die Schnittpunkte der einzelnen Kräfte ziemlich ungünstig liegen. Wir ziehen also vom beliebigen Pole O die Polstrahlen II, III, IV, V, VI und parallel hierzu die entsprechenden Seilstrahlen. (Der erste Polstrahl ist diesmal mit „II“ numeriert, weil wir

Digitized by Google

Fig. 42 auch für die folgende Methode verwenden wollen; aus demselben Grunde ist der erste Seilstrahl, *II*, durch das feste Auflager *A* gelegt. Wenn wir diese Figur nur zur Erläuterung der vorliegenden Methode zu benutzen hätten, würden wir natürlich

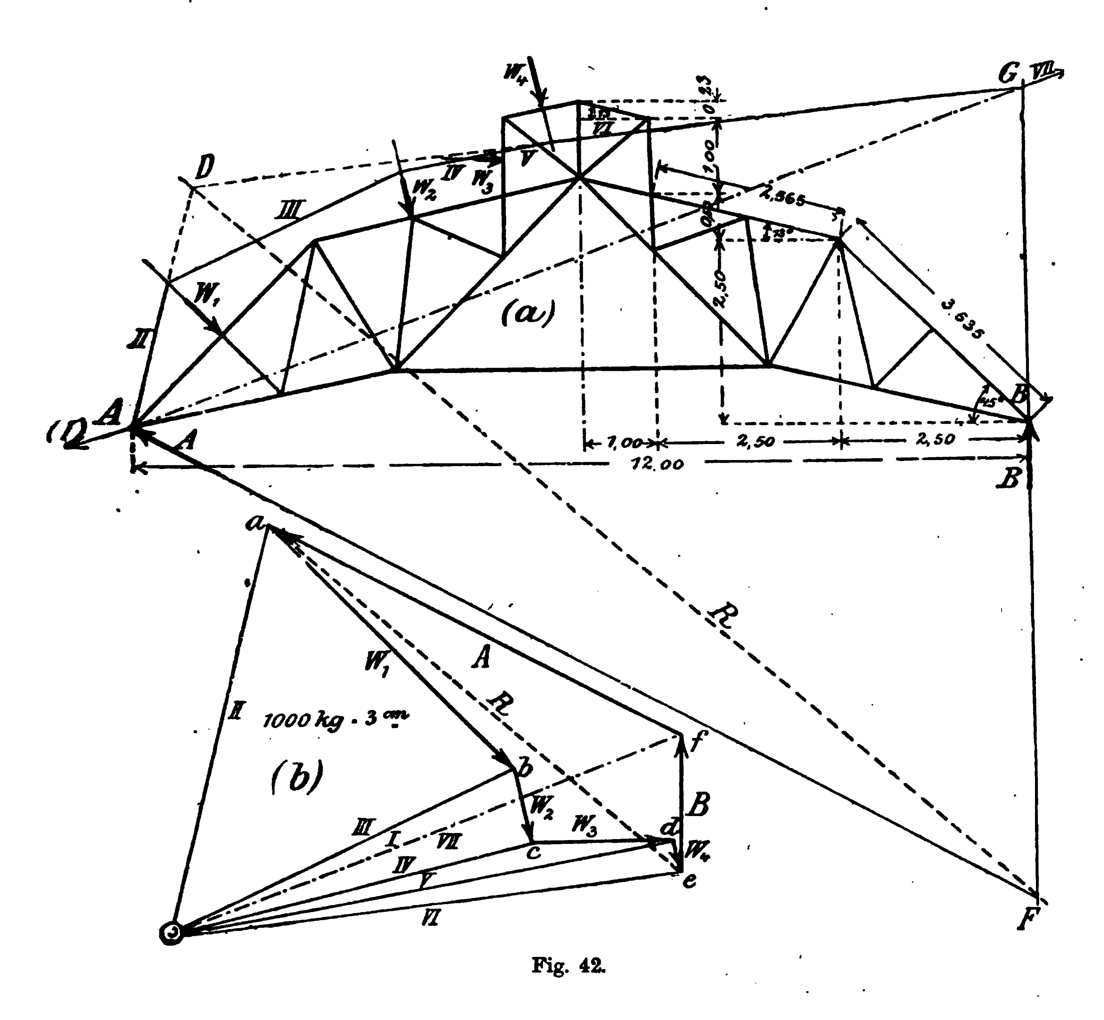


Fig. 42.

den ersten Polstrahl mit *I* bezeichnen und den ersten Seilstrahl ganz beliebig nach der Kraft W_1 ziehen.)

Durch den Schnittpunkt *D* der beiden äußeren Seilstrahlen, *II* und *VI*, zeichnen wir dann die Parallele zu *ae* und haben somit die Lage von *R* bestimmt.

Nun haben wir an dem Binder drei Kräfte, *A*, *R* und *B*, die miteinander im Gleichgewicht sein sollen. Die Richtung der

Digitized by Google

einen Kraft R ist bereits bestimmt; die Richtung von B ist aus der Konstruktion bekannt, nämlich senkrecht zu dem (im horizontalen Sinne verschieblichen) Lager B. Bringen wir also B und R in F zum Schnitte, so muß durch diesen Punkt auch die Richtung der Auflagerkraft A am festen Lager gehen. Die Größen von A und B bestimmen wir dann in der Weise, daß wir durch a die Parallele zu AF und durch e die Parallele zu BF ziehen, oder umgekehrt. (Wir wollen jetzt den Angriffspunkt des Auflagerdruckes A ebenfalls mit A bezeichnen, da Verwechslungen zwischen Kraft A und Punkt A nicht vorkommen können; entsprechend bei B.)

Wir haben also jetzt am Binder sechs Kräfte, A, W_1, W_2, W_3, W_4, B, wirkend, die die Eigenschaft haben, daß

1. beim Aufzeichnen des Kräftepolygons der Anfangspunkt f der ersten Kraft zusammenfällt mit dem Endpunkte der letzten Kraft,

2. die drei Kräfte A, B und R (als Ersatzkraft von W_1, W_2, W_3, W_4) sich in *einem* Punkt schneiden.

Die Gesamtwirkung sämtlicher sechs Kräfte wird also tatsächlich die sein, daß der Binder in der Gleichgewichtslage bleibt.

II. Bestimmung von A und B mittels Seilpolygon. (Fig. 42.)

Wir verfahren bei vier Kräften ebenso wie wir es in Fig. 39 mit einer Kraft getan haben; d. h. wir zeichnen zunächst das Kräftepolygon so weit auf, als es sich aus den gegebenen Kräften W_1, W_2, W_3 und W_4 bereits aufzeichnen läßt. Nun ziehen wir vom beliebigen Pole O die Polstrahlen. Wenn wir die Kräfte in der Reihenfolge von links nach rechts nehmen, so ist A die erste Kraft. Punkt f, der Anfangspunkt von A im Kräftepolygon ist jedoch noch unbekannt. Wir können deshalb Polstrahl I noch nicht zeichnen und beginnen mit II, III, IV, V, VI. Parallel hierzu ziehen wir die Seilstrahlen II, III, IV, V, VI, und zwar so, daß der Seilstrahl II, der von der Kraft A nach der Kraft W_1 gehen muß, durch den Angriffspunkt A des Auflagerdruckes A geht. (Wäre die Richtung von A bekannt, so könnte man natürlich den Seilstrahl II an beliebiger Stelle zwischen A und W_1 ziehen; jetzt kennen wir aber von der Kraft A nur den Angriffspunkt und benutzen diesen, um Strahl II in die vorgeschriebene Lage zwischen A und W_1 einzuzeichnen.) Nun ziehen wir die „*Schlußlinie*“ AG, die den Schnittpunkt G von Strahl VI und B mit dem Schnittpunkte A von Strahl II und Auflagerdruck A

Digitized by Google

verbindet. Denken wir uns nun die beiden noch fehlenden Strahlen *I* und *VII* in Fig. 42a eingezeichnet, so müssen diese in derselben Geraden liegen, d. h. sie haben die Richtung der Schlußlinie AG. Nun finden wir die Richtung des Polstrahles *I*, *VII*, indem wir durch O die Parallele zu AG ziehen; diese Parallele schneidet sich mit der Geraden, die durch e zum Auflagerdruck B parallel gezogen ist, im Punkte f. Wir erhalten somit $B = ef$ und $A = fa$.

Die sechs Kräfte A, W_1, W_2, W_3, W_4, B haben also die Eigenschaft, daß

1. beim Aufzeichnen des Kräftepolygons der Anfangspunkt f der ersten Kraft, A, zusammenfällt mit dem Endpunkt der letzten Kraft B;

2. beim Aufzeichnen des Seilpolygons der erste Seilstrahl *I* in derselben Geraden liegt wie der letzte Seilstrahl *VII*.

Nach den Untersuchungen in § 12 ist das Kräftesystem auf Grund dieser beiden Eigenschaften im Gleichgewichtszustand.

Der Punkt f, durch den wir schließlich A und B gefunden haben, wurde also so bestimmt, daß wir durch Pol O die Parallele zu der Schlußlinie und durch Punkt e die Parallele zu B (d. h. zu dem Auflagerdruck, dessen Richtung bekannt ist) zeichneten. Daß wir diese Parallele durch den Punkt e und nicht durch Punkt a ziehen müssen, ergibt sich daraus, daß in Fig. 42a die Linien *VI*, *VII* und B sich in einem Punkte schneiden. Sie müssen also in Fig. 42b die drei Seiten eines Dreiecks bilden, und diese Bedingung ist nur dann erfüllt, wenn der Auflagerdruck B an e anschließt. (Man überzeuge sich, daß man zwei ganz andere — falsche — Werte von A und B erhält, wenn man die Parallele zu B durch den Punkt a zieht und dann mit Polstrahl *I*, *VII* zum Schnitte bringt.)

Wir haben beim Aufzeichnen der Kräfte immer die Reihenfolge eingehalten, in der sie an dem Körper selbst angreifen. In der Tat bekommt man auf diese Weise im allgemeinen die übersichtlichsten Figuren; es ergibt sich dann ohne weiteres A als „erste" und B als „letzte" Kraft. Man sieht übrigens aus Fig. 42a recht deutlich, wie die eigentlich vorhandenen sechs Kräfte schließlich ersetzt sind durch die beiden äußersten Kräfte *I* und *VII*, und daß diese nur dann im Gleichgewicht sein werden, wenn sie in derselben Geraden liegen, gleiche Größe und entgegengesetzte Richtungen haben.

Digitized by Google

III. Analytische Bestimmung von A und B. (Fig. 43.)

Wenn wir bei einer analytischen Untersuchung schräge Kräfte haben, zerlegen wir sie im Interesse einfacher Zahlenrechnungen stets in ihre horizontalen und vertikalen Seitenkräfte. Wir bestimmen also:

$W_1 \cdot \cos\alpha_1 = 1556 \cdot \cos 45° = 1100$ kg; $\quad W_1 \cdot \sin\alpha_1 = 1556 \cdot \sin 45° = 1100$ kg

$W_2 \cdot \cos\alpha_2 = 360 \cdot \cos 77° = 80$ „ $\quad W_2 \cdot \sin\alpha_2 = 360 \cdot \sin 77° = 350$ „

$W_3 \cdot \cos\alpha_3 = 625 \cdot \cos 0° = 625$ „ $\quad W_3 \cdot \sin\alpha_3 = 625 \cdot \sin 0° = 0$ „

$W_4 \cdot \cos\alpha_4 = 143 \cdot \cos 77° = 30$ „ $\quad W_4 \cdot \sin\alpha_4 = 143 \cdot \sin 77° = 140$ „

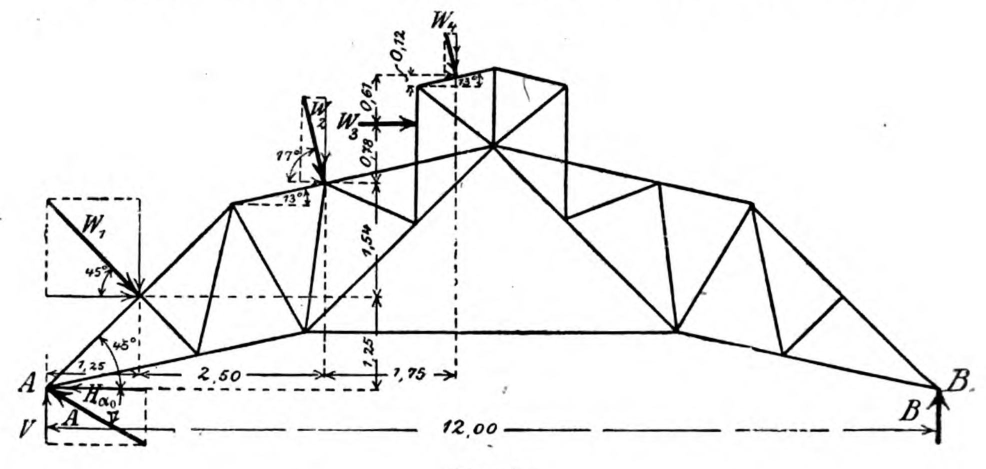


Fig. 43.

Ferner führen wir nicht die schräge Auflagerkraft A (am festen Lager) und ihren Neigungswinkel α_0 als Unbekannte ein, sondern statt dessen die vertikale Seitenkraft V und die horizontale Komponente H.

Zur Berechnung der Auflagerkräfte eignet sich hier am besten die Methode (IIIb). Als Bezugspunkte nehmen wir die Auflagerpunkte A und B, weil dann beim Aufstellen der Momentensummen einige statische Momente gleich Null werden (aber auch nur aus diesem Grunde!). Als Projektionsachse nehmen wir die Horizontale. Dann wird

(I) $H = 1100 + 80 + 625 + 30$,

(II) $V \cdot 12{,}00 + (1100 \cdot 1{,}25 + 80 \cdot 2{,}79 + 625 \cdot 3{,}57 + 30 \cdot 4{,}18) = (1100 \cdot 10{,}75 + 350 \cdot 8{,}25 + 140 \cdot 6{,}50)$,

(III) $B \cdot 12{,}00 = (1100 \cdot 1{,}25 + 80 \cdot 2{,}79 + 625 \cdot 3{,}57 + 30 \cdot 4{,}18) + (1100 \cdot 1{,}25 + 350 \cdot 3{,}75 + 140 \cdot 5{,}50)$

Digitized by Google

Hieraus folgt

(I) $$H = 1835 \text{ kg}$$

(II) $$V \cdot 12{,}00 + 3955 = 15623\,; \qquad V = \frac{15623 - 3955}{12{,}00} = 972 \text{ kg}\,,$$

(III) $$B \cdot 12{,}00 = 3955 + 3457\,; \qquad B = \frac{3457 + 3955}{12{,}00} = 618 \text{ kg}\,.$$

Nachdem wir H und V ermittelt haben, finden wir daraus A selber:

$$A = \sqrt{H^2 + V^2} = \sqrt{1835^2 + 972^2} = 2077 \text{ kg}$$

und die Richtung aus:

$$\operatorname{tg}\alpha_0 = \frac{V}{H} = \frac{972}{1835} = 0{,}53\,; \qquad \alpha_0 = 28^0\,.$$

Bemerkungen: Die analytische Methode führt also recht schnell zum Ziel. Auch die Gleichungen (II) und (III) sind gar nicht so schlimm. Nur muß man sie übersichtlich hinschreiben, indem man z. B. die Momente aller horizontalen Lasten für sich in Klammern einschließt und ebenso die Momente aller vertikalen Lasten. Die Hauptsache ist, daß man systematisch vorgeht und die Bezugspunkte für die Momente günstig wählt. Hierzu merke man:

Die, der Richtung nach unbekannte, Auflagerkraft A am festen Lager zerlegt man in H und V. Als den einen Bezugspunkt nimmt man dann den Schnittpunkt von H und B. [Hierdurch wird erreicht, daß H und B, da sie durch den Bezugspunkt hindurchgehen, die statischen Momente Null ergeben, so daß V als einzige Unbekannte in der Gleichung übrigbleibt; s. Gleichung (II)]. Als den zweiten Bezugspunkt nimmt man den Angriffspunkt von A (d. h. den Schnittpunkt von H und V). [Dann fallen nämlich H und V fort, und es bleibt nur B übrig; s. Gleichung (III)]. Außer den beiden Momentengleichungen nimmt man als dritte Bestimmungsgleichung noch zweckmäßig $R_x = 0$. Aus dieser ergibt sich dann direkt H [s. Gleichung (I)].

Die Methoden IIIa oder IIIc kann man benutzen, um die Berechnung hinsichtlich Rechenfehler zu kontrollieren. Namentlich die zweite Gleichung von Methode IIIa ist hierzu gut:

$$V + B = 1100 + 350 + 0 + 140\,,$$
$$972 + 618 = 1100 + 350 + 0 + 140\,.$$

Man sieht, wir haben richtig gerechnet.

Zum Schlusse noch eine Bemerkung: Wenn man in einem solchen Falle die Auflagerkräfte zu berechnen hat, so weiß man

Digitized by Google

zunächst doch gar nicht, ob z. B. H nach rechts oder links, oder V resp. B nach oben oder nach unten zeigen wird. (Der Auflagerdruck kann ja negativ werden, d. h. nach unten wirken, so daß Verankerung mit dem Widerlager nötig wird.) In solchen Fällen geht man so vor, daß man jede Auflagerkraft H, V und B so annimmt, wie sie *wahrscheinlich* wirken wird. (V und B nimmt man meistens nach *oben* wirkend an.) Hat man sich geirrt, d. h. geht die betreffende Kraft umgekehrt, als man angenommen hat, so zeigt sich dies in der Rechnung dadurch von selber an, daß das Resultat mit *negativem* Vorzeichen herauskommt (s. Beispiel 3).

Zusammenfassung zur 1. Aufgabe.

Zu den graphischen Methoden ist nichts Besonderes zu bemerken. Beim analytischen Verfahren hatten sich folgende praktische Regeln ergeben:

1. Zunächst jede schräge Kraft horizontal und vertikal zerlegen.

2. Dann: H aus $R_x = 0$,
   V „ $\Sigma M = 0$ (Bezugspunkt: Schnittpunkt von H und B),
   B „ $\Sigma M = 0$ („ „ „ H „ V),

   Kontrolle: $R_y = 0$ ($V + B$ = Summe der Vertikalkomp. aller Lasten).

Bei einem schräg beweglichen Lager ist der Schnittpunkt von H und B unbequem zu bestimmen (s. Fig. 40). Dann zu empfehlen:

Zunächst B aus $\Sigma M = 0$ (Bezugspunkt: Schnittpunkt von H und V).
Hierauf H „ $R_x = 0$; V aus $R_y = 0$.

Zweite Aufgabe.

Bei der Dachkonstruktion Fig. 44 sind die Auflagerkräfte zu berechnen!

Allgemeines: Fig. 44 stellt einen Binder dar, der eine sehr gute Raumausnützung des Dachgeschosses gewährt und deshalb besonders bei Bauten in Großstädten vielfach verwendet wird. Er bildet einen sogenannten geknickten Träger. Bei A steht er auf dem Deckenträger des obersten Geschosses, bei B ist er auf einer Stütze gelagert. Nehmen wir an, daß diese oben und unten gelenkartig angeschlossen ist (Fig. 44c), so gestattet sie dem Punkte B eine Bewegung in horizontaler Richtung. Sie wirkt also ebenso wie ein horizontales, bewegliches Lager; in der Tat kann man ja die Stütze fortlassen, die Mauer bis zum Punkte B führen und hier ein bewegliches Lager anordnen. Derartige Stützen, die um ihren Fußpunkt D frei pendeln können, heißen „*Pendelstützen*“. Die Kraft, die diese Stütze aufzunehmen hat, hat immer die Richtung DB, da B und D die einzigen Punkte sind, in

Digitized by Google

denen die anschließenden Körper (der Binder und der Deckenträger) die Stütze berühren. Erfährt der Binder infolge Belastung oder Temperaturveränderung eine Formänderung, so daß Punkt B sich etwas verschiebt, so macht die Stütze diese Bewegung mit und stellt sich also etwas schräg. Die Druckkraft in der Stütze hat aber auch jetzt die Richtung DB, d. h. sie fällt auch jetzt

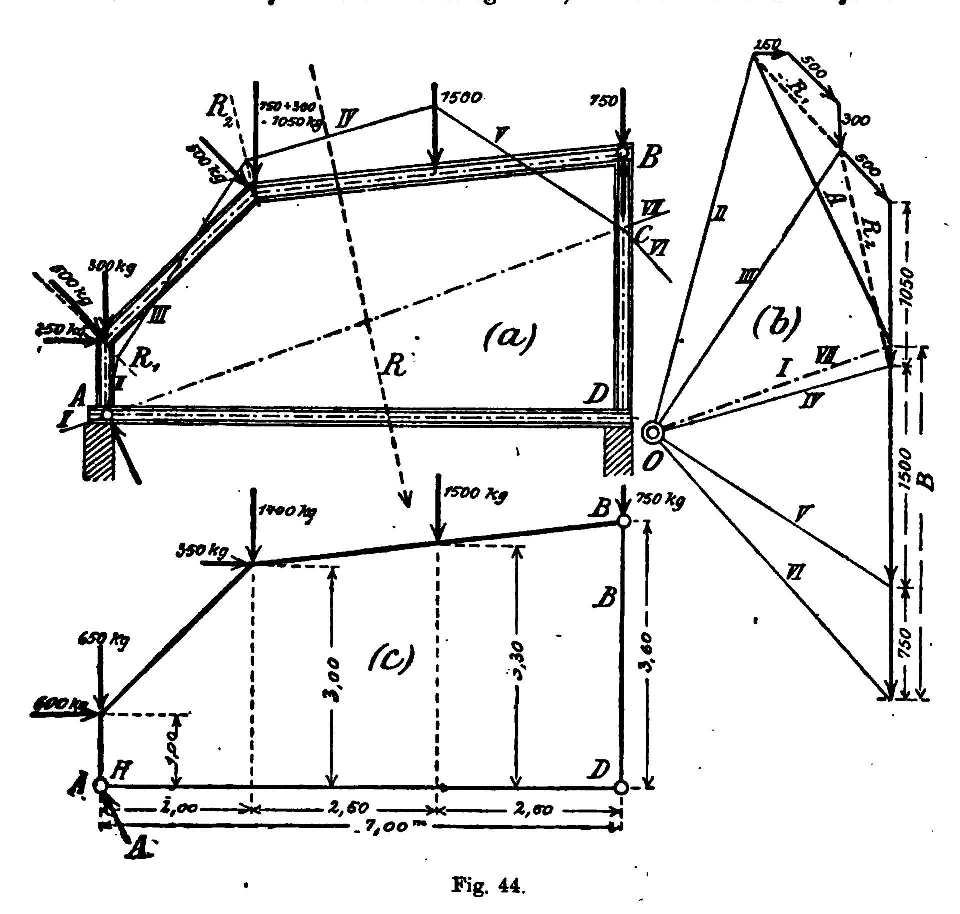


Fig. 44.

mit der Stabachse zusammen und beansprucht die Stütze nur auf Druck und Knickung. Dieses ist ein Vorzug der Pendelstütze gegenüber der Stützenkonstruktion mit eingespanntem Fuße, die sofort Biegungsbeanspruchung bekommt, sobald Punkt B seine Lage verändert.

An dem vorliegenden Binder haben wir nun:

bei A, dem festen Lager, unbekannt Größe und Richtung des Auflagerdruckes, bekannt Angriffspunkt A;

Digitized by Google

bei B, dem beweglichen Lager, unbekannt die Größe, bekannt die Richtung DB und der Angriffspunkt B des Auflagerdruckes. Im ganzen also drei Unbekannte, die Lagerung ist statisch bestimmt.

Die Berechnung soll durchgeführt werden für die in Fig. 44a eingeschriebenen Lasten. (Die Aufstellung dieser Zahlen erfolgt später im Zusammenhange mit der Festigkeitsberechnung. Jetzt wollen wir die Lasten als gegeben annehmen und nur die Auflagerkräfte bestimmen.)

Zur Ermittlung der Auflagerkräfte benutzen wir wieder die drei Methoden.

I. Graphisch mittels Kräftedreieck.

Hierbei bestimmen wir zunächst die Ersatzkraft R (am besten mittels Seilpolygon, die Hilfslinien sind in Fig. 44a nicht eingezeichnet), bringen diese mit dem Auflagerdruck B, dessen Richtung bereits bekannt ist, zum Schnitt und verbinden den Schnittpunkt mit A. Hierdurch ist dann auch die Richtung von A bestimmt. Jetzt ziehen wir durch den Anfangspunkt des Kräftepolygons die Parallele zu A und durch den Endpunkt die Parallele zu B (oder umgekehrt) und bestimmen die Größen von A und B. (Die Zeichnung wird recht unbequem.)

II. Graphisch mittels Seilpolygon.

Bei dieser Methode reihen wir zunächst die gegebenen Lasten zu einem Kräftepolygon aneinander, nehmen einen beliebigen Pol O und ziehen die Polstrahlen. Um aber möglichst klare Figuren zu bekommen, sind vorher die drei Kräfte, die an dem unteren Knickpunkte des Binders angreifen, durch ihre Ersatzkraft R_1 (Fig. 44b und 44a) ersetzt, und die beiden Kräfte am oberen Knick durch ihre Ersatzkraft R_2. Wir haben dann am Binder nur die vier Lasten R_1, R_2, 1500 kg, 750 kg. Nun ziehen wir Seilstrahl II durch den festen Auflagerpunkt parallel zu Polstrahl II, anschließend daran die Seilstrahlen III, IV, V, VI, und verbinden den Schnittpunkt A, in dem der Strahl II den Auflagerdruck A schneidet, mit dem Schnittpunkte C von Strahl VI und Auflagerdruck B. Diese Verbindungslinie (Schlußlinie) bestimmt die Richtung der Seilstrahlen I und VII. Zu diesen Strahlen parallel wird dann durch O der Polstrahl I, VII gezogen. Um nun B zu bestimmen, müssen wir durch den einen Endpunkt des Kräftepolygons in Fig. 44b die Parallele zu der Richtung von B zeichnen.

Digitized by Google

Welcher von den beiden Endpunkten des Polygons zu nehmen ist, ergibt sich daraus, daß die Linien *VII*, *VI*, *B*, die sich in Fig. 44a in einem Punkte schneiden, in Fig. 44b die drei Seiten eines Dreiecks bilden müssen. Ist dann *B* bestimmt, so bekommen wir *A* als Verbindungslinie des Endpunktes von *B* mit dem anderen Endpunkte des Kräftepolygons.

III. Analytisch.

Bei der analytischen Methode bestimmen wir zunächst von den beiden schräg gerichteten Windkräften die Horizontalprojektion $500 \cdot \cos 45° = 350$ kg und die Vertikalprojektion $500 \cdot \sin 45° = 350$ kg, addieren diese zu den an den Knotenpunkten bereits vorhandenen Kräften und erhalten hierdurch das in Fig. 44c dargestellte System von nur horizontalen und vertikalen Lasten. Nun denken wir uns noch die schräge Kraft *A* in die horizontale Seitenkraft *H* und die vertikale Seitenkraft *V* zerlegt (man zeichne diese ein). Hinsichtlich der Pfeilrichtungen wollen wir annehmen, daß *V* und *B* nach oben, und *H* nach links wirken möge. Wenn diese Annahmen nicht richtig sind, so wird sich dieses ja daraus ergeben, daß das betreffende Resultat mit negativem Vorzeichen erscheint.

Wir wenden wieder Methode IIIb an und nehmen als Bezugspunkte den Schnittpunkt von *H* und *B* (Punkt *D*) und den Schnittpunkt von *H* und *V* (Punkt *A*).

$$\text{(I)} \qquad H = 600 + 350\,,$$

$$\text{(II)} \quad V \cdot 7{,}00 + (600 \cdot 1{,}00 + 350 \cdot 3{,}00) = (650 \cdot 7{,}00 + 1400 \cdot 5{,}00 + 1500 \cdot 2{,}50)\,,$$

$$\text{(III)} \quad B \cdot 7{,}00 = (600 \cdot 1{,}00 + 350 \cdot 3{,}00) + (1400 \cdot 2{,}00 + 1500 \cdot 4{,}50 + 750 \cdot 7{,}00)\,.$$

Hieraus folgt:

$$\text{(I)} \qquad H = 950 \text{ kg},$$

$$\text{(II)} \quad V \cdot 7{,}00 + 1650 = 15300; \text{ mithin } V = \frac{15300 - 1650}{7{,}00} = 1950 \text{ kg},$$

$$\text{(III)} \quad B \cdot 7{,}00 = 1650 + 14800; \quad \text{„} \quad B = \frac{1650 + 14800}{7{,}00} = 2350 \text{ „}.$$

Aus *H* und *V* folgt

$$A = \sqrt{950^2 + 1950^2} = 2170 \text{ kg}; \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{1950}{950} = 2{,}06\,; \qquad \alpha = 64°.$$

Zur Kontrolle nehmen wir wieder die Gleichung (II) von Methode IIIa:

$$V + B = 650 + 1400 + 1500 + 750\,.$$

Setzt man für *V* und *B* die oben gefundenen Werte ein, so sieht man, daß die Rechnung stimmt.

Digitized by Google

Dritte Aufgabe.

Bei der Dachkonstruktion Fig. 45 sind die Auflagerkräfte zu bestimmen!

Allgemeines: (Fig. 45.) Wir wollen jetzt einen Fall betrachten, in dem der unterstützte Körper an der einen Seite über den Auflagerpunkt überkragt. Gelagert ist der Binder in den Punkten A und B auf zwei Stützen. Wir wissen, daß, wenn ein Körper in zwei Punkten statisch bestimmt unterstützt werden

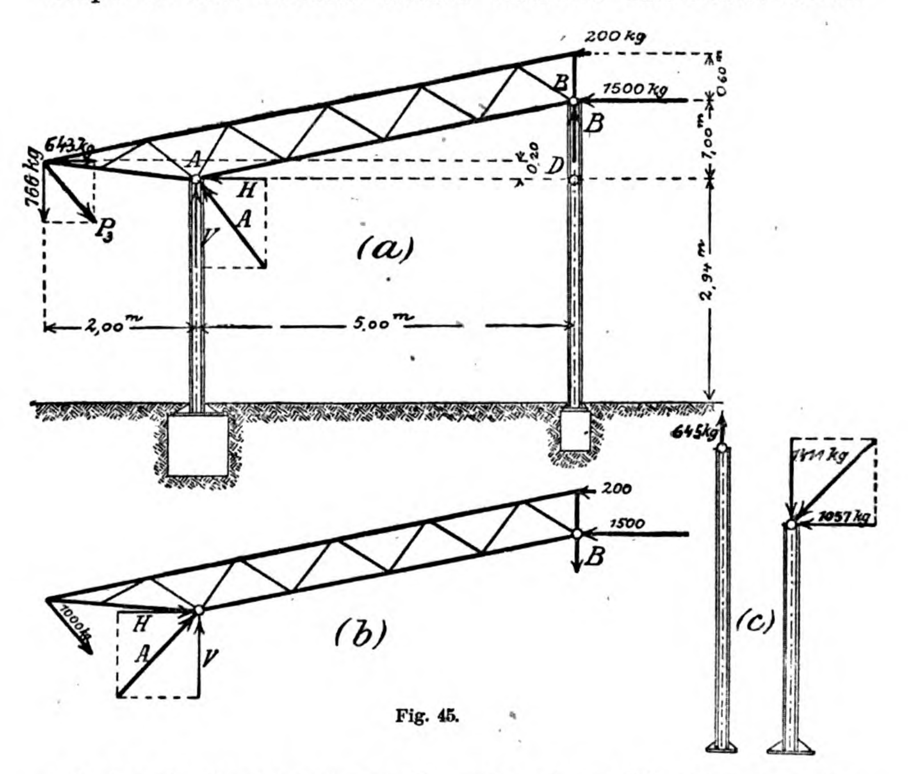


Fig. 45.

soll, der eine Punkt fest und der andere beweglich gelagert werden muß. Als festes Lager nehmen wir den Unterstützungspunkt der kürzeren Stütze; diese muß also mit ihrer Fußplatte zur Aufnahme der Horizontalkräfte fest eingespannt werden, und danach müssen Stütze, Anker und Fundament berechnet werden. Als bewegliches Lager bleibt dann Punkt B; die längere Stütze ist also als Pendelsäule zu betrachten, die nur auf Druck beansprucht wird und das Fundament nur durch eine Vertikalkraft belastet.

Es genügt, wenn wir die Berechnung analytisch durchführen, da die graphischen Methoden wohl schon genügend erläutert sind;

Digitized by Google

auch wollen wir nur einen Belastungsfall untersuchen, nämlich Wind von rechts und zugleich Belastung durch eine schräge Last P_3. Letztere kann z. B. durch eine an dieser Stelle befindliche Rolle. die zum Aufzug von Lasten dient, hervorgerufen werden.

Die auf den Binder wirkenden Kräfte infolge Winddruck seien 200 kg und 1500 kg (Fig. 45). Beide sind horizontal gerichtet (rechtwinklig zu der getroffenen Fläche). Die Last P_3 sei gleich 1000 kg; der Winkel, unter dem sie gegen die Horizontale geneigt ist, beträgt 50°. Die Auflagerkraft am Punkt A ist schräg geneigt. Da wir über ihre Richtung noch nichts wissen, nehmen wir zunächst an, sie gehe nach links oben, so wie in Fig. 45a eingezeichnet. Ihre Seitenkräfte H und V zeigen dann also nach links und nach oben. Hinsichtlich B nehmen wir auch zunächst an, daß es nach oben zeigen möge.

Die schräg gerichtete Last P_3 zerlegen wir noch in die Seitenkräfte:

$$\text{horizontal} \quad 1000 \cdot \cos 50° = 1000 \cdot 0{,}643 = 643 \text{ kg},$$
$$\text{vertikal} \quad 1000 \cdot \sin 50° = 1000 \cdot 0{,}766 = 766 \text{ ,,}$$

Dann erhalten wir in gewohnter Weise die Gleichungen:

$$\text{(I)} \quad H + 1500 + 200 = 643,$$
$$\text{(II)} \quad V \cdot 5{,}00 + 643 \cdot 0{,}20 = 766 \cdot 7{,}00 + (200 \cdot 1{,}60 + 1500 \cdot 1{,}00),$$
$$\text{(III)} \quad B \cdot 5{,}00 + 766 \cdot 2{,}00 + (200 \cdot 1{,}60 + 1500 \cdot 1{,}00) = 643 \cdot 0{,}20.$$

Hieraus:

$$\text{(I)} \quad H = 643 - 1500 - 200; \text{ folglich } H = -1057 \text{ kg},$$
$$\text{(II)} \quad V \cdot 5{,}00 + 129 = 7182; \quad \text{,,} \quad V = \frac{7182 - 129}{5{,}00} = 1411 \text{ kg},$$
$$\text{(III)} \quad B \cdot 5{,}00 + 3352 = 129; \quad \text{,,} \quad B = \frac{129 - 3352}{5{,}00} = -645 \text{ kg}.$$

Diese Resultate sagen nun aus:

H hat die Größe von 1057 kg. Es erscheint aber mit negativem Vorzeichen; das bedeutet: es ist nicht so einzuzeichnen, wie wir es zunächst angenommen haben (von rechts nach links), sondern gerade umgekehrt (von links nach rechts), Fig. 45b.

V wirkt mit 1411 kg in derselben Pfeilrichtung, wie von vornherein angenommen.

B erscheint, ebenso wie H, mit negativem Vorzeichen; es wirkt also mit 645 kg nicht von unten nach oben, sondern vertikal von oben nach unten (Fig. 45b).

Digitized by Google

H, V und B müssen also so auf den Binder einwirken, wie in Fig. 45b dargestellt ist; dann bilden diese Kräfte zusammen mit den drei Lasten ein Gleichgewichtssystem. Aus H und V können wir dann wie früher Größe und Richtung des Auflagerdruckes A bestimmen.

Nun wollen wir noch etwas auf die Beanspruchung der beiden Stützen eingehen. In Fig. 45b sind die Kräfte A und B so ein gezeichnet, wie sie von den Stützen auf den Binder ausgeübt werden müssen, damit dieser im Gleichgewicht ist. Handelt es sich aber um die Berechnung der Stützen, so müssen wir beachten, daß nach dem bekannten Prinzip von „Wirkung und Gegenwirkung“ (Aktion und Reaktion) zwischen den Wirkungen zweier Körper K_1 und K_2 die Beziehung besteht: Drückt der Körper K_1 mit einer Kraft P auf den Körper K_2, so übt K_2 die entgegengesetzte Kraft P auf den Körper K_1 aus. Dasselbe gilt für die Zugwirkungen zweier Körper aufeinander.

Nun übt in Fig. 45b die Stütze B auf den Binder eine Kraft von 645 kg vertikal *nach unten* aus. Daraus folgt, daß die Kraft, die der Binder auf die Stütze ausübt (die also für die Berechnung der Stütze maßgebend ist), gleich 645 kg, aber vertikal *nach oben* gerichtet ist. Stütze B wird also bei der vorliegenden Belastung mit 645 kg auf Zug beansprucht, so wie in Fig. 45c gezeichnet ist. Dort ist auch die andere Stütze mit den Kräften dargestellt, die von dem Binder auf sie ausgeübt werden. Man sieht, daß Stütze A mit 1411 kg auf Druck und Knickung und mit 1057 kg auf Biegung beansprucht ist.

§ 18.

Statisch unbestimmte Lagerung.

Wir wollen jetzt annehmen, der Binder Fig. 43 hätte zwei feste Lager. Dann treten an beiden Auflagerpunkten schräge Auflagerkräfte auf, die in V und H zerlegt sein mögen. Die Vertikalkraft wollen wir am linken Auflager mit V_1, die Horizontalkraft mit H_1 bezeichnen; entsprechend am rechten Lager mit V_2 und H_2. Bei der vorliegenden unsymmetrischen Belastung werden natürlich sowohl V_1 und V_2, als auch H_1 und H_2 voneinander verschieden sein.

Von den Kräften H_1 und H_2 wollen wir zunächst voraussetzen, daß sie beide in der Richtung nach links auf den Binder einwirken. Die Kräfte V_1 und V_2 mögen beide nach oben wir-

Digitized by Google

ken. Dann gehen unsere früheren Gleichungen (I), (II) und (III) von § 17, erste Aufgabe, über in:

$$\text{(I)} \qquad H_1 + H_2 = 1835 \,,$$

$$\text{(II)} \qquad V_1 \cdot 12{,}00 + 3955 = 15623 \,,$$

$$\text{(III)} \qquad V_2 \cdot 12{,}00 = 3955 + 3457 \,.$$

Man sieht, es sind drei Gleichungen mit vier Unbekannten (H_1, H_2, V_1, V_2). Nun lassen sich aber bekanntlich aus drei Gleichungen auch immer nur drei Unbekannte ermitteln. Wir müssen also noch eine — mehr oder minder willkürliche — ***Annahme*** hinzunehmen, um die Unbekannten ausrechnen zu können. Die für diesen Fall am besten passende Annahme ist die, daß man die beiden Horizontalkräfte H_1 und H_2 gleich groß voraussetzt. Also Annahme: Es sei $H_1 = H_2$. Führen wir daraufhin für H_1 und H_2 die gemeinsame Bezeichnung H ein, so wird

$$\text{(I)} \quad H + H = 1835 \;; \qquad \text{hieraus:} \quad H = \frac{1}{2} 1835 = 918 \text{ kg} \,,$$

$$\text{(II)} \qquad V_1 = (15623 - 3955) \frac{1}{12{,}00} = 972 \text{ kg} \,,$$

$$\text{(III)} \qquad V_2 = (3457 + 3955) \frac{1}{12{,}00} = 618 \text{ kg} \,.$$

Wie gesagt, ist diese Berechnung nur eine Annäherungsrechnung, da wir eine Annahme zugrunde legen mußten. Man nennt eine solche Aufgabe, bei der mehr Unbekannte auftreten, als Gleichungen zur Lösung vorhanden sind, eine ***statisch unbestimmte*** Aufgabe. Sehr häufig hilft man sich in solchen Fällen, indem man hinsichtlich des Verhältnisses der Unbekannten zueinander plausible Annahmen macht (wie vorhin). Eine genaue Lösung ist dieses natürlich nicht; die wird später gezeigt werden. (Band III).

Man könnte allerdings noch auf einen anderen — anscheinend recht schlauen — Gedanken kommen: „Die obigen drei Gleichungen stellen doch nur Methode IIIb dar. Nehmen wir also doch noch z. B. Methode IIIa hinzu. Dann bekommen wir zu den drei obigen Gleichungen noch eine neue, bisher nicht benutzte Gleichung; nämlich $R_y = 0$. Insgesamt also $3 + 1 = 4$ Gleichungen, aus denen sich also die vier Unbekannten (H_1, H_2, V_1, V_2) ermitteln lassen müßten, ohne daß wir noch irgendwelche unsichere Annahme brauchen."

Digitized by Google

Probieren wir es. Zunächst also die drei früheren Gleichungen

$$\text{(I)} \qquad H_1 + H_2 = 1835\,,$$

$$\text{(II)} \qquad V_1 \cdot 12{,}00 + 3955 = 15623\,,$$

$$\text{(III)} \qquad V_2 \cdot 12{,}00 = 3955 + 3457\,,$$

und hinzu kommt noch

$$\text{(IV)} \qquad V_1 + V_2 = 1100 + 350 + 0 + 140\,.$$

Hieraus ergibt sich:

$$\text{(I)} \qquad H_1 + H_2 = 1835\,\text{kg},$$

$$\text{(II)} \qquad V_1 = 972\,\text{kg},$$

$$\text{(III)} \qquad V_2 = 618\,\text{kg},$$

$$\text{(IV)} \qquad V_1 + V_2 = 1590\,\text{kg}.$$

Also vier schöne Gleichungen. Aber, leider, die vierte Gleichung ist keine neue, selbständige Aussage, sondern sie folgt schon aus den Gleichungen (II) und (III) als etwas Selbstverständliches. Dies muß natürlich auch so sein, denn die eigentlichen Gleichgewichtsbedingungen sind durch *drei* Aussagen erschöpft. Man kann zwar beliebig viele *Formen* für die Aussagen finden; *inhaltlich* bieten sie aber nichts Neues und können also auch nicht zur Berechnung von neuen Unbekannten benutzt werden.

Zusammenfassung.

Wenn ein starrer Körper so gelagert ist, daß die Auflagerkräfte mehr als drei Unbekannte enthalten, so reichen die Gleichgewichtsbedingungen nicht aus, um die Auflagerunbekannten in streng mathematischer Weise zu ermitteln. Solche Konstruktionen heißen **„statisch unbestimmt“** gelagert. Ihre angenäherte Berechnung kann durch Einführung einer plausiblen Annahme, z. B. $H_1 = H_2$, geschehen. (Die genaue Berechnung s. Band III.)

§ 19.

Wiederholungen und Ergänzungen. Allgemeines über Lagerungen.

Wir haben uns in diesem Vortrage mit der Lagerung einer „starren Scheibe“ beschäftigt, d. h. eines solchen Körpers, dessen einzelne Punkte fest miteinander verbunden sind, so daß keinerlei Verschiebung oder Drehung seiner einzelnen Teile gegeneinander stattfinden kann. Bei diesen Untersuchungen zeigte es sich, daß die Zahl „Drei“ eine bedeutende Rolle spielt. Nämlich:

1. Ist die Lagerung so, daß weniger als drei Auflagerunbekannte auftreten, so ist der Körper überhaupt nicht aus-

Digitized by Google

reichend gelagert. Dieses wäre der Fall, wenn z. B. der Balken Fig. 36 nur ein festes Lager hätte (und kein bewegliches) oder zwei bewegliche Lager. Dann würde er sich, bei einer beliebigen Belastung, einfach in Bewegung setzen und gar nicht im Gleichgewicht bleiben. Mathematisch kommt diese Unmöglichkeit, den Gleichgewichtszustand zu erlangen, dadurch zum Ausdruck, daß das Gleichgewicht die Erfüllung *dreier* Bedingungen verlangt, während durch zwei Unbekannte auch immer nur zwei Bedingungen (Gleichungen) befriedigt werden können. (Labile Lagerung.)

Ein Ausnahmefall ist der, daß der Körper z. B. zwei horizontal bewegliche Lager hat und die Belastung vertikal wirkt. Dann wäre trotz der unzureichenden Lagerung Gleichgewicht möglich. Sobald aber die Belastung im geringsten schräg wirkt, hört das Gleichgewicht auf. Für die Praxis ist also eine solche Lagerung auf jeden Fall unbrauchbar.

2. Ist die Lagerung so, daß gerade drei Auflagerunbekannte auftreten, so ist die Stützung erstens ausreichend und zweitens hat sie die Annehmlichkeit, daß die Auflagerkräfte sich durch Anwendung der Gleichgewichtsbedingungen sehr schnell ermitteln lassen. Deshalb ist diese Lagerung für die Praxis die weitaus wichtigste. Meistens erzielt man sie dadurch, daß man dem Körper ein festes und ein bewegliches Lager gibt. Man kann aber auch drei bewegliche Lager anordnen. Ferner kann man statt eines beweglichen Lagers einen „Auflagerstab" einsetzen und zwar so, daß dessen Mittellinie senkrecht zur Bewegungsrichtung des Lagers ist. Entsprechend kann man ein festes Lager durch zwei Auflagerstäbe ersetzen.

Ein Ausnahmefall ist der, daß die drei Auflagerkräfte sich in *einem* Punkte schneiden. Dann bilden sie nämlich keine ausreichende Stützung. Hat man z. B. drei Auflagerstäbe, und diese greifen sämtlich in einem Punkte des Körpers an, so kann sich dieser ja einfach um den Punkt drehen. Auch wenn die Kräfte zwar nicht direkt in einem Punkte angreifen, wohl aber sich ihre Richtungslinien in einem Punkte schneiden oder — was auf dasselbe hinauskommt — untereinander parallel sind, ist kein Gleichgewichtszustand vorhanden. Man erkennt dies am einfachsten, wenn man den Schnittpunkt als Bezugspunkt für die Momentengleichungen nimmt. Dann ergibt die Rechnung, daß die Auflagerkräfte unendlich groß werden müßten, um den Körper im Gleichgewichtszustande zu halten. Für die Praxis ist dieser Ausnahmefall wenig von Bedeutung, da man wohl kaum in die Versuchung kommen wird, die Lager so anzuordnen.

Digitized by Google

Eine Lagerung mit 3 Unbekannten heißt **„statisch bestimmte“** Lagerung.

3. Ist die Lagerung so, daß mehr als drei Auflagerkräfte auftreten, so ist die Stützung (im allgemeinen) mehr als genügend. Sie hat aber u. a. den großen Nachteil, daß sie sich nicht mehr durch die bloße Anwendung der Gleichgewichtsbedingungen berechnen läßt. Sehr häufig vereinfacht man dann die Rechnung durch Einführung von Annahmen (§ 18). Die genaueren Untersuchungen werden wir später durchnehmen. (**„Statisch unbestimmt.“**)

---

4. Vortrag:

Die Auflagerkräfte infolge beweglicher Belastung.

Im letzten Vortrage haben wir die Methoden kennen gelernt, die zur Bestimmung der Auflagerkräfte führen, wenn ein statisch bestimmt gelagerter Träger durch Kräfte von beliebiger Größe und Richtung belastet ist. Es war hierbei vorausgesetzt, daß die Belastung eine ständige, unbewegliche war. Wir wollen nun die Untersuchungen noch für den Fall erweitern, daß das Lastensystem ein bewegliches ist.

Derartige bewegliche Belastung ist hauptsächlich maßgebend für die Berechnung von Kran- und Brückenträgern. Sie ist in diesem Falle fast stets vertikal nach unten gerichtet, und die Konstruktion, auf die sie einwirkt, hat dann — sofern es sich überhaupt um eine statisch bestimmte Lagerung handelt — ein festes und ein im *horizontalen* Sinne bewegliches Lager. Wir haben es also mit dem bereits besprochenen „einfachen Balken mit vertikalen Lasten“ zu tun und müssen die Untersuchungen des § 16 nur noch insofern ergänzen, als wir jetzt auch bewegliche Belastung zu berücksichtigen haben. Wir werden 3 Methoden besprechen: 1. Analytisch; 2. A-Polygon (graphisch); 3. Einflußlinie.

§ 20.

Analytische Bestimmung der Auflagerkräfte bei beweglicher Belastung.

(Für Kranträger.)

In Fig. 46a handle es sich um einen Kranträger von $l = 6 \times 3{,}0 = 18{,}0$ m Spannweite. Die Belastung bestehe nach Fig. 46b aus einer vierachsigen Laufkatze. Der Auflagerdruck A soll nun ermittelt werden für die Fälle, daß die Laufkatze, von

Digitized by Google

links nach rechts fahrend, mit dem linken Rade der Reihe nach über den Knoten *0*, *1*, *2*, *3*, *4*, *5* steht.

In Fig. 47 ist die Laststellung gezeichnet, bei der das erste Rad über Knoten *0* steht. Der Träger ist hierbei als einfacher Balken dargestellt, weil — wie schon mehrfach gesagt — die

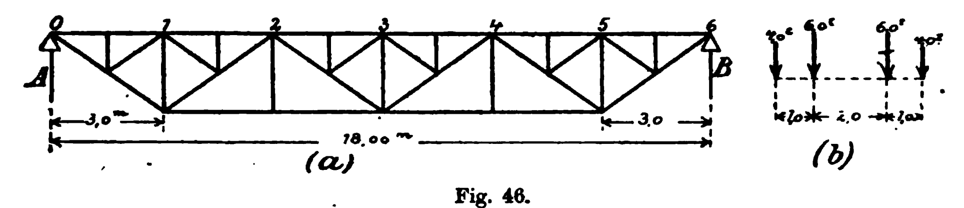


Fig. 46.

innere Konstruktion vorläufig ohne Belang ist. Es ergibt sich dann für diese Laststellung:

$$A \cdot 18{,}00 = 4{,}0 \cdot 18{,}00 + 6{,}0 \cdot 17{,}00 + 6{,}0 \cdot 15{,}00 + 4{,}0 \cdot 14{,}00\,.$$

Hiermit
$$A = \frac{320{,}0}{18{,}0} = 17{,}78 \text{ t.}$$

Einfacher ist jedoch folgender Weg: Wir denken uns die gegebenen vier Kräfte ersetzt durch ihre Ersatzkraft $R = 20$ t. Nun wissen

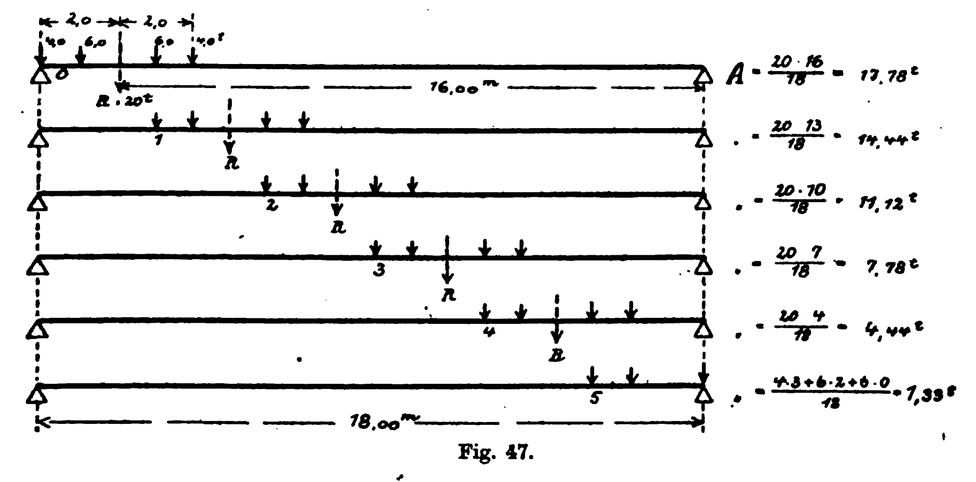


Fig. 47.

wir aus § 9, daß das statische Moment der Ersatzkraft gleich ist der Summe der statischen Momente der einzelnen Kräfte. Wir bekommen also auch

$$A \cdot 18{,}00 = R \cdot 16{,}00\,,$$

$$A = \frac{R \cdot 16{,}00}{18{,}00} = \frac{20{,}0 \cdot 16{,}00}{18{,}00}$$

$$= 17{,}78 \text{ t.}$$

Digitized by Google

In derselben Weise sind dann die übrigen Laststellungen gezeichnet und jedesmal der betreffende Auflagerdruck ausgerechnet. Bei dem zuletzt gerechneten Auflagerdruck ist zu bemerken, daß hierbei nicht mehr die Ersatzkraft R eingeführt werden darf, weil jetzt nur noch drei Achsen auf dem Träger stehen. (Übrigens ist dieser Fall, daß einige Räder den Träger bereits verlassen haben, natürlich nur dann möglich, wenn es sich um eine Kranbahn handelt, die über das rechte Auflager hinaus fortgesetzt ist.)

Man ersieht aus diesem Beispiel, daß die Berechnung der Auflagerkräfte infolge beweglicher Belastung ziemlich rasch vonstatten geht, sobald man die gegebene Lastengruppe ersetzt durch ihre Ersatzkraft R. Diese Methode wird deshalb besonders angebracht sein bei der Berechnung von Kranträgern. Ein Rechenfehler ist hier ziemlich ausgeschlossen, wenn man bedenkt, daß die Ersatzkraft z. B. in obiger Aufgabe jedesmal 3,0 m nach rechts rückt, der Auflagerdruck also in jeder neuen Stellung um $\frac{20 \cdot 3{,}0}{18} = 3{,}33$ t gegenüber dem früheren abnehmen muß. In der Tat beträgt auch in der ausgerechneten Tabelle die Differenz zwischen zwei Auflagerkräften 3,33 t. Bei Brückenträgern ist diese Methode leider nicht anwendbar. Verschiebt sich hier der Zug auf der Brücke aus einer Stellung in eine neue, so ändert sich im allgemeinen auch die Anzahl der auf dem Träger befindlichen Achsen. Die Lastengruppe ist nicht unveränderlich wie beim Kranträger, sondern es müßte jedesmal eine neue Ersatzkraft bestimmt werden, wodurch dann gerade die Eigenart des Verfahrens verloren gehen würde. **Trotzdem kann man auch bei Eisenbahnbrücken auf analytischem Wege die Auflagerdrücke für die verschiedenen Laststellungen bestimmen. Die betreffende Methode wird später entwickelt** (Band II, § 32).

§ 21.

Das A-Polygon.

I. Allgemeine graphische Darstellung von Momentensummen.

Bei der Berechnung des Auflagerdruckes A kam es darauf an, die Summe der statischen Momente der auf dem Träger befindlichen Lasten in bezug auf Punkt B möglichst schnell zu ermitteln. Es ist naheliegend, auch eine graphische Lösung dieser Aufgabe zu versuchen:

Digitized by Google

Um in Fig. 48 die Summe der statischen Momente $P_1 p_1 + P_2 p_2 + P_3 p_3 + P_4 p_4$ zu berechnen, worin p_1, p_2, p_3, p_4 die Lote vom Bezugspunkte E auf P_1, P_2, P_3, P_4 bedeuten, können wir folgendermaßen vorgehen: Wir reihen die Kräfte zu einem Kräftepolygon aneinander und bestimmen die Ersatzkraft R nach Größe und Richtung. Um die Lage von R festzulegen, ziehen wir vom beliebigen Pole O die Polstrahlen, parallel zu diesen die Seilstrahlen und erhalten im Schnittpunkte des ersten und des letzten Seilstrahles den Punkt A, der die Lage von R bestimmt. Nun ist,

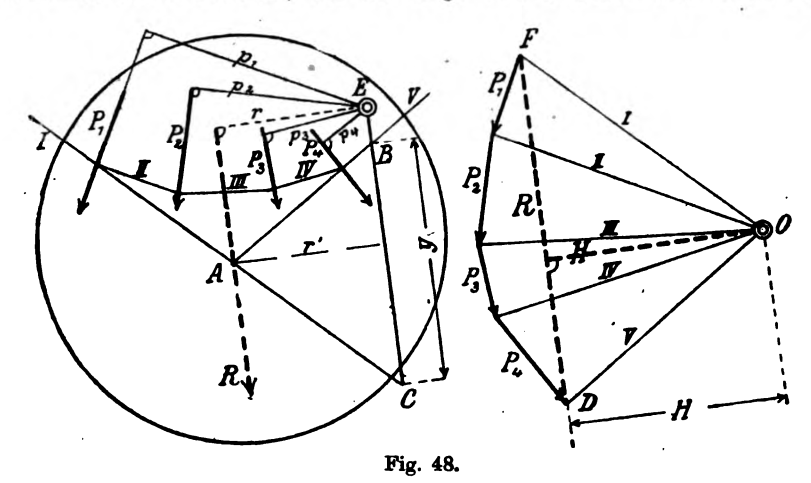


Fig. 48.

wie in § 9 bewiesen wurde, das statische Moment der Ersatzkraft gleich der Summe der statischen Momente der gegebenen Kräfte. Also

$$P_1 \cdot p_1 + P_2 \cdot p_2 + P_3 \cdot p_3 + P_4 \cdot p_4 = R \cdot r\,.$$

Das Produkt $R \cdot r$ läßt sich aber noch einfacher darstellen. Ziehen wir nämlich durch den Punkt E die Parallele zu R und nennen das Stück BC auf dieser Parallelen, das zwischen dem ersten und letzten Seilstrahl liegt, y, so erhalten wir zwei ähnliche Dreiecke; nämlich

$$\triangle ABC \sim \triangle ODF\,,$$

da je zwei Seiten einander parallel sind. In ähnlichen Dreiecken verhalten sich die Grundlinien wie die Höhen. Bezeichnet man das Lot von O auf DF mit H, so ist also

$$y : r' = R : H\,.$$

Nun ist aber

$$r' = r\,.$$

(Fig. 48), folglich

$$y : r = R : H\,.$$

Hieraus ergibt sich:

$$H \cdot y = R \cdot r$$
$$= P_1 \cdot p_1 + P_2 \cdot p_2 + P_3 \cdot p_3 + P_4 \cdot p_4 .$$

H, das Lot von O auf R, nennt man die „*Polweite*", „*Poldistanz*". *Die Summe der statischen Momente der Kräfte* P_1, P_2, P_3, P_4 *in bezug auf den beliebigen Punkt* E *ist also gleich dem Produkt aus der Polweite* H *mal der Strecke* y, *die der erste und der letzte Seilstrahl auf der Linie abschneiden, die durch* E *parallel zu* R *gezogen ist.*

Das soeben entwickelte Verfahren ist besonders dann sehr übersichtlich, wenn die Summe der statischen Momente von *parallelen* Kräften zu bestimmen ist. Ist z. B. in Fig. 49 die Aufgabe gestellt, die Summe

$$P_1 b_1 + P_2 b_2 + P_3 b_3 + P_4 b_4$$

auszurechnen, so finden wir diese graphisch, indem wir das Produkt bilden aus $H \cdot y$. Die Reihenfolge der Kräfte im Kräftepolygon ist beliebig; sie wurde in Fig. 49 so gewählt, wie sie für das Folgende am bequemsten ist.

In dem Produkte $H \cdot y$ ist H im Längenmaßstab und y im Kräftemaßstab, oder y im Längenmaßstab und H im Kräftemaßstab zu messen. Um dieses einzusehen, wollen wir die Zahlenwerte einsetzen, die der obigen Figur zugrunde gelegt sind. Es war hierbei angenommen:

$$P_1 = 2,7 \text{ t}, \quad P_2 = 3,0 \text{ t}, \quad P_3 = 2,0 \text{ t}, \quad P_4 = 1,3 \text{ t};$$
$$b_1 = 15,0 \text{ m}, \quad b_2 = 12,0 \text{ m}, \quad b_3 = 7,5 \text{ m}, \quad b_4 = 3,7 \text{ m}.$$

Die Maßstäbe wurden gewählt:

Kräftemaßstab: 1 cm = 2,0 t,
Längenmaßstab: 1 cm = 3,0 m.

Beim Kräftepolygon mußten also die Kräfte dargestellt werden:

$$P_1 = 1,35 \text{ cm}, \quad P_2 = 1,50 \text{ cm}, \quad P_3 = 1,00 \text{ cm}, \quad P_4 = 0,65 \text{ cm}.$$

Die Polweite H wurde in der Figur zu 5,0 cm genommen,

$$H = 5,0 \text{ cm},$$

hierauf das Seilpolygon gezeichnet und dann durch E die Parallele zu R gezogen. Hierbei ergab sich dann aus der Zeichnung die Strecke

$$y = 3,2 \text{ cm}.$$

Digitized by Google

Messen wir nun H im Längenmaßstab und y im Kräftemaßstab, so ergibt sich

$$H \cdot y = (5{,}0 \cdot 3{,}0)\ \mathrm{m} \cdot (3{,}2 \cdot 2{,}0)\ \mathrm{t} = 96\ \mathrm{m\,t}.$$

Nehmen wir y im Längenmaßstab und H im Kräftemaßstab, so bekommen wir

$$H \cdot y = (3{,}2 \cdot 3{,}0)\ \mathrm{m} \cdot (5{,}0 \cdot 2{,}0)\ \mathrm{t} = 96\ \mathrm{m\,t};$$

also dasselbe Resultat wie früher.

(Man überzeuge sich auch von der Richtigkeit der ganzen Darstellung, indem man die statischen Momente, $P_1 b_1$ usw., einzeln ausrechnet und dann addiert.)

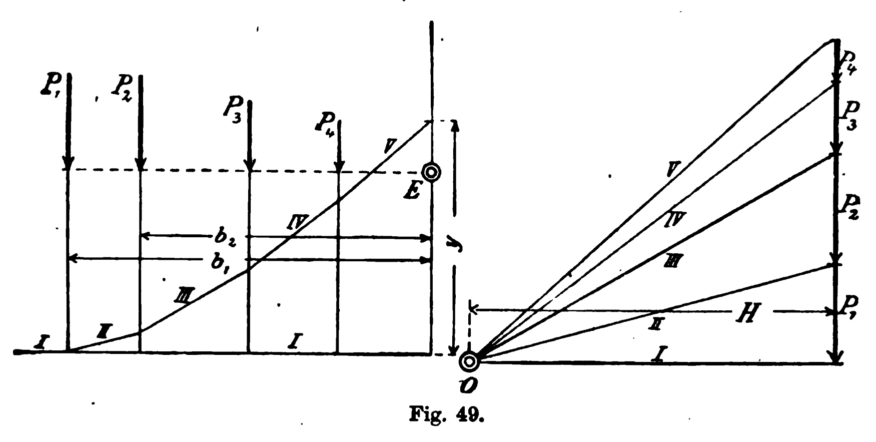


Fig. 49.

II. Das „A-Polygon“. (Fig. 50, vgl. auch Fig. 49.)

Nach diesen Vorbereitungen können wir zu dem unter dem Namen „*A-Polygon*“ bekannten Verfahren zur Bestimmung der Auflagerkräfte übergehen. Auf der Brücke AB (Fig. 50) von

$$l = 14{,}00\ \mathrm{m}$$

Spannweite sei ein Zug, von B kommend, bis Punkt O vorgefahren. Die Lasten dieses Zuges seien $P_1, P_2, \ldots, P_8$; ihre Abstände sind in Fig. 50a eingeschrieben. Für diese Lastenstellung wird der Auflagerdruck

$$A = \frac{1}{l}(P_1 \cdot 14{,}0 + P_2 \cdot 12{,}5 + P_3 \cdot 11{,}0 + P_4 \cdot 9{,}5 + P_5 \cdot 8{,}0 + P_6 \cdot 3{,}5 + P_7 \cdot 2{,}0 + P_8 \cdot 0{,}5).$$

Diese Summe wollen wir nun aber nicht ausrechnen, sondern sie nach dem unter I. entwickelten Verfahren durch ein Produkt $H \cdot y$ darstellen. Zu diesem Zwecke reihen wir die Kräfte P_1 bis P_8 zu einem Kräftepolygon aneinander. Die Reihenfolge ist beliebig;

Digitized by Google

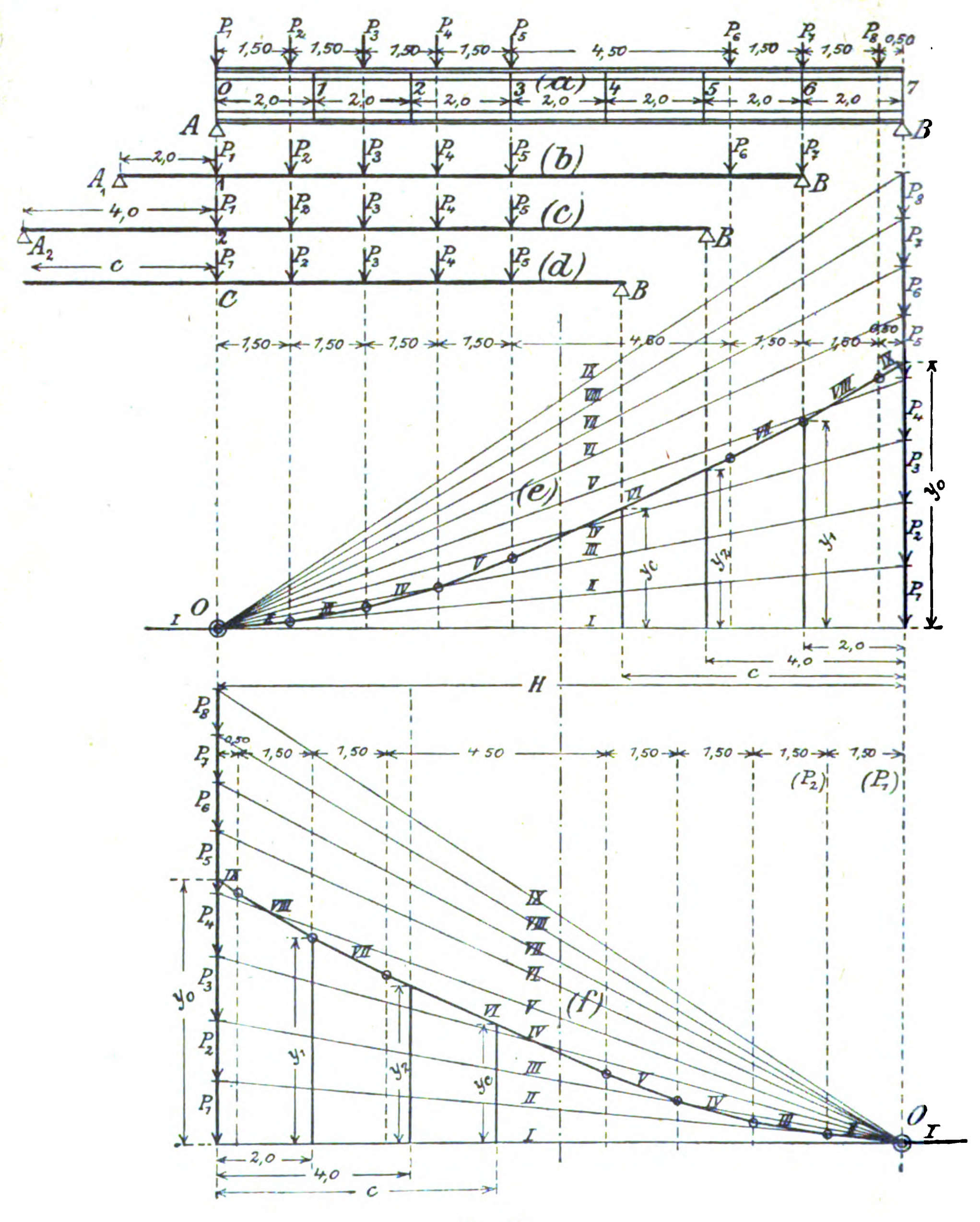


Fig. 50.

Digitized by Google

sie ist in Fig. 50e so genommen, daß wir nachher die übersichtlichste Figur bekommen. Den Pol O wählen wir so, daß $H = l$ wird und ziehen die Polstrahlen $I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII, IX$. Nun zeichnen wir die Seilstrahlen. Strahl I geht nach Kraft P_1; wir zeichnen ihn direkt zusammenfallend mit Polstrahl I. Daran schließt sich dann Seilstrahl II; auch er fällt mit seinem Polstrahl zusammen. (Die Polstrahlen sind in Fig. 50 schwach, die Seilstrahlen kräftig gezeichnet.) An den Endpunkt von II kommt Seilstrahl III parallel zu Polstrahl III; dann IV parallel zu IV usw. bis zum letzten Seilstrahl IX parallel zum Polstrahl IX. Um nun die Summe aller statischen Momente der Kräfte P_1 bis P_8 in bezug auf Punkt B zu erhalten, müssen wir durch B die Parallele zu R, in diesem Falle also die Vertikale, ziehen. Diese ist aber in der Figur bereits vorhanden. Wir haben also nur noch das Stück y_0 abzumessen, das zwischen dem ersten Seilstrahle, I, und dem letzten, IX, liegt, und erhalten:

$$(P_1 \cdot 14{,}0 + P_2 \cdot 12{,}5 + P_3 \cdot 11{,}0 + \ldots + P_8 \cdot 0{,}5) = H \cdot y_0 .$$

Hieraus folgt:

$$A = \frac{1}{l} \cdot H \cdot y_0 .$$

Nun war aber die Polweite $H = l$ gewählt, wir erhalten also

$$A = y_0 .$$

Hierin ist y_0 in demselben Maßstab zu messen, in dem die Kräfte P_1 bis P_8 aufgetragen sind; dieser sei im vorliegenden Beispiel 1 cm = 10 t. Da sich nun aus Fig. 50 $y_0 = 3{,}6$ cm ergibt, so haben wir bei der Laststellung Fig. 50a einen Auflagerdruck $A = 36$ t.

Nun wollen wir A bestimmen für die Laststellung, bei der die erste Kraft, P_1, am Punkte 1, d. i. 2,0 m vom linken Auflager, steht. Dieser Fall ist in Fig. 50b dargestellt, und zwar haben wir, um nicht jedesmal die Lasten neu einzuzeichnen, einfach den Balken um 2,0 m nach links verschoben gezeichnet. Die Laststellung ist dann so, wie sie verlangt ist, nämlich P_1 steht 2,0 m vom linken Auflager. Dabei haben wir aber bei dieser Darstellung folgende Vorteile:

1. Wir benutzen dasselbe Kräftepolygon, indem wir einfach die Last P_8 fortlassen, da diese jetzt nicht mehr auf dem Balken vorhanden ist;

2. wir benutzen dieselben Polstrahlen I bis VIII, natürlich unter Fortlassung von Polstrahl IX;

Digitized by Google

3. wir benutzen dieselben Seilstrahlen *I* bis *VIII*; denn Strahl *I* geht auch jetzt nach der ersten Kraft, Strahl *II* liegt zwischen P_1 und P_2, usw. bis zum letzten Strahl *VIII*.

Um nun für diese Laststellung A auszurechnen, bilden wir die Summe der statischen Momente in bezug auf Punkt B in Fig. 50b und erhalten:

$$A_1 = \frac{1}{l}(P_1 \cdot 12{,}0 + P_2 \cdot 10{,}5 + P_3 \cdot 9{,}0 + P_4 \cdot 7{,}5 + \ldots + P_7 \cdot 0).$$

Die Summe der statischen Momente finden wir wieder graphisch, indem wir durch B die Parallele zu R ziehen und das Stück y_1 abmessen, das von dem ersten Strahle, *I*, und dem letzten Strahle, *VIII*, abgeschnitten ist. Dann ist

$$A_1 = \frac{1}{l} \cdot H \cdot y_1 = y_1 \qquad [\text{da } H = l \text{ ist}].$$

Da wir im allgemeinen Fig. 50b nicht besonders aufzeichnen werden, so verfahren wir am einfachsten so: Wir tragen die 2,0 m in Fig. 50e von rechts aus ab, loten in die Höhe und messen:

$$A_1 = y_1 .$$

In Fig. 50c ist noch der Fall dargestellt, daß die erste Last an der Stelle *2*, d. i. 4,0 m vom linken Auflager, steht. Wir benutzen wieder dasselbe Kräfte- und Seilpolygon, wobei wir uns nur die Lasten P_8, P_7, P_6 fortdenken. Der erste Seilstrahl ist *I* und der letzte Seilstrahl ist *VI*. Die Summe der statischen Momente finden wir aus $H \cdot y_2$, indem wir durch B die Parallele zu R ziehen und das Stück y_2 abmessen, das zwischen dem ersten und letzten Seilstrahl liegt. Einfacher ist es jedoch, die 4,0 m wieder von rechts aus abzutragen und dann in die Höhe zu loten. Wir erhalten demnach

$$A_2 = y_2 .$$

Um also für alle möglichen Laststellungen den Auflagerdruck zu ermitteln, zeichnen wir zunächst das Seilpolygon *I* bis *IX* für Vollbelastung. Soll dann A für eine Laststellung bestimmt werden, bei der die erste Last P_1 bis zu einem Punkte C vorgerückt ist, der c m vom linken Auflager entfernt ist, so tragen wir diese c m von rechts aus ab, loten in die Höhe und erhalten

$$A_c = y_c .$$

Nun wollen wir noch den letzten Schritt tun, um die Form zu erhalten, in der das A-Polygon endgültig angewendet wird.

Digitized by Google

Wir denken uns nämlich Fig. 50e um die vertikale Achse gedreht, so daß sie die in Fig. 50f gezeichnete Lage annimmt. Fig. 50f ist also das Spiegelbild von Fig. 50e. Die Strecke y_0 kommt dann direkt unter Punkt *0*, die Strecke y_1 unter Punkt *1*, die Strecke y_c unter Punkt *c* zu liegen; d. h. unter jedem Punkte ist bereits derjenige Auflagerdruck *A* aufgezeichnet, der dann entsteht, wenn der Zug von *B* bis zu diesem Punkte vorrückt. Sicherlich ist dieses die bequemste Methode, um für alle möglichen Laststellungen die Auflagerdrücke zu bestimmen. Wir werden hierbei die Fig. 50b bis 50e (die nur zur Ableitung des Verfahrens gedient haben) gar nicht aufzeichnen, sondern direkt so vorgehen: *Wir tragen von dem betreffenden Lastenzuge so viel Lasten (P_1 bis P_8), wie auf dem Träger Platz haben, auf der Vertikalen durch A ab, nehmen den Pol O vertikal unter B und ziehen die Polstrahlen. Dann tragen wir die Entfernung der ersten Last von der zweiten, der zweiten von der dritten, usw. von rechts nach links ab und ziehen das Seilpolygon, das in diesem besonderen Falle den Namen A-Polygon führt. Ist dann der Zug von B bis zu einem Punkte vorgerückt, so ergibt die unter diesem Punkte gemessene Ordinate y den Auflagerdruck A.*

§ 21a.

Beispiel zu § 21.

Bei dem in Fig. 51 dargestellten Kranträger sind für die verschiedenen Stellungen der Laufkatze die Auflagerdrücke A und B graphisch mittels A-Polygon zu ermitteln!

Die Spannweite ist $l = 12{,}00$ m. Die Laufkatze ist aus Fig. 51 zu entnehmen. (Sie wurde absichtlich so anormal gewählt, um das Prinzip zu erklären.)

Wir verfahren nach der soeben entwickelten Regel. Um *A* zu bestimmen, tragen wir zunächst die Lasten auf der durch den Auflagerpunkt *A* gezogenen Vertikalen auf, und zwar so, daß die erste (von *A* aus gerechnet) Last zu unterst kommt. Dann nehmen wir auf der durch den Auflagerpunkt *B* gezogenen Vertikalen den Pol an (*B*) und ziehen von diesem die Polstrahlen *I*, *II*, *III*, *IV*, und zwar so, daß der erste Polstrahl horizontal ist. Hierauf tragen wir *von B aus* die Lastenabstände noch einmal auf (wir kehren gewissermaßen die Belastung um) und zeichnen von *B* aus die Seilstrahlen *I*, *II*, *III*, *IV* parallel den vorhin gezeichneten Polstrahlen. (Die Seilstrahlen sind in Fig. 51 stärker ausgezogen.) Steht dann an irgendeiner Stelle die Belastung (Fig. 51), so loten wir die erste Last (von *A* aus gerechnet) hinunter und finden den

Digitized by Google

gesamten Auflagerdruck A, der bei dieser Lastenstellung entsteht, dargestellt durch die Ordinate y_c.

Um nun für dieselbe Laststellung B zu ermitteln, müssen wir in entsprechender Weise das B-Polygon zeichnen, Fig. 51. Bei der Berechnung von B kommt die Fahrtrichtung von A nach B in Betracht; es ist also D der Punkt, an dem die vorderste Last steht, und wir erhalten demnach $B = y_D$. Natürlich ist

$$A + B = 3 + 5 + 4 = 12\,\text{t}.$$

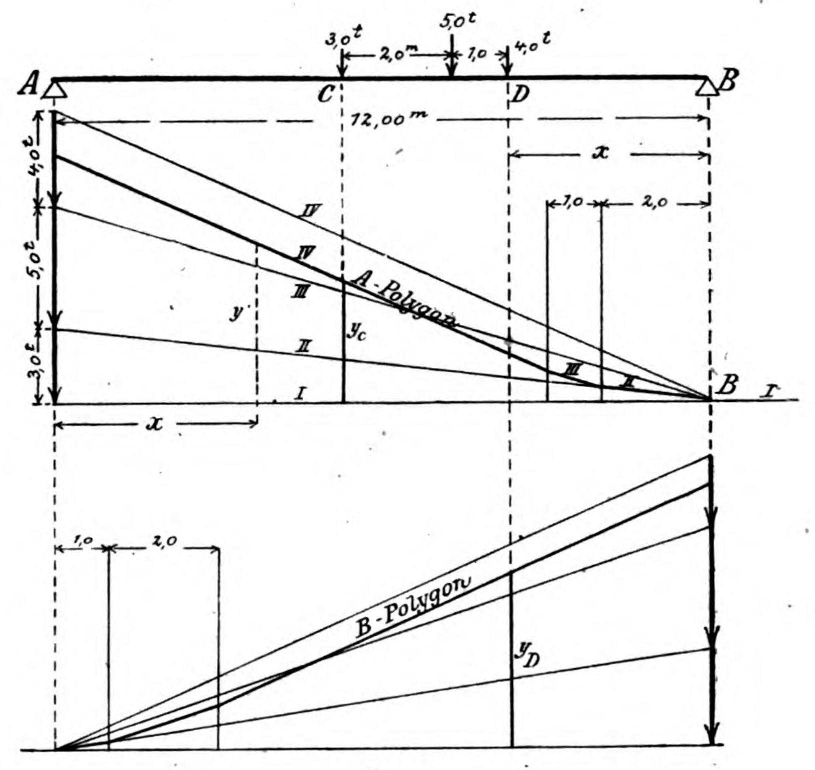


Fig. 51.

Man sieht jedoch ein, daß das Aufzeichnen des B-Polygons stets entbehrt werden kann. Zunächst ist in den meisten Fällen die Belastung symmetrisch. Hierbei ermitteln wir dann A mittels A-Polygon in gewöhnlicher Weise $(A = y_C)$, und B finden wir, indem wir x von links aus auftragen und y' messen. Denn bei symmetrisch angeordneter Belastung ist das B-Polygon das Spiegelbild des A-Polygons, so daß $y_D = y'$ ist. Aber auch wenn die Belastung unsymmetrisch ist, wie oben angenommen, brauchen

Digitized by Google

wir nur A zu bestimmen und bekommen B aus der Bedingung, daß $A + B$ gleich der Summe sämtlicher Lasten ist.

§ 22.

Die Einflußlinie für den Auflagerdruck (A-Linie).

I. Direkte Belastung.

Wir wollen uns in Fig. 52 die Aufgabe stellen: Eine Last $P = 1{,}0$ t kann sich auf dem Balken AB hin und her bewegen. Für alle möglichen Laststellungen ist der Auflagerdruck A zu er-

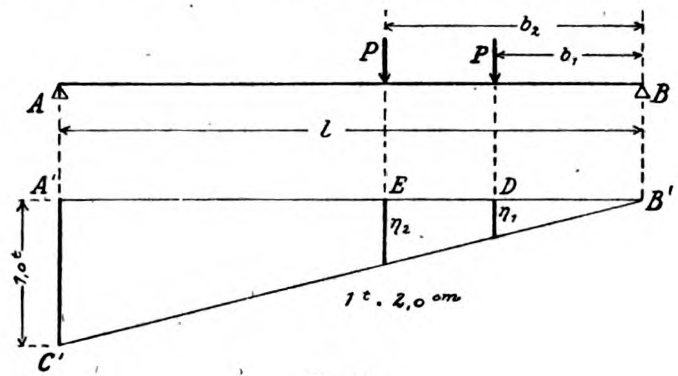


Fig. 52.

mitteln. Analytisch ist die Aufgabe leicht lösbar. Ist P z. B. in der Entfernung b_1 vom rechten Auflager (Laststellung I), so ist

$$A = \frac{P \cdot b_1}{l} = \frac{1{,}0 \cdot b_1}{l}.$$

Rückt P in die Entfernung b_2 (Laststellung II), so ist

$$A = \frac{P \cdot b_2}{l} = \frac{1{,}0 \cdot b_2}{l}; \quad \text{usw.}$$

Um nun die verschiedenen Werte, die der Auflagerdruck bei den verschiedenen Stellungen von P hat, am anschaulichsten zu bestimmen, wollen wir A graphisch durch eine Strecke darstellen und diese jedesmal unter der betreffenden Laststellung von einer Nullachse $A'B'$ aus auftragen. Dieses ist dasselbe Verfahren, das im Maschinenbau bei Dampfmaschinendiagrammen usw. schon lange üblich ist. Ebenso wie hier zu jeder Kolbenstellung der Dampfdruck im Zylinder aufgetragen wird, stellen wir in Fig. 52 zu jeder Laststellung den betreffenden Auflagerdruck dar. Aller-

Digitized by Google

dings besteht der Unterschied, daß beim Diagramm der Dampfdruck durch den Indikator selbsttätig durch eine Strecke dargestellt wird, während jetzt der Auflagerdruck erst ausgerechnet und dann in einem bestimmten Maßstabe unter der Last aufgetragen werden muß.

Diese Arbeit ist aber sehr einfach. Um z. B. den bei Laststellung I auftretenden Auflagerdruck $A = \frac{P \cdot b_1}{l} = \frac{1{,}0 \cdot b_1}{l}$ durch eine Strecke darzustellen, machen wir in Fig. 52 die Strecke $A'B' = l$, tragen $A'C' = 1{,}0\,\mathrm{t}$ in einem beliebigen Maßstabe auf und ziehen $C'B'$. Nun tragen wir von B' aus die Strecke $b_1 = B'D$ auf, ziehen die Parallele zu $A'C'$ und erhalten

$$\eta_1 : 1{,}0 = B'D : B'A' = b_1 : l\,;$$

hieraus

$$\eta_1 = \frac{1{,}0 \cdot b_1}{l}\,.$$

Die Strecke η_1 stellt also in dem betreffenden Maßstab den bei Laststellung I entstehenden Auflagerdruck A dar. Wir haben demnach durch Aufzeichnen des Dreiecks $A'B'C'$ unser Ziel erreicht: den bei Laststellung I entstehenden Auflagerdruck durch eine Strecke dargestellt und diese unter der betreffenden Laststellung von einer Nullinie aus aufgetragen.

Um nun dasselbe mit Laststellung II zu machen, haben wir nur nötig, diese neue Stellung hinunterzuloten. Dann wird $B'E = b_2$; folglich

$$\eta_2 : 1{,}0 = b_2 : l\,;$$

$$\eta_2 = \frac{1{,}0 \cdot b_2}{l}\,;$$

d. h. die Strecke η_2 stellt graphisch den Auflagerdruck A dar, der bei Laststellung II auftritt. Die Linie $C'B'$ hat die Eigenschaft: Wenn irgendwo auf dem Träger eine Last von 1,0 t steht, so brauche ich die Laststellung nur hinunterzuloten und das betreffende η abzumessen. Dieses gibt dann den bei dieser Laststellung entstehenden Auflagerdruck A an.

Ist nun z. B. in Stellung I P nicht gleich 1,0 t, sondern z. B. 7,0 t, dann wäre einfach

$$A = 7{,}0 \cdot \eta_1\,;$$

und steht ferner gleichzeitig in II eine Last von 12,0 t, dann entsteht infolge dieser beiden Lasten

$$A = 7{,}0 \cdot \eta_1 + 12{,}0 \cdot \eta_2\,.$$

Digitized by Google

Stehen allgemein auf dem Träger die Lasten P_1, P_2, P_3 usw., und sind die unter diesen Lasten gemessenen Strecken gleich η_1, η_2, η_3 usw., so ist

$$A = P_1 \cdot \eta_1 + P_2 \cdot \eta_2 + P_3 \cdot \eta_3 \text{ usw.}$$

Der Maßstab für die η ist dadurch bestimmt, daß die Strecke $A'C' = 1{,}0$ t ist. Die vertikalen Linien „η" nennen wir die „Ordinaten"; Linie $B'C'$ heißt die **„Einflußlinie für den Auflagerdruck A"** oder kurz **„A-Linie"**; die Fläche $A'C'B'$ die **„Einflußfläche"**. Der Name „Einflußlinie" ist deshalb berechtigt, weil die Ordinaten dieser Linie unter jeder Laststellung den Einfluß angeben, den die betreffende Last auf den Auflagerdruck hat.

Um also mittels Einflußlinie den Auflagerdruck A infolge einer wandernden Belastung P zu bestimmen, werden wir nach folgender Regel verfahren:

Wir zeichnen eine Nullachse $A'B'$, tragen auf der Vertikalen durch A eine Strecke $A'C' = 1{,}0$ t auf und ziehen die „Einflußlinie" $C'B'$. Steht dann an irgendeiner Stelle auf dem Balken eine Last P, so erhalten wir den Auflagerdruck A, indem wir P multiplizieren mit der darunter liegenden Ordinate η der Einflußlinie ($A = P \cdot \eta$). Sind mehrere Lasten P_1, P_2 usw. vorhanden, so muß jede mit der betreffenden darunter liegenden Ordinate multipliziert werden, und dann müssen diese Produkte addiert werden:

$$A = P_1 \cdot \eta_1 + P_2 \cdot \eta_2 + \ldots$$

II. Indirekte Belastung.

Bisher haben wir den Fall vorausgesetzt, der bei Kranträgern, kleineren Brücken usw. fast immer vorliegt, nämlich, daß die Belastung sich direkt auf dem Träger befindet. Fig. 53 stellt nun den anderen Fall dar. Hier wirkt die Belastung zunächst auf die Längs- oder Zwischenträger L. Von diesen gehen die Drücke auf die Pfosten F_1, F_2, F_3 usw., und letztere übertragen dann die Kräfte auf den Hauptträger. Nun wollen wir annehmen, in der Stellung I befinde sich eine Last $P = 1{,}0$ t. Würde diese Last in derselben Lage direkt auf den Träger einwirken (wie unten punktiert eingezeichnet), so finden wir A am einfachsten, wenn wir die Einflußfläche $A'C'B'$ aufzeichnen, indem wir $A'C' = 1{,}0$ t machen. Dann gibt die Ordinate DE in dem betreffenden Maßstabe den Auflagerdruck A. Bei der vorliegenden, indirekten Kraftübertragung wirkt aber die Last P zunächst auf den Längs-

Digitized by Google

träger L. Die Auflagerdrücke dieses Längsträgers sind links, bei G, gleich $\frac{Pa}{\lambda}$ und rechts, bei F, gleich $\frac{Pb}{\lambda}$. Ersterer geht direkt auf das Widerlager und kommt also bei Berechnung von A nicht in Betracht; letzterer wird durch den Pfosten F_1 auf den Hauptträger übertragen. Da wir zunächst $P = 1{,}0\,\mathrm{t}$ genommen haben, so ist die Kraft, die der Pfosten F_1 auf den Hauptträger ausübt, gleich $\frac{1{,}0 \cdot b}{\lambda}$. Wir haben demnach folgendes: Wenn an der Stelle I die Last $P = 1{,}0\,\mathrm{t}$ steht, so ist der Auflagerdruck A des Hauptträgers so zu berechnen, als ob an der Stelle F_1 die *direkt* wirkende Last $\frac{1{,}0 \cdot b}{\lambda}$ stehen würde (wie in der Figur eingezeichnet).

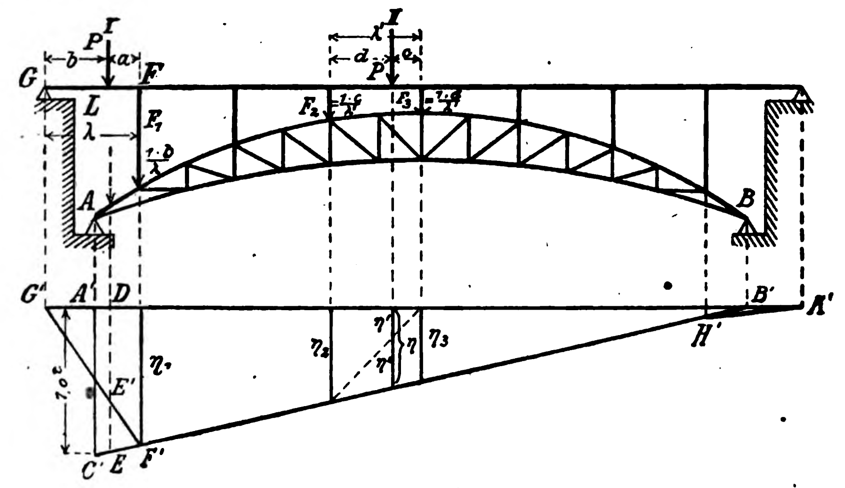


Fig. 53.

Wir finden also A, indem wir diese Last multiplizieren mit der darunter liegenden Ordinate der Einflußfläche und erhalten

$$A = \left(\frac{1{,}0 \cdot b}{\lambda}\right) \cdot \eta_1 = \frac{b \cdot \eta_1}{\lambda}.$$

Es wäre nun aber viel zu umständlich, wenn wir den obigen Ausdruck A etwa so bestimmen wollten, daß wir η_1 aus der Einflußlinie abmessen und dann mit $\frac{b}{\lambda}$ multiplizieren. Wir müssen ihn ebenfalls graphisch darstellen. Da diese Aufgabe bei den verschiedensten Einflußlinien sehr oft vorkommen wird, wollen wir ein für allemal folgende, aus der Geometrie bekannte Regel merken:

Digitized by Google

Um einen Ausdruck von der Form $\frac{x \cdot y}{z}$ graphisch auszurechnen, zeichnen wir ein Dreieck, dessen Höhe gleich dem Nenner z und dessen Grundlinie gleich dem einen Zähler x ist (Fig. 54 a oder 54 b). Ziehen wir dann im Abstande y von der Spitze die Parallele zur Grundlinie, so ist

$$u : x = y : z ;$$

also

$$u = \frac{x \cdot y}{z} .$$

Ob das Dreieck rechtwinklig oder schiefwinklig ist, ist gleichgültig; wir haben nur u abzumessen und bekommen dadurch den Wert des Bruches $\frac{x \cdot y}{z}$.

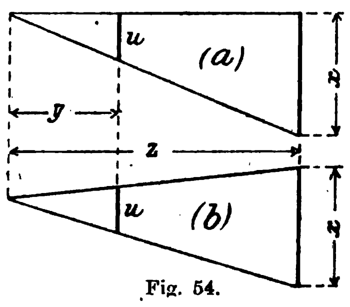


Fig. 54.

Nun wenden wir diese Regel auf die Berechnung des Auflagerdruckes $A = \frac{b \cdot \eta_1}{\lambda}$ an. Die Strecke η_1 als Grundlinie des Hilfsdreiecks ist in der Figur bereits vorhanden (Fig. 53); die Höhe λ finden wir durch Hinunterloten des Punktes G. Verbinden wir dann G' mit F' und loten die Kraft P hinunter, so ist $G'D = b$, demnach

$$DE' : \eta_1 = b : \lambda ;$$

$$DE' = \frac{b \cdot \eta_1}{\lambda} = A .$$

Wenn also in dem Felde GF irgendwo eine Last von 1,0 t steht, so gibt die unter dieser Last gemessene Ordinate der Linie $G'F'$ den Auflagerdruck A an.

Steht nun die Last von $P = 1{,}0$ t in einem der mittleren Felder, z. B. in Stellung II, so wird P durch Vermittlung des Längsträgers wieder auf die beiden zugehörigen Pfosten übertragen, und diese wirken dann als *direkte* Belastung auf den Hauptträger. Es entsteht also infolge dieser beiden Lasten, $F_2 = \frac{1{,}0 \cdot c}{\lambda'}$ und $F_3 = \frac{1{,}0 \cdot d}{\lambda'}$, der Auflagerdruck

$$A = \frac{c}{\lambda'} \cdot \eta_2 + \frac{d}{\lambda'} \cdot \eta_3 .$$

Digitized by Google

Der erste Ausdruck ist nun dargestellt durch die Strecke η', denn es ist

$$\eta' : \eta_2 = c : \lambda',$$

also

$$\eta' = \frac{c}{\lambda'} \cdot \eta_2 .$$

Der zweite Ausdruck ist entsprechend dargestellt durch η''. Die Summe beider Ausdrücke, d. i. die Strecke η, ergibt den Auflagerdruck A. Nun sieht man, daß die punktierte Linie, die η' und η'' trennt, nur eine Hilfslinie ist; um $\eta = A$ zu finden, haben wir nur nötig, die Endpunkte von η_2 und η_3 durch eine Gerade zu verbinden. Diese braucht jedoch auch nicht besonders gezeichnet zu werden, da die Einflußlinie für direkte Belastung an dieser Stelle die Endpunkte von η_2 und η_3 bereits verbindet.

In dem letzten Felde rechts gelten wieder dieselben Betrachtungen wie im ersten Felde links. Wir verbinden die Punkte H' und K' und erhalten bei jeder Stellung, die die Last $P = 1{,}0$ t im letzten Felde einnimmt, den zugehörigen Auflagerdruck A, indem wir die unter der betreffenden Laststellung befindliche Ordinate der Linie $H'K'$ abmessen. (Man führe die Ableitung selbständig durch!)

Die Linie $G'F'H'K'$ hat also folgende Eigenschaft: Steht an einer beliebigen Stelle eine indirekt wirkende Last P, und messen wir die unter der Last liegende Ordinate η, so ist der Auflagerdruck

$$A = P \cdot \eta .$$

Wir nennen sie deshalb die *Einflußlinie für den Auflagerdruck bei indirekter Belastung* oder *„A-Linie“ für indirekte Belastung.* Um diese Einflußlinie für indirekte Belastung zu zeichnen, haben wir folgende Methode abgeleitet:

Zunächst zeichnen wir die Einflußlinie so, als ob die Belastung *direkt* auf den Träger wirke. (Dreieck $A'C'B'$; $A'C' = 1{,}0$ t.) Dann suchen wir uns diejenigen Punkte auf, in denen die Belastung von den Hilfsträgern L auf den Hauptträger AB, bzw. auf die Widerlager, übergeht (diese Punkte G, F usw. wollen wir **„Belastungspunkte“** nennen). Hierauf bestimmen wir durch Hinunterloten diejenigen Ordinaten der für direkte Belastung gezeichneten Einflußlinie, die unter den Belastungspunkten liegen. Und schließlich verbinden wir die Endpunkte dieser Ordinaten durch gerade Linien. Auf diese Weise ergibt sich die Einflußlinie für indirekte

Digitized by Google

Belastung. (Unter dem äußersten linken und äußersten rechten Belastungspunkt gibt es allerdings eigentlich keine Einflußlinie mehr für direkte Belastung, da diese Einflußlinie sich nur zwischen C' und B' erstreckt. Man kann aber auch sagen: Hier hat die Einflußlinie die Ordinaten Null. Die Endpunkte G' und K' dieser Ordinaten liegen also auf der Nullachse und werden einfach mit den Endpunkten $F' \ldots H'$ der anderen unter den Belastungspunkten liegenden Ordinaten verbunden.)

§ 22a.

Beispiele zu § 22.

Erste Aufgabe.

Der Auflagerdruck A in Fig. 55a ist mittels Einflußlinie zu bestimmen! (Direkte Belastung.)

Wir wollen zunächst den einfachen Fall voraussetzen, daß wir einen Träger haben, auf den die Lasten *direkt*, also ohne Vermittlung einer Zwischenkonstruktion, einwirken. In Fig. 55a stelle AB eine eingleisige Eisenbahnbrücke von 14,00 m Spannweite dar. Die Anordnung möge so sein, daß die beiden Hauptträger in Spurweite voneinander entfernt liegen und daß die Schienen dann direkt auf dem Träger mittels Klemmplatten usw. befestigt sind. In diesem — natürlich nur in Nebengleisen zulässigen — Falle wirken dann die Raddrücke direkt auf den Träger ein. Die Belastung sei folgende:

Die Lasten $P_1 \ldots P_5$ (d. i. die Lokomotive) seien je 8,50 t. Die Lasten P_6, P_7 und P_8 (d. i. der Tender) je 6,50 t. Zwischen den Lasten P_1 bis P_5 ist je ein Abstand von 1,50 m; dann folgen 4,50 m Abstand, dann zweimal wieder je 1,50 m Abstand. Von der letzten Last bis zum Auflager B bleiben also 0,50 m übrig.

Um nun für die verschiedenen Zugstellungen den Auflagerdruck A mittels Einflußlinie zu bestimmen, zeichne ich zunächst $A'B' = 14{,}00$ m (1 m = 0,5 cm), trage $A'C' = 1{,}0$ t auf, wobei als Kräftemaßstab 1 t = 2,0 cm gewählt wurde, und verbinde C' mit B'. Dann wissen wir, daß der Auflagerdruck A infolge einer an beliebiger Stelle stehenden Last P dargestellt ist durch

$$A = P \cdot \eta,$$

worin η die unter der Last liegende Ordinate der Einflußlinie $C'B'$ ist.


Digitized by Google

Um also für den in Fig. 55a dargestellten Belastungszustand, bei dem die erste Lokomotive mit ihrem Tender auf der Brücke steht, den Auflagerdruck A zu finden, messen wir die unter den einzelnen Lasten liegenden Ordinaten, bilden von jeder Last das Produkt Last × Ordinate und erhalten A dargestellt durch die Summe dieser Produkte:

$$A = P_1 \cdot \eta_1 + P_2 \cdot \eta_2 + P_3 \cdot \eta_3 + P_4 \cdot \eta_4 + P_5 \cdot \eta_5 + P_6 \cdot \eta_6 + P_7 \cdot \eta_7 + P_8 \cdot \eta_8 .$$

Der Maßstab für die η ist dadurch bestimmt, daß wir *$A'C' = 1{,}0\,t$ durch 2,0 cm* dargestellt haben. Greifen wir nun die η aus Fig. 55b ab, so erhalten wir:

$$A = 8{,}5 \cdot \frac{2{,}00}{2} + 8{,}5 \cdot \frac{1{,}80}{2} + 8{,}5 \cdot \frac{1{,}55}{2} + 8{,}5 \cdot \frac{1{,}35}{2} + 8{,}5 \cdot \frac{1{,}15}{2}$$
$$+ 6{,}5 \cdot \frac{0{,}50}{2} + 6{,}5 \cdot \frac{0{,}30}{2} + 6{,}5 \cdot \frac{0{,}05}{2} .$$

Nun sieht man aber, daß sich im vorliegenden Falle die Rechnung ganz erheblich vereinfachen läßt. Zunächst können wir den Nenner 2 vor die Klammer ziehen. Ferner sind die ersten fünf Lasten einander gleich und ebenso die letzten drei Lasten. Wir können also den Ausdruck für A schreiben:

$$A = \tfrac{1}{2}\,[8{,}5(\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 + \eta_4 + \eta_5) + 6{,}5(\eta_6 + \eta_7 + \eta_8)] ,$$

und nun gehen wir so vor, daß wir die η *nicht einzeln* abmessen, sondern zunächst die in der ersten runden Klammer stehende Summe $\eta_1 + \ldots + \eta_5$ mittels Stechzirkel oder auf einem Papierstreifen zusammenzählen und dann die in der zweiten runden Klammer stehende Summe $\eta_6 + \eta_7 + \eta_8$. In dieser Weise ergibt sich aus der Figur:

$$\eta_1 + \ldots + \eta_5 = 7{,}85 \text{ cm},$$
$$\eta_6 + \eta_7 + \eta_8 = 0{,}85 \text{ cm}.$$

Hiermit also

$$A = \tfrac{1}{2}\,[8{,}5 \cdot 7{,}85 + 6{,}5 \cdot 0{,}85]$$
$$= 36{,}1 \text{ t}.$$

Um nun den Auflagerdruck, A_1, für die Zugstellung zu berechnen, bei der die erste Last, P_1, am Punkte *1*, d. i. 2,0 m vor dem linken Auflager steht, müßten wir zunächst diese Laststellung in Fig. 55a einzeichnen, durch Hinunterloten der Lasten die betreffenden η bestimmen und dann wieder die entsprechende Summe bilden. Um die Figur aber möglichst klar zu halten, ist hier folgender Weg eingeschlagen:

Digitized by Google

Auf einem Stück Pauspapier, dessen Umrisse in Fig. 55c durch punktierte Linien angedeutet sind, ist zunächst die horizontale Linie ab gezogen, und senkrecht dazu sind in den Abständen der einzelnen Achsen die mit (P_1), (P_2), ..., (P_8) bezeichneten Linien eingetragen. In Fig. 55c bedeuten also die ersten fünf Linien die Lokomotive, die drei folgenden den Tender. Wenn die Brücke länger wäre, müßte man natürlich den Zug noch weiter dazu zeichnen; überhaupt muß auf diesem Pauspapier das Zugschema für die Anzahl von Achsen dargestellt sein, die bei Vollbelastung auf der Brücke Platz haben.

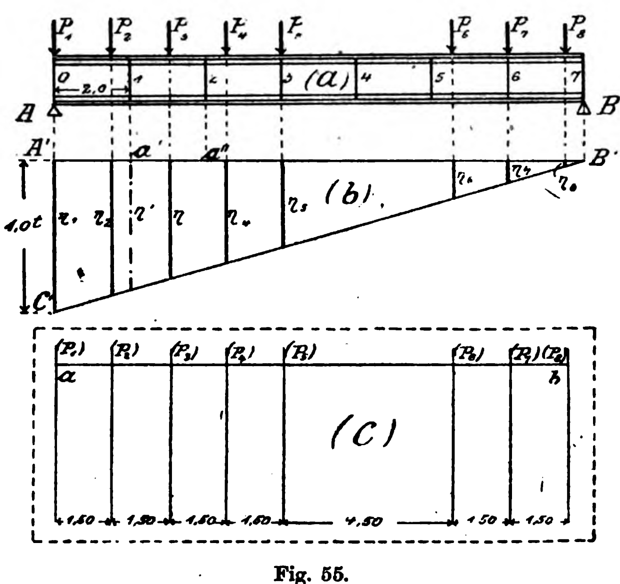


Fig. 55.

Wenn wir jetzt A_1 berechnen wollen, so brauchen wir nicht den Lastenzug in seiner neuen Stellung — Last P_1 über *1* — einzuzeichnen; wir legen einfach Fig. 55b so auf Fig. 55b, daß die Linie ab zusammenfällt mit $A'B'$, und daß Punkt a auf a' zu liegen kommt. (Um dieses ausführen zu können, haben wir ja vorhin Fig. 55c auf ein besonderes Stück Pauspapier gezeichnet.) Zunächst sieht man dann, daß bei dieser Laststellung sieben Achsen auf der Brücke stehen. Die Ordinate unter der ersten Last ist η'. *Diese braucht jetzt aber nicht mehr in Fig. 55b eingezeichnet zu werden, sondern kann mit Hilfe der Linie (P_1) auf dem Pauspapier direkt abgemessen werden.* In derselben Weise ergeben sich die zu den Kräften $P_2 \ldots P_7$ gehörigen Ordinaten der Einflußlinie $C'B'$.

Digitized by Google

Bilden wir dann wieder (mittels Stechzirkel) die Summe aller Ordinaten, die zu *gleichen* Lasten gehören, so erhalten wir die Summe der zu den Lokomotivrädern gehörigen Ordinaten zu 6,45 cm und die den Tenderrädern entsprechende Summe zu 0,20 cm. (Man führe diese Summierung selbständig durch!) Hiermit wird

$$A_1 = \tfrac{1}{2}(8{,}5 \cdot 6{,}45 + 6{,}5 \cdot 0{,}20) \qquad \text{(Es war 1 cm} = {}^1/_2 \text{ t)}$$
$$= 28{,}1 \text{ t.}$$

Wir wollen noch den Auflagerdruck, A_2, für den Fall berechnen, daß der Zug mit der ersten Achse am Punkt *2*, d. i. 4,0 m vor dem linken Auflager, steht. Wir legen dann das Zugschema Fig. 55c so auf die Einflußlinie Fig. 55b, daß (P_1) 4,0 m von A' entfernt ist, daß also Punkt a mit a'' zusammenfällt. Dann sieht man, daß bei dieser Stellung nur die fünf Lokomotivräder auf dem Träger stehen. Der Auflagerdruck ergibt sich hierbei

$$A_2 = \tfrac{1}{2} \cdot 8{,}5 \cdot 5{,}0$$
$$= 21{,}25 \text{ t,}$$

worin die Zahl 5,0 die Summe der fünf Ordinaten bedeutet.

In entsprechender Weise führe man die Berechnung durch für die Fälle, daß die erste Achse bei den Punkten *3*, *4*, *5* und *6* steht!

An dieser Stelle sei auf den Unterschied zwischen A-Polygon und A-Linie (Einflußlinie für A) hingewiesen. Wenn wir das A-Polygon gezeichnet haben (Fig. 50f und Fig. 51), so brauchen wir *nur die erste* Last hinunterzuloten und haben dann sofort in der darunter liegenden Ordinate den gesamten Auflagerdruck (infolge *sämtlicher* auf dem Träger befindlichen Lasten). Wenn wir aber die Einflußlinie gezeichnet haben, so müssen wir jede Last einzeln hinunterloten, hierauf jede Last mit ihrer zugehörigen Ordinate multiplizieren und diese sämtlichen Produkte addieren. Dann erst haben wir den Auflagerdruck. Es sei aber jetzt schon gesagt, daß die Einflußlinien trotz ihrer scheinbaren Umständlichkeit viel wichtiger sind als das A-Polygon.

Zweite Aufgabe. (Indirekte Belastung.)

In Fig. 56 ist nun dieselbe Brücke von 14,00 m Spannweite dargestellt. Jetzt wirken aber die Raddrücke nicht mehr direkt auf die Hauptträger, sondern zwischen den Hauptträgern (von denen in Fig. 56a der Deutlichkeit wegen nur der Umriß gezeichnet ist) liegen die Querträger und zwischen diesen die

Digitized by Google

Längsträger L. Auf letzteren sind dann die Schwellen mit den Schienen gelagert. Die Lastübertragung ist jetzt also die, daß der Raddruck durch Vermittlung der Schiene zunächst auf die Schwelle übertragen wird. Von hier aus geht er dann auf die Längsträger über, worauf er durch Vermittlung der Querträger auf die Hauptträger geleitet wird. Wenn man sich also vollständige Klarheit über die Kräfteübertragung verschaffen wollte, müßte man in Fig. 56a auf den Längsträgern noch die Schwellen mit der Schiene einzeichnen und dann die Wirkung eines auf die Schiene ausgeübten Raddruckes in der soeben besprochenen Weise verfolgen. Augenscheinlich gäbe dieses eine unnötig komplizierte Rechnung. Man nimmt deshalb der Einfachheit wegen an, daß der Raddruck *direkt auf die Längsträger* einwirkt, d. h. man rechnet

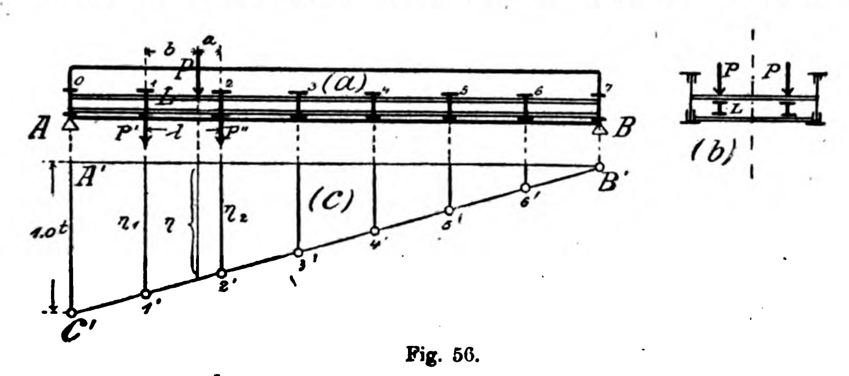


Fig. 56.

so, als ob die Schwelle nicht vorhanden und die Schienen direkt auf den Längsträgern gelagert wären. Hierdurch wird die Berechnung einfacher, und der Fehler infolge dieser Vereinfachung ist stets verschwindend klein.

Nun möge an beliebiger Stelle *eine* Achse mit dem Gesamtdrucke von $2P$ stehen. Der Breite nach ist dann die Brücke symmetrisch belastet (Fig. 56b), auf jeden der beiden Längsträger und auch auf jeden Hauptträger entfällt dann die Hälfte des Achsdruckes, also ein Raddruck im Betrage von P. Wir haben also wieder einen Träger AB, der durch eine bewegliche Belastung P belastet ist, und dessen Auflagerdruck A bei den verschiedenen Stellungen der Last bestimmt werden soll. Von Fig. 55 unterscheidet sich die Aufgabe aber insofern, als jetzt die Belastung nicht *direkt* auf dem Träger ruht, sondern erst *indirekt*, nämlich durch Vermittlung der Längs- und der Querträger, auf den Balken einwirkt.

Digitized by Google

Aber auch für diesen Fall haben wir ja die Einflußlinie für den Auflagerdruck entwickelt (Abschnitt II von § 22). Das Rezept war folgendes: Wir zeichnen zunächst die Einflußlinie $A'C'B'$ so, als ob die Belastung direkt auf dem Hauptträger wäre. Dann suchen wir die „*Belastungspunkte*" auf; also diejenigen Punkte, in denen die Hilfsträger (Längsträger) die Belastung abgeben. In Fig. 56 sind dieses die Punkte 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 und 7. Diese Punkte loten wir hinunter und bestimmen hierdurch die zu den Belastungspunkten gehörigen Ordinaten der vorhin gezeichneten Einflußlinie; es sind dieses die Ordinaten $1{,}0\,t$, η_1, η_2, η_3, ..., 0. Zum Schlusse verbinden wir die Endpunkte C', $1'$, $2'$, ..., B' dieser ausgezeichneten Ordinaten durch gerade Linien und erhalten die Einflußlinie für indirekte Belastung.

Dieses wäre also der allgemeine Weg, wie man in einem solchen Falle von indirekter Belastung die A-Linie zu zeichnen hätte. Man sieht aber, daß in Fig. 56 die Einflußlinie für indirekte Belastung schließlich genau so herauskommt, wie die für direkte Belastung war. Das kommt nämlich daher, weil hier der erste und der letzte Belastungspunkt gerade über den Auflagerpunkten liegen. Wenn sie anders angeordnet sind (Fig. 53 und Fig. 57), stimmen die beiden Einflußlinien durchaus nicht überein.

Steht nun in Fig. 56 irgendwo eine Last P, so brauchen wir nur hinunterzuloten und haben den Auflagerdruck A:

$$A = P \cdot \eta .$$

Dritte Aufgabe. (Indirekte Belastung.)

Die Fig. 57 unterscheidet sich von Fig. 56 dadurch, daß jetzt außer den bereits vorhandenen sieben Längsträgern noch die beiden „Schleppträger" L'' und L'' hinzugekommen sind. Man trifft diese hier im Prinzip dargestellte Anordnung häufig, weil sich dadurch ein besserer Übergang des auf der Brücke liegenden Gleises an die anschließenden Teile erzielen läßt. Uns interessiert nun die Frage: Wenn sich an beliebiger Stelle der Brücke eine Last P befindet (die durch Vermittlung der Längs- und Querträger auf den Hauptträger übertragen wird), ist dann der Auflagerdruck A derselbe wie bei der Anordnung von Fig. 56, oder haben die Schleppträger einen Einfluß auf die Berechnung von A? Wir wollen diese Frage wieder an Hand der Einflußlinie entscheiden.

Digitized by Google

Es handelt sich um indirekte Belastung; denn die Belastung wirkt zunächst auf die Hilfsträger (Längsträger) und wird dann erst von diesen auf die Hauptkonstruktion übertragen. Die Einflußlinie für diesen Fall zeichnen wir in der bereits geübten Weise. Die Hilfsträger geben die Belastung ab in den Punkten *D*, *0*, *1*, *2*, *3*, *4*, *5*, *6*, *7* und *E*. Dieses sind also die Belastungspunkte. Die zu den Belastungspunkten gehörigen Ordinaten (der für direkte Belastung gezeichneten Einflußlinie) sind, im mittleren Teile, η_0, η_1, η_2, η_3, η_4, η_5, η_6 und *0*. Zu den Belastungspunkten *D* und *E* gehören ebenfalls die Ordinaten Null. Denn eine Last links von *A* oder rechts von *B* wirkt, wenn die Zwischenkonstruktion nicht vorhanden ist, überhaupt nicht auf den Balken; d. h., links von *A'* und rechts von *B'* hat die Einflußlinie bei direkter Belastung

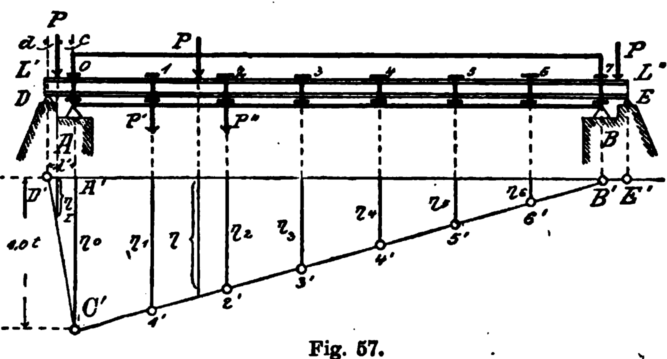


Fig. 57.

die Ordinaten Null. Nun verbinden wir die Endpunkte der unter den Belastungspunkten liegenden Ordinaten, also die Punkte *D'*, *C'*, *1'*, *2'*, *3'*, *4'*, *5'*, *6'*, *B'* und *E'*, durch gerade Linien und erhalten die für Fig. 57 maßgebende Einflußlinie.

Wie man sieht, ist die Einflußlinie in Fig. 57 im mittleren Teile dieselbe, wie sie bei direkter Belastung wäre. In den äußeren Teilen wird sie aber, wie es ja auch selbstverständlich ist, durch die Schleppträger abgeändert. Sobald die Einflußlinie gezeichnet ist, können wir dann durch Hinunterloten der Last den Auflagerdruck *A* bestimmen.

§ 23.

Einführung in das Arbeiten mit Einflußlinien.

In diesem Vortrage haben wir zum erstenmal mit Einflußlinien zu tun gehabt. Die bisherigen Aufgaben waren allerdings so einfach, daß wir sie ebensogut oder vielleicht noch schneller

Digitized by Google

auf anderem Wege (z. B. rechnerisch) hätten lösen können. Wegen der außerordentlichen Wichtigkeit, die die Einflußlinien für unsere folgenden Untersuchungen haben, ist es aber nur zu empfehlen, sich so früh wie möglich mit diesem wertvollen Hilfsmittel der Statik vertraut zu machen. In diesem Sinne wollen wir noch einige Sätze über Einflußlinien durchnehmen.

I. Satz.

Steht eine Lastengruppe P_1, P_2 usw. über einem geraden, d. h. ohne Knick durchlaufenden, Stück einer Einflußlinie, so kann man die Wirkung dieser Lastengruppe auch dadurch bestimmen, daß man ihre Resultierende R multipliziert mit der zu dieser gehörigen Ordinate η_R.

1. Um diesen Satz zu verstehen, gehen wir von der in Fig. 58 dargestellten Aufgabe aus: Der Balken AB ist durch die bewegliche, aus den drei Lasten P_1, P_2 und P_3 bestehende Lastengruppe Fig. 58c belastet. Der Auflagerdruck A ist für die verschiedenen Stellungen des Wagens zu ermitteln!

Die Belastung wirkt indirekt; denn sie geht zunächst auf die Hilfsträger und wird von diesen an den Belastungspunkten *0*, *1*, *2*, *3* und *4* abgegeben. Die Einflußlinie für A, unter Berücksichtigung der indirekten Lasteinwirkung, ist in Fig. 58b gezeichnet. Sie ist der gebrochene Linienzug $0'-1'-2'-3'-4'$.

Befindet sich nun der Wagen z. B. in der Stellung I, so ergibt sich also der hierbei entstehende Auflagerdruck, indem wir die Lasten hinunterloten, die Ordinaten η_1, η_2 und η_3 abmessen und die Produkte aus Last mal Ordinate ausrechnen. Dann ist der Auflagerdruck:

$$A_I = P_1 \cdot \eta_1 + P_2 \cdot \eta_2 + P_3 \cdot \eta_3 \,. \tag{I}$$

Um nun aber diese Rechenarbeit etwas zu vereinfachen, können wir folgendes machen. Wir drücken in Fig. 58b die Ordinaten η durch die Abstände x und den Winkel α aus. Also:

$$\eta_1 = x_1 \cdot \operatorname{tg}\alpha\,; \qquad \eta_2 = x_2 \cdot \operatorname{tg}\alpha\,; \qquad \eta_3 = x_3 \cdot \operatorname{tg}\alpha\,.$$

Diese Werte setzen wir in die rechte Seite der Gleichung (I) ein und erhalten

$$P_1 \cdot \eta_1 + P_2 \cdot \eta_2 + P_3 \cdot \eta_3 = P_1 \cdot x_1 \operatorname{tg}\alpha + P_2 \cdot x_2 \operatorname{tg}\alpha + P_3 \cdot x_3 \operatorname{tg}\alpha$$

$$= (P_1 \cdot x_1 + P_2 \cdot x_2 + P_3 \cdot x_3) \operatorname{tg}\alpha\,. \tag{Ia}$$

In der Klammer steht die Summe aus den Produkten Kraft mal Abstand vom Lager B. Nun ist aber nach dem Satze vom

Digitized by Google

statischen Moment (§ 9) die Summe der statischen Momente von Kräften in bezug auf irgendeinen Punkt stets gleich dem statischen Moment der Resultierenden in bezug auf diesen Punkt. Denken wir uns also von den drei Lasten P_1, P_2 und P_3 der Laststellung I die Resultierende R eingezeichnet, und bezeichnen wir deren Abstand bis B mit x_R, so können wir die obige Gleichung schreiben:

$$P_1 \cdot \eta_1 + P_2 \cdot \eta_2 + P_3 \cdot \eta_3 = R \cdot x_R \cdot \operatorname{tg} \alpha .$$

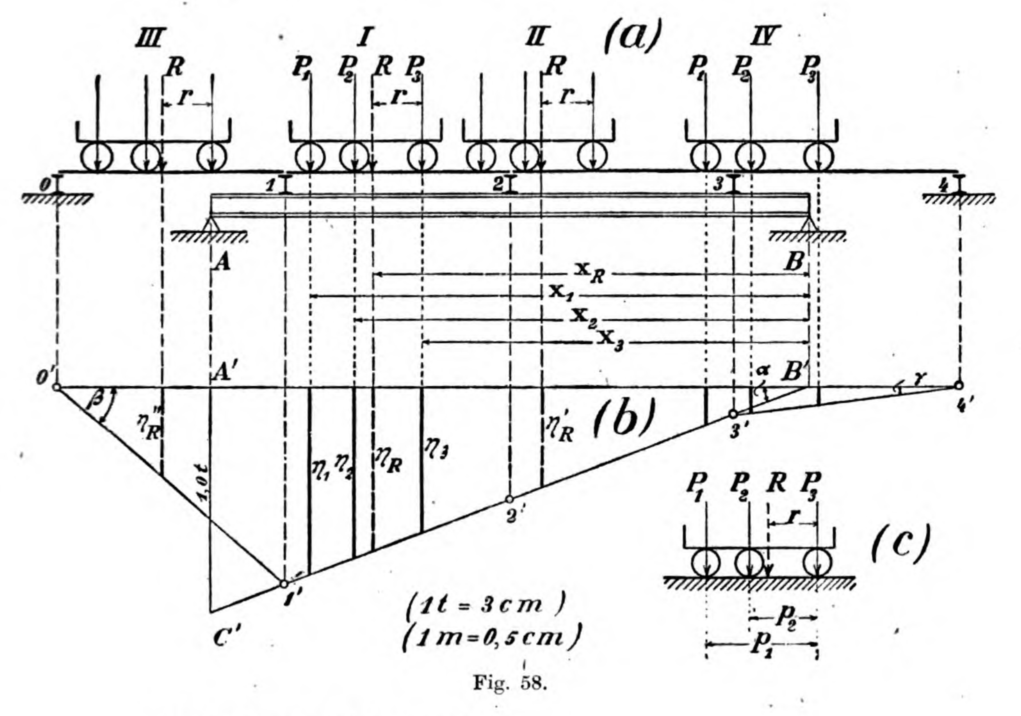


Fig. 58.

Nach Fig. 58b ist nun aber:

$$x_R \cdot \operatorname{tg} \alpha = \eta_R ,$$

worin η_R die unter der Resultierenden liegende Ordinate der Einflußlinie ist. Wir haben also das Resultat

$$\boldsymbol{P_1 \cdot \eta_1 + P_2 \cdot \eta_2 + P_3 \cdot \eta_3 = R \cdot \eta_R} .$$

Hiermit ist unser Ziel erreicht: Statt jede Last einzeln mit ihrer Ordinate zu multiplizieren, nehmen wir einfach die Resultierende R der betreffenden Lastengruppe und multiplizieren sie mit ihrer Ordinate η_R. Augenscheinlich ist dies eine erhebliche Ersparnis an Rechenarbeit.

Digitized by Google

2. Die **Lage der Resultierenden** innerhalb der Kräftegruppe muß man natürlich vorher bestimmen. Besteht die Belastung aus symmetrisch angeordneten Kräften, so liegt die Resultierende in der Mitte. Ist die Lastengruppe unsymmetrisch, so ermittelt man die Lage nach dem Satz vom statischen Moment (§ 9). Für Fig. 58c z. B. hat man:

Größe von R: $R = P_1 + P_2 + P_3$,

Lage von R: $R \cdot r = P_1 \cdot p_1 + P_2 \cdot p_2$ (Bezugspunkt auf P_3 angenommen),

hieraus $$r = \frac{P_1 \cdot p_1 + P_2 \cdot p_2}{R} = \frac{P_1 \cdot p_1 + P_2 \cdot p_2}{P_1 + P_2 + P_3}.$$

Sobald dann r berechnet ist, kann man die Resultierende in Fig. 58a einzeichnen und durch Hinunterloten die Ordinate η_R abmessen.

3. Nachdem somit die Stellung I erledigt ist, möge sich der Wagen nach Stellung II verschieben. Augenscheinlich gilt dann dieselbe Rechenerleichterung: Wir zeichnen R ein (auf Grund des bereits berechneten Abstandes r von der rechten Last), messen η'_R ab, und finden den jetzt entstehenden Auflagerdruck

$$A_{II} = R \cdot \eta'_R .$$

Rückt nun der Wagen in die Stellung III, so daß er über dem Stück $0'1'$ der Einflußlinie steht, so können wir die entsprechende Ableitung durchführen, wie vorhin für Stellung I. Wir würden dann die unter den Lasten liegenden Ordinaten durch den Neigungswinkel β und die Abstände bis zum Punkte $0'$ ausdrücken. (Man führe die Ableitung im einzelnen selber durch!) Das Resultat wäre dann wieder folgendes: Statt jede Last einzeln mit ihrer Ordinate zu multiplizieren und dann diese Produkte zu addieren, können wir einfach die Resultierende R mit ihrer Ordinate nehmen. Also

$$A_{III} = R \cdot \eta''_R .$$

(Die Ziffer bei A bezeichnet immer die betreffende Laststellung.)

4. Auf eine Einschränkung der soeben entwickelten Methode muß aber aufmerksam gemacht werden: Dieser Ersatz einer ganzen Lastengruppe durch ihre Resultierende ist nur dann zulässig, wenn die Lasten über einem geraden Stück der Einflußlinie stehen. *Es darf also in der Strecke zwischen der ersten und der letzten Last kein Knick in der Einflußlinie sein.* Wenn dieses der Fall ist, s. Stellung IV in Fig. 58, so gehören nämlich zu den einzelnen,

Digitized by Google

unter den Lasten liegenden Ordinaten *verschiedene* Neigungswinkel der Einflußlinie ($\sphericalangle\,\alpha$ und $\sphericalangle\,\gamma$). Wir können also die Ordinaten nicht mehr sämtlich durch einen Neigungswinkel und durch die Abstände von einem Punkte ausdrücken; d. h., wir können nicht mehr eine Gleichung aufstellen, die der Gleichung (I a) von vorhin entsprechen würde. In diesem Falle bleibt also nichts anderes übrig, als jede Last einzeln mit ihrer Ordinate zu multiplizieren; oder höchstens die Lastengruppe in Untergruppen einzuteilen, von denen jede über geraden (ungeknickten) Strecken der Einflußlinie steht.

5. Zum Schlusse eine **Verallgemeinerung**: Wir werden später die Methode der Einflußlinien nicht nur zur Berechnung von Auflagerkräften, sondern zu vielen anderen Untersuchungen verwenden. Z. B. zur Bestimmung der Kräfte, die in den Stäben eines Fachwerkes wirken. Dieses ist sogar das Hauptanwendungsgebiet der Einflußlinien. Die einzelnen Ordinaten bedeuten dann also nicht die Auflagerkraft, sondern die gesuchte Stabkraft. Es wird sich aber zeigen, daß die *Form* der Einflußlinien fast immer dieselbe ist: Sie setzen sich aus Linien zusammen, die ein Stück gerade laufen, dann einen Knick haben, dann wieder eine Strecke gerade sind, usw. Wenn wir dann eine bewegliche Lastengruppe haben, die an den verschiedenen Stellen über der Einflußlinie steht, so können wir von der vorhin bewiesenen Rechenvereinfachung Gebrauch machen. Denn bei unserer Ableitung kam es gar nicht darauf an, daß die Ordinaten η gerade eine Auflagerkraft ergeben. Sie können auch irgend etwas anderes zu bedeuten haben; z. B. eine Stabkraft od. dgl. Es kommt nur darauf an, daß die betreffende Laststellung so ist, daß das zwischen der ersten und der letzten Last befindliche Stück der Einflußlinie *gerade* (ohne Knick oder Biegung) durchläuft. Ist diese Bedingung erfüllt, so können wir stets statt der einzelnen Lasten die Resultierende einführen.

Aufgabe: Man nehme $P_1 = 4{,}0$ t; $P_2 = 4{,}0$ t; $P_3 = 7{,}0$ t. Die Längen messe man aus Fig. 58 ab, und bestimme für die verschiedenen Laststellungen den Auflagerdruck A! Ferner wende man diese Methode auf Fig. 55 an. [Hierbei wird man zweckmäßig nicht sämtliche Lasten P_1 bis P_8 durch *eine* Resultierende ersetzen (deren Lage man dann erst berechnen müßte), sondern wird die Gruppe P_1 bis P_5 und die Gruppe P_6 bis P_8 je zu einer Resultierenden zusammenfassen. Dann hat man sofort:

$$A = R_{1-5} \cdot \eta_3 + R_{6-8} \cdot \eta_7 .]$$

Digitized by Google

II. Satz.

Steht über einer Einflußlinie eine gleichmäßig verteilte Belastung, so ergibt sich das Resultat, indem man die Belastung pro Längeneinheit multipliziert mit dem Inhalte der unter der Belastung liegenden Einflußfläche.

1. Hier bekommen wir zum erstenmal den Begriff **„verteilte Belastung"**. Die bisherigen Belastungen waren folgende: In einem Punkte stand eine Last von bestimmter Größe; dann folgte eine Strecke unbelastet; dann wieder eine Last; usw. Eine solche Anordnung nennt man: „Belastung durch *Einzellasten*". (Beispiel: Eisenbahnzug, usw.) Aus dieser Belastung entsteht nun, wenn die Lasten unendlich klein werden und dafür aber auch unendlich nahe aufeinander folgen, die sog. *„verteilte Belastung"*. Das beste Beispiel hierfür ist die Belastung durch Eigengewicht. Die Erdanziehung wirkt ja auf jedes der unendlich kleinen Teile des Körpers, so daß das Gewicht eines Körpers eine Reihe von unendlich kleinen und unendlich nahen Kräften darstellt. Weitere Beispiele sind die Belastung eines Körpers durch Mauerwerk, Erdschüttung usw. Auch Belastung durch Menschengedränge wird hierzu gerechnet.

Man muß nun unterscheiden zwischen einer **gleichmäßig** und einer **ungleichmäßig** verteilten Belastung. Die erstere ist eine solche, bei der die einzelnen kleinen, aufeinanderfolgenden Kräfte alle untereinander gleichgroß sind (Beispiel: Eigengewicht eines Balkens von überall gleichem Querschnitt und Material; Belastung durch gleichmäßige Aufmauerung; usw.). Die ungleichmäßig verteilte Belastung ist eine solche, bei der die einzelnen Kräfte verschieden groß sind (Beispiel: Belastung durch Mauerwerk von verschiedener Höhe).

Die gleichmäßig verteilte Belastung kommt in der Praxis am häufigsten vor; mit ihr wollen wir uns zunächst beschäftigen. Die Größe einer solchen Belastung bestimmt man am besten dadurch, daß man erstens angibt, wieviel Last auf die Längeneinheit (cm, m) kommt, und zweitens angibt, auf welche Gesamtlänge sich die Belastung erstreckt. Die erste Angabe wollen wir die *„Belastungshöhe"* oder *„Dichte"* oder „Intensität" der Belastung nennen; die zweite Angabe heißt die *„Belastungslänge"*. Die „Dichte" bezeichnet man meistens mit g, p oder q. [„g" hauptsächlich für Belastung durch Eigengewicht, „p" für bewegliche Last (Verkehrslast) und „q" für Belastung, bei der ruhende und bewegliche Last zusammengenommen ist.]

Digitized by Google

2. Nach diesen Vorbemerkungen gehen wir zu der in Fig. 59 dargestellten Aufgabe: Der Träger AB ist auf eine Strecke x durch eine gleichmäßig verteilte Belastung beansprucht, die p kg pro m beträgt. Der Auflagerdruck A ist mittels Einflußlinie zu bestimmen:

Die Länge x zerlegen wir in lauter kleine Abstände u. Nun betrug auf *ein* Meter Länge die Belastung p kg, folglich beträgt die Belastung auf u Meter Länge $p \cdot u$ kg. Durch diese Zerlegung der gesamten Belastungslänge in lauter kleine Strecken haben wir also die verteilte Belastung auf das zurückgeführt, was sie ja auch eigentlich ist; nämlich: eine Aufeinanderfolge von sehr kleinen

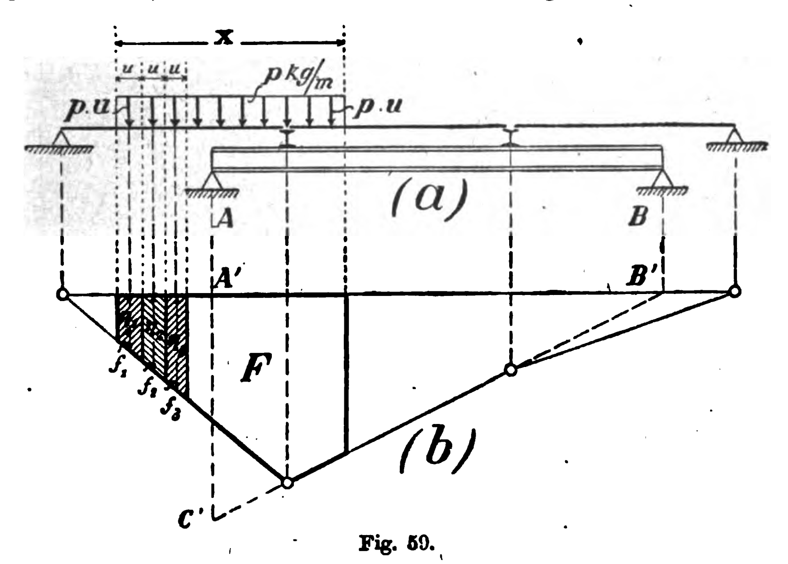


Fig. 59.

und sehr nahe beieinander stehenden Einzellasten. Und zwar hat jede derselben die Größe $p \cdot u$.

Nun gehört zu der ersten dieser kleinen Einzellasten die Ordinate η_1 der Einflußlinie. Der Auflagerdruck A', den diese erste kleine Einzellast hervorbringt, ist also gleich $p \cdot u \cdot \eta_1$ (Last mal Ordinate). Der Auflagerdruck infolge der zweiten kleinen Einzellast ist entsprechend $p \cdot u \cdot \eta_2$; infolge der dritten kleinen Einzellast $p \cdot u \cdot \eta_3$; usw. Infolge sämtlicher kleinen Einzellasten, d. h. infolge der gesamten verteilten Last, entsteht also der Auflagerdruck

$$A = p \cdot u \cdot \eta_1 + p \cdot u \cdot \eta_2 + p \cdot u \cdot \eta_3 + \ldots$$
$$= p\,(u \cdot \eta_1 + u \cdot \eta_2 + u \cdot \eta_3 + \ldots).$$

Dieser Ausdruck läßt sich aber noch vereinfachen. Das Produkt $u \cdot \eta_1$ ist nämlich der Flächeninhalt f_1 des ersten kleinen, in Fig. 59b

Digitized by Google

schraffierten Trapezes (u ist die Höhe, η_1 die Mittellinie). Entsprechend ist $u \cdot \eta_2$ der Inhalt f_2 des zweiten Trapezes; $u \cdot \eta_3$ der Inhalt f_3; usw. Wir haben also

$$A = p\,(f_1 + f_2 + f_3 + \ldots),$$

und dafür können wir schreiben

$$A = p \cdot F,$$

worin F den Inhalt der unter der Belastungsstrecke liegenden Einflußfläche ist. (Sämtliche Streifen $f_1 + f_2 + f_3 + \ldots$ bilden zusammen die in Fig. 59b stark umrandete Fläche F.) Somit haben wir bewiesen, daß sich die gesuchte Größe A infolge einer gleichmäßig verteilten Belastung dadurch ergibt, daß man die Belastung pro Längeneinheit multipliziert mit dem Inhalte F der unter der Belastung liegenden Einflußfläche. (Den Inhalt einer solchen Fläche F berechnet man, indem man sie in Trapeze und Dreiecke zerlegt.)

3. Augenscheinlich gilt die obige Regel nicht nur für den Auflagerdruck A, sondern für jede Einflußlinie, ganz gleichgültig, was sie zu bedeuten hat. Wenn wir also später Stabkräfte usw. mittels Einflußlinien zu berechnen haben, so werden wir, vorausgesetzt, daß die Belastung gleichmäßig verteilt ist, ebenfalls nach der soeben durchgenommenen Regel verfahren.

Auch wenn — wie es später vorkommen wird — die betreffende Einflußlinie nicht aus geraden Stücken besteht, sondern eine Kurve ist, gilt das Verfahren. Denn durch die Einteilung in die Abschnitte u wird die Kurve in lauter kleine gerade Linien zerlegt. (Jede gekrümmte Linie läßt sich auffassen als eine aus *geraden* Stücken bestehende gebrochene Linie, wenn man nur die einzelnen Stücke unendlich klein macht.) Die einzelnen Flächenstreifen f_1, f_2, f_3 usw. stellen dann also wieder kleine Trapeze dar von dem Inhalt $u \cdot \eta_1$, $u \cdot \eta_2$, $u \cdot \eta_3$ usw.; so daß die Summe $u \cdot \eta_1 + u \cdot \eta_2 + u \cdot \eta_3 + \ldots$ auch bei einer krummlinigen Einflußlinie den Inhalt der unter der Belastung liegenden Einflußfläche ergibt.

Zusatz: Ist die Belastung nicht gleichmäßig verteilt, so ist das obige Verfahren nicht zulässig. Dann gibt es ja überhaupt kein bestimmtes p (Belastung pro m), sondern p wechselt von Punkt zu Punkt. In diesem Falle kann man sich durch Anwendung des ersten Satzes dieses Paragraphen helfen: Zunächst wird die Belastung so in einzelne Strecken eingeteilt, daß zu jeder Strecke

Digitized by Google

ein *gerades* Stück der Einflußlinie gehört; dann wird zu jeder Strecke die Resultierende R der Belastung bestimmt und hierauf die Resultierende mit ihrer zugehörigen Ordinate η_R multipliziert. Die Resultierende R findet man bei ganz unregelmäßiger Belastung graphisch, indem man die verteilte Belastung in eine Anzahl Einzellasten auflöst. Ist eine Belastung Q *dreieckförmig* auf einer Strecke x verteilt, so liegt ihre Resultierende ($R = Q$) in der Entfernung $\frac{2}{3}x$ von der Spitze des Dreiecks (s. § 10; 5. Aufgabe, Schluß).

Ist die Einflußlinie eine Kurve, so kann man sie — angenähert — in einzelne, möglichst kurze, *gerade* Stücke einteilen, und zu jedem dann die Resultierende der darüber liegenden Belastung bestimmen.

III. Satz.

Ist für irgendeine zu berechnende Größe zunächst die Einflußlinie für direkte Belastung gegeben, so ergibt sich hieraus die Einflußlinie für indirekte Belastung, indem man die Belastungspunkte hinunterlotet und die Endpunkte der hierdurch bestimmten Ordinaten durch gerade Linien verbindet.

1. Für einen besonderen Fall haben wir diesen Satz schon bewiesen: Als wir den Auflagerdruck eines einfachen Balkens mittels Einflußlinie untersuchten, hatten wir letztere zunächst für *direkte* Belastung abgeleitet. Falls dann *indirekte* Belastung eintrat, loteten wir einfach die Belastungspunkte hinunter und verbanden die Endpunkte der dadurch bestimmten Ordinaten durch gerade Linien. Im folgenden wollen wir nun nachweisen, daß diese Regel auch für jede beliebige Einflußlinie maßgebend ist. Eigentlich ist diese Verallgemeinerung ja selbstverständlich; es wird aber nichts schaden, wenn wir sie bei einer etwas komplizierten Einflußlinie noch einmal durchnehmen.

2. Die Untersuchung gilt ganz allgemein für jede beliebige Einflußlinie. Nur, um sie möglichst anschaulich erklären zu können, wollen wir ein bestimmtes Beispiel zugrunde legen: In Fig. 60a haben wir einen „Träger auf drei Stützen". Dieser hat $1+2+1=4$ Auflagerunbekannte; folglich ist er statisch unbestimmt gelagert. Die Einflußlinie für den Auflagerdruck A dieses statisch unbestimmten Systems, und zwar unter der Voraussetzung, daß die Belastung *direkt* auf den Balken wirkt, ist in Fig. 60b gezeichnet. Wie man sie findet, kann hier noch nicht erklärt werden; es sei nur darauf hingewiesen, daß sie eine Kurve ist, und daß sie aus einem positiven und einem negativen Teil besteht. Letzteres be-

Digitized by Google

deutet, daß bei dieser Konstruktion je nach der Laststellung ein Auflagerdruck entsteht, der von unten nach oben, oder aber von oben nach unten wirkt. Wir unterscheiden diese beiden Fälle durch entgegengesetzte Vorzeichen; und zwar gibt man dem ersteren Falle (der ja meistens vorliegt) das positive und dem zweiten Falle das negative Vorzeichen. (Im zweiten Falle muß der Auflagerpunkt verankert werden, weil sich sonst das Balkenende abheben würde.) Um das verschiedene Vorzeichen der Ordinaten auch in der Zeichnung zum Ausdruck zu bringen, trägt man die positiven Ordinaten von der Nullachse $A'C'$ aus nach unten und die negativen nach oben — oder auch umgekehrt — auf.

Eine direkt wirkende Last von der Größe 1,0 t würde also in der Stellung m (Fig. 60a) nach Fig. 60b einen Auflagerdruck

$$A_m = +\eta_m = +0{,}61\ \mathrm{t}\,,$$

und zwar von unten nach oben wirkend, erzeugen. Und in der Stellung n einen Auflagerdruck

$$A_n = -\eta_n = -0{,}07\ \mathrm{t}\,.$$

Dieser zeigt aber von oben nach unten und muß also von der Verankerung aufgenommen werden.

3. Nach diesen Erklärungen kehren wir zu unserer eigentlichen Aufgabe zurück: Wenn die Belastung dieses Trägers nicht direkt, sondern indirekt wirkt, wie in Fig. 60a gezeichnet, wie müssen wir dann die für direkte Belastung gezeichnete Einflußlinie Fig. 60b abändern, damit sie auch für indirekte Belastung verwendet werden kann?

Die wandernde Last P nehmen wir gleich 1,0 t. Bei Laststellung I geht diese Last von 1,0 t zunächst auf die Querträger 0 und 1, und zwar erhalten diese:

$$1{,}0 \cdot \frac{a_1}{\lambda_1} \quad \text{bzw.} \quad 1{,}0 \cdot \frac{b_1}{\lambda_1}\,,$$

wie in Fig. 60c eingeschrieben. Diese beiden Querträgerdrücke wirken nun als *direkte* Belastung auf den Balken ein. Wir können also die Einflußlinie für direkte Belastung benutzen (die in Fig. 60d noch einmal punktiert gezeichnet ist) und erhalten also

$$A_I = 1{,}0 \frac{a_1}{\lambda_1} \cdot \eta_0 + 1{,}0 \frac{b_1}{\lambda_1} \cdot \eta_1\,,$$

oder, da der Faktor 1,0 auch fortgelassen werden kann,

$$\text{(I)} \qquad A_I = \frac{a_1}{\lambda_1} \cdot \eta_0 + \frac{b_1}{\lambda_1} \cdot \eta_1\,.$$

Digitized by Google

Um jedes dieser beiden Produkte zeichnerisch darzustellen, verfahren wir, wie bei Fig. 54 erläutert wurde: Wir konstruieren ein Dreieck, dessen Grundlinie der eine Zähler, und dessen Höhe der Nenner

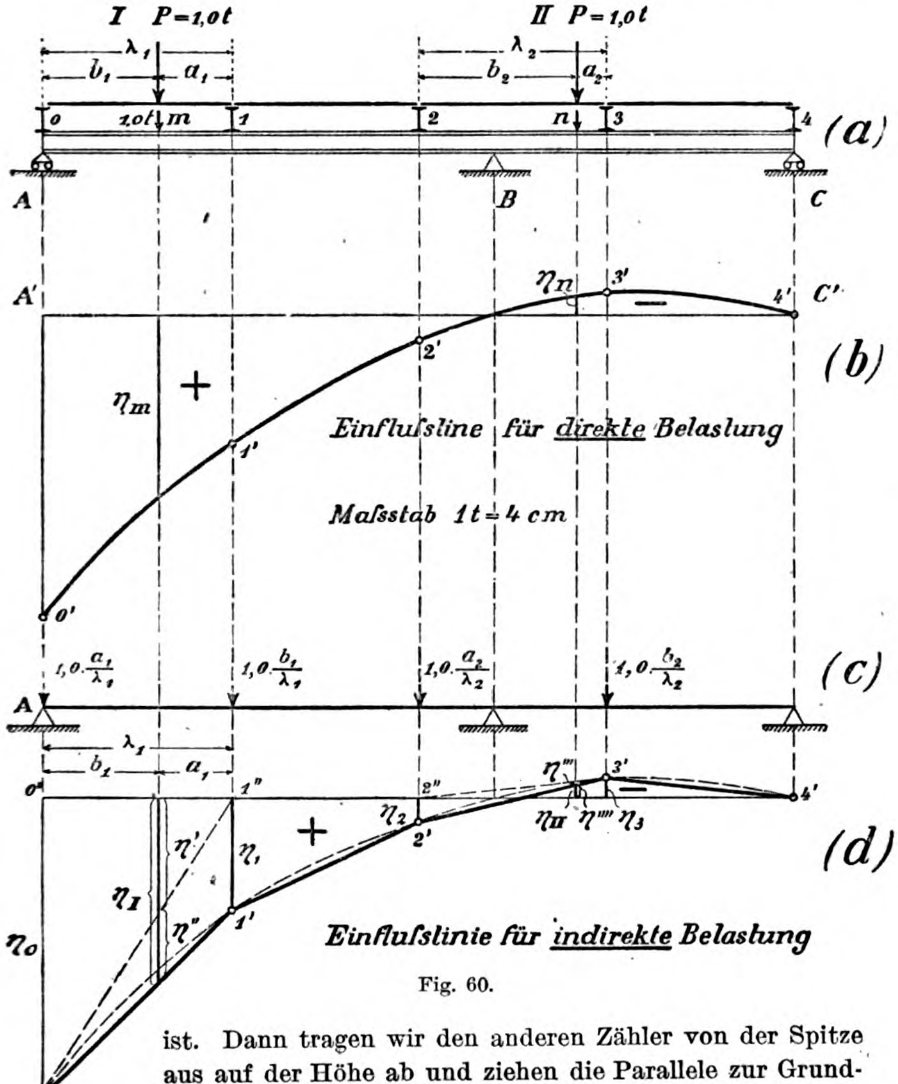


Fig. 60.

ist. Dann tragen wir den anderen Zähler von der Spitze aus auf der Höhe ab und ziehen die Parallele zur Grundlinie. Diese Parallele stellt graphisch das Produkt dar.

Wenn wir also in Fig. 60d die Punkte *0′* und *1′* miteinander verbinden und ferner *0′* mit *1″*, so sind die Abschnitte

$$\eta' = \eta_0 \cdot \frac{a_1}{\lambda_1} \quad \text{und} \quad \eta'' = \eta_1 \cdot \frac{b_1}{\lambda_1}.$$

Digitized by Google

Also
$$\eta' + \eta'' = \eta_0 \cdot \frac{a_1}{\lambda_1} + \eta_1 \cdot \frac{b_1}{\lambda_1} .$$

Die Summe $\eta' + \eta''$ ist aber der Abstand η_I von der Nullachse bis zur Linie $0' - 1'$. Es ist also in Fig. 60d:

$$\eta_I = \eta_0 \cdot \frac{a_1}{\lambda_1} + \eta_1 \cdot \frac{b_1}{\lambda_1}$$
$$= \text{Auflagerdruck } A_I .$$

Wir haben demnach das Resultat: Wenn wir die Endpunkte $0'$ und $1'$ der unter den Belastungspunkten 0 und 1 liegenden Ordinaten η_0 und η_1 durch eine gerade Linie verbinden, so ergibt deren Ordinate η_I den gesuchten Wert A_I. Die Hilfslinie $0' - 1''$ aber brauchen wir gar nicht zu zeichnen (sie wurde nur zur Ableitung des Verfahrens gebraucht).

Nun zu Laststellung *II*. Im Prinzip ist es dasselbe, nur daß jetzt auch der negative Teil der Einflußfläche in Frage kommt. Zunächst bestimmen wir wieder die Querträgerdrücke bei *2* und *3*; nämlich

$$1{,}0 \cdot \frac{a_2}{\lambda_2} \quad \text{bzw.} \quad 1{,}0 \cdot \frac{b_2}{\lambda_2} \quad \text{(Fig. 60c)}.$$

Für diese ist die Einflußlinie für direkte Belastung gültig, so daß sich bei Laststellung *II* ein Auflagerdruck A_{II} ergibt:

$$A_{II} = 1{,}0 \cdot \frac{a_2}{\lambda_2} \cdot \eta_2 - 1{,}0 \cdot \frac{b_2}{\lambda_2} \cdot \eta_3$$

(die Ordinate η_3 ist mit negativem Vorzeichen einzuführen, wie sich aus der Einflußlinie, Fig. 60b, ergibt). Nun stellen wir diese Produkte wieder graphisch dar. Wir ziehen also die Verbindungslinien $2' - 3'$ und $2'' - 3'$ und erhalten:

$\frac{a_2}{\lambda_2} \cdot \eta_2$ ist dargestellt durch die Strecke η''',

$\frac{b_2}{\lambda_2} \cdot \eta_3$ „ „ „ „ „ η''''.

Also ist
$$A_{II} = \eta''' - \eta''''.$$

Da η'''' die größere von diesen beiden Strecken ist, schreiben wir den Ausdruck in der Form:

$$A_{II} = -(\eta'''' - \eta''') ,$$

und dieses ist, nach Fig. 60d,

$$A_{II} = -\eta_{II} .$$

Digitized by Google

Wir sehen also auch in diesem Falle: Wir brauchen nur die Endpunkte *2'* und *3'* durch eine gerade Linie zu verbinden; deren Ordinate (bis zur Nullachse) gibt dann den gesuchten Wert an. Da wir vorhin, bei Fig. 60b, die positiven Ordinaten nach unterhalb und die negativen nach oberhalb von der Nullachse $A'C'$ aus aufgetragen haben, so sind in Fig. 60d alle Ordinaten, die unterhalb der Nullachse liegen, *positiv;* und alle Ordinaten, die oberhalb der Nullachse liegen, *negativ* zu rechnen. Der Auflagerdruck A_{II} ist also negativ.

Allgemein haben wir jetzt also bewiesen, daß *jede* Einflußlinie im Falle von indirekter Belastung von Belastungspunkt zu Belastungspunkt *gerade* durchläuft, und zwar entsteht sie dadurch, daß man die Endpunkte *0'*, *1'*, *2'*, *3'* usw. der für direkte Belastung gezeichneten Einflußlinie durch gerade Zwischenstücke verbindet.

Dieser Satz erleichtert sehr das Arbeiten mit Einflußlinien. Wenn wir eine Brücke oder dgl. zu berechnen haben, so brauchen wir uns zunächst um die Anordnung der Querträger überhaupt nicht zu kümmern. Wir rechnen einfach so, als ob die Zwischenkonstruktion gar nicht vorhanden wäre und die Belastung direkt auf den Hauptträger einwirke. Erst wenn für diesen Fall die Einflußlinien fertig sind, berücksichtigen wir durch Hinunterloten der Belastungspunkte auch noch den Einfluß der Zwischenkonstruktion.

§ 23a.

Beispiel zu § 23. (Satz I—III.)

Eine Straßenbrücke sei durch eine fortlaufende Reihe von Hauptträgern H_1, H_2, H_3, usw. gebildet, die durch eine entsprechende Reihe von Stützen getragen werden. Die bewegliche Belastung bestehe nach Fig. 61a aus zwei Einzellasten* (Straßenwalze) *von 9,0 t und 7,0 t; außerdem ist vor und hinter der Straßenwalze eine gleichmäßig verteilte Last* (Menschengedränge) *von 600 kg pro Meter anzunehmen.

Bei welcher Stellung entsteht und wie groß ist der größte Druck, den die Stütze S aufzunehmen hat?

1. Bei einer derartigen Aufgabe sind Einflußlinien die einzig richtige Methode. Um nun die Einflußlinie für den Stützendruck S zu finden, wollen wir vor allen Dingen von der Zwischenkonstruktion ganz absehen und einfach annehmen, daß die Lasten direkt auf den Hauptträgern wären. (Man zeichne sich die Konstruktion so auf!) Dann sieht man folgendes: Ist eine direkte Last P auf dem Hauptträger H_1, so bekommt die Stütze S überhaupt keine Last.

Also hat die Einflußlinie der Stützenkraft S bei direkter Belastung rechts vom Punkte B' aus die Ordinaten Null; die Einflußlinie fällt hier mit der Nullachse zusammen. Dasselbe gilt, solange sich die wandernde Last P auf dem Hauptträger H_4 oder noch weiter nach links befindet. Die Einflußlinie für S bei direkter Belastung erstreckt sich also nur zwischen den Punkten D' und B'. Eine Belastung rechts von B' oder links von D' bringt keinen Einfluß mehr auf die Stütze S hervor.

Nun möge die Last $P = 1{,}0$ t auf den Hauptträger H_2 treten. Dann ist der Stützendruck S gleich dem linken Auflagerdruck, A, dieses Trägers. Die Einflußlinie für den Auflagerdruck A des Hauptträgers H_2 ergibt also gleichzeitig den Stützendruck S, solange sich die Last auf diesem Hauptträger befindet. Wir zeichnen die Einflußlinie für A in bekannter Weise, indem wir unter dem linken Auflagerpunkt des Trägers die Strecke $A'C'$ gleich 1,0 t auftragen und die Linie $C'B'$ ziehen.

Zum Schlusse untersuchen wir den Fall, daß die wandernde Last auf den Träger H_3 gelangt. Dann ist der Stützendruck S gleich dem rechtsseitigen Auflagerdruck, B, dieses Trägers. Die Einflußlinie für den Auflagerdruck B des Trägers H_3 zeichnen wir natürlich in entsprechender Weise, wie es für A des Trägers H_2 geschah: Wir tragen unter dem *rechten* Auflagerpunkt des Trägers eine Strecke gleich 1,0 t auf (ist bereits geschehen, da vorhin schon $A'C'$ gleich 1,0 t gemacht wurde) und verbinden deren Endpunkt mit dem Punkte D'. Insgesamt haben wir also folgendes Resultat:

Die Einflußlinie des Stützendruckes S bei **direkter** Belastung hat links von D' und rechts von B' die Ordinaten Null; zwischen D' und B' bildet sie das Dreieck $D'C'B'$, das bestimmt ist durch die Ordinate $A'C' = 1{,}0$ t.

2. Nachdem wir so weit sind, berücksichtigen wir den Einfluß der **Zwischenkonstruktion.** Wir bestimmen also die unter den Belastungspunkten liegenden Ordinaten und verbinden deren Endpunkte durch gerade Linien. Auf diese Weise entsteht die Einflußlinie für *indirekte* Belastung, dargestellt durch die gebrochene Linie $0'\,1'\,4'\,5'\,7'\,8'$. (Die Punkte 2, 3 und 6 bringen keine Abänderung der für direkte Belastung gezeichneten Einflußlinie hervor.)

3. Nun kommt die Hauptaufgabe: Aus der Form der Einflußlinie diejenige Stellung zu ersehen, bei der die gesuchte Größe, in unserem Falle also der Stützendruck S, den größten Wert annimmt. (Aufsuchen der sogenannten **„gefährlichen Laststellung“.**) Darin besteht nämlich der Hauptwert der Einflußlinien, daß man

Digitized by Google

schon aus ihrer Form schließen kann, welche Laststellung für die betreffende Untersuchung maßgebend ist. Freilich gehört dazu Übung und auch etwas Verständnis. Eine mathematische Regel, wie man die Lasten in den verschiedenen Fällen stellen muß, läßt sich nicht recht angeben.

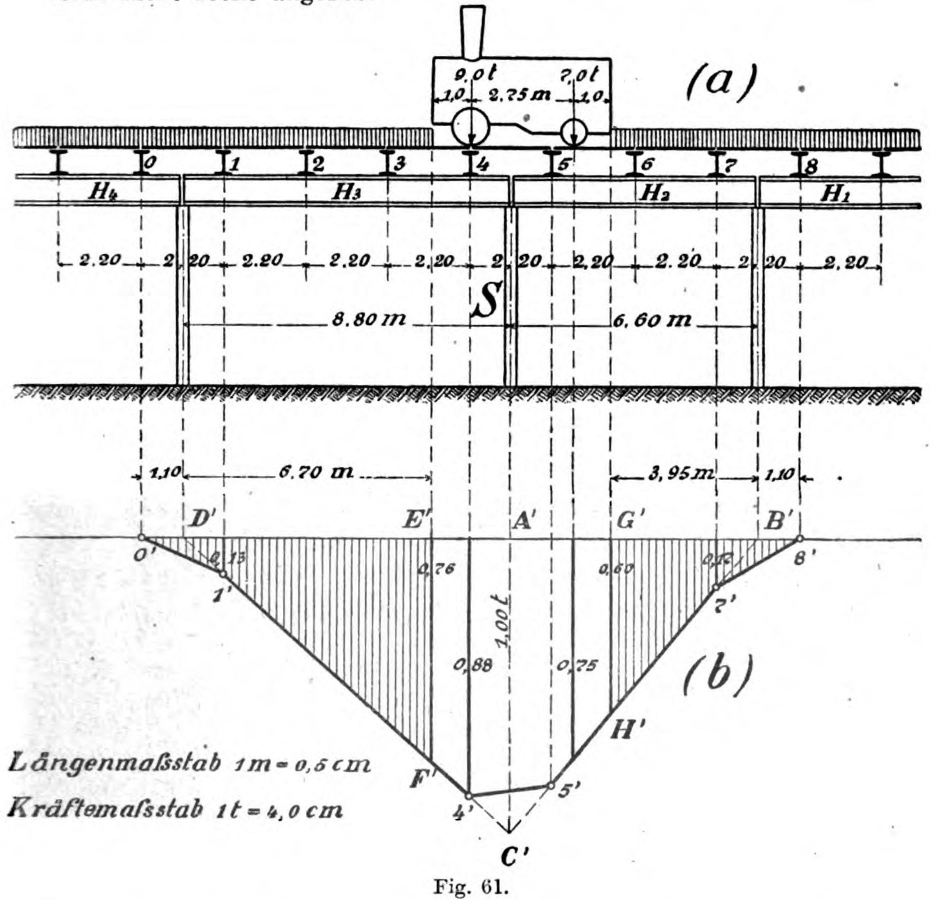


Fig. 61.

Man muß bedenken, daß man jede Last mit der zugehörigen Ordinate multiplizieren muß. Da, wo eine kleine Ordinate ist, hat es also keinen Zweck, eine große Last hinzustellen; denn das Produkt Kraft $\times$ Ordinate würde doch nur ziemlich klein herauskommen. Man wird vielmehr eine große Last dort aufstellen, wo eine große Ordinate ist. Dann bekommt man ein recht großes Produkt Last $\times$ Ordinate. Wenn man sich diese Gesichtspunkte klarmacht, findet man bald in den verschiedensten Fällen durch bloße Betrachtung der Einflußlinien die maßgebenden Laststellungen.

Digitized by Google

In Fig. 61b ist 0,88 die größte Ordinate; folglich stellen wir dort die größte Last (9,0 t) hin. Das andere Rad könnte nun entweder links oder rechts davon stehen: rechts bekommt es die größere Ordinate, folglich wird es dort aufgestellt. Somit ist die Stellung der Straßenwalze bestimmt, und an die Walze hat sich der Aufgabe gemäß das Menschengedränge anzuschließen.

Die Stellung in Fig. 61 wurde ohne weiteres Probieren so hingezeichnet, und ich glaube, daß sie in der Tat die größte Stützenkraft S ergibt. Der Anfänger wird aber wohl auch noch eine oder zwei andere Stellungen ausprobieren müssen, um die maßgebende Stellung zu finden. Einen anderen Weg gibt es für ihn nicht.

4. Sobald wir nun die Stellung der Lasten eingezeichnet haben, bekommen wir die gesuchte Größe S, indem wir jede Einzellast mit der zugehörigen Ordinate und jede gleichmäßig verteilte Last mit der darunter liegenden Einflußfläche multiplizieren. Hierbei ist zu beachten, daß natürlich alle Längenangaben in demselben Maßstabe, und ebenso alle Kräfteangaben in ihrem entsprechenden gleichen Maßstab in die Rechnung einzuführen sind. Wenn also die Ordinaten der Einflußlinie in *Tonnen* eingeführt werden, so muß auch die Belastung in *Tonnen* genommen werden. Bei den Einzellasten ist ja auch schon dementsprechend geschehen. Bei der verteilten Belastung steht in der Aufgabe

$$p = 600 \text{ kg pro m.}$$

Hiermit dürfen wir also nicht rechnen, sondern müssen statt dessen schreiben:

$$p = 0{,}600 \text{ t/m.}$$

(Auf diese Fehlerquellen ist sorgfältig zu achten!) Wir erhalten also den größten Druck der Stütze S:

$$\begin{aligned} S = {} & 9{,}0 \cdot 0{,}88 + 7{,}0 \cdot 0{,}75 \\ & + 0{,}600(\tfrac{1}{2}\, 6{,}70 \cdot 0{,}76 + \tfrac{1}{2}\, 1{,}10 \cdot 0{,}13) \\ & + 0{,}600(\tfrac{1}{2}\, 3{,}95 \cdot 0{,}60 + \tfrac{1}{2}\, 1{,}10 \cdot 0{,}17)\,. \end{aligned}$$

In der ersten Klammer steht der Inhalt der linksseitigen Einflußfläche (zerlegt in die beiden Dreiecke $D'E'F'$ und $0'D'1'$); in der zweiten Klammer derjenige der rechten Fläche. Nach Ausrechnung der obigen Werte ergibt sich:

$$\begin{aligned} S &= 13{,}17 + 1{,}57 + 0{,}77 \\ &= 15{,}51 \text{ t.} \end{aligned}$$

Hiermit haben wir unsere Aufgabe gelöst.

Digitized by Google

Berechnung vollwandiger Systeme.
(Festigkeitslehre.)

Digitized by Google

Abschnitt III.

Zug- und Druckfestigkeit.

5. Vortrag:

Die grundlegenden Gesetze über Spannungen und Dehnungen.

§ 24.

Die Aufgabe der Festigkeitslehre.

Bei unseren bisherigen Betrachtungen haben wir uns nur um die Kräfte gekümmert, die von außen her auf einen Körper einwirken („**Äußere Kräfte**", nämlich Lasten und Auflagerkräfte). Was im Innern des Körpers vorging, haben wir noch gar nicht untersucht. Diese Untersuchungen nun sind Gegenstand der Festigkeitslehre. Sie beschäftigt sich also mit der Frage: Welche Kräfte treten im **Innern** eines Körpers auf, wenn von außen her eine gegebene Kräftegruppe einwirkt? Hierzu wird noch die — wie wir sehen werden, ebenso wichtige — Frage hinzukommen: In welcher Weise ändert ein Körper seine Gestalt, wenn auf ihn eine Kräftegruppe einwirkt? (Berechnung von Durchbiegungen usw.). Beide Fragen sind von der größten Wichtigkeit für die Gestaltung unserer Bauwerke und werden uns von jetzt ab bis zum Schlusse dieses Bandes ausschließlich beschäftigen.

§ 25.

Das Verhalten eines auf Zug oder Druck beanspruchten Stabes im allgemeinen.

Wir beginnen unsere Betrachtungen mit dem einfachsten Falle: Ein Rundstab von der Länge l und dem Durchmesser d sei durch Kräfte beansprucht, die gleichmäßig auf den Stirnflächen verteilt sind und die sämtlich die Richtung der Stabachse haben. Man nennt eine derartige Belastung: Beanspruchung auf „**Normalfestig-**

Digitized by Google

keit“ [„Normal“, weil die Kräfte senkrecht (normal) zu den Querschnitten des Stabes stehen]. Ist die Belastung derart, daß die Stabachse verlängert wird, so ist der Stab auf **„Zug“** beansprucht; haben aber die äußeren Kräfte das Bestreben, die Stabachse zu verkürzen, so ist der Stab auf **„Druck“** beansprucht.

Um nun die Wirkung, die das Kräftesystem in Fig. 62 auf den Körper ausübt, genau untersuchen zu können, sei der Stab in eine Festigkeitsmaschine gespannt und dann die Belastung von Null an allmählich gesteigert. Das Material des Stabes sei Stahl. Bei diesem Versuche zeigt sich folgendes:

Sobald wir die Kräfte P auf den Stab einwirken lassen, erfährt dieser eine Gestaltänderung in der Weise, daß

1. die ursprüngliche Länge l des Stabes sich vergrößert,
2. der ursprüngliche Durchmesser d des Stabes sich verkleinert.

Wächst die Belastung gleichmäßig, so vollziehen sich auch die Formänderungen gleichmäßig. Zu jeder Belastung P gehört

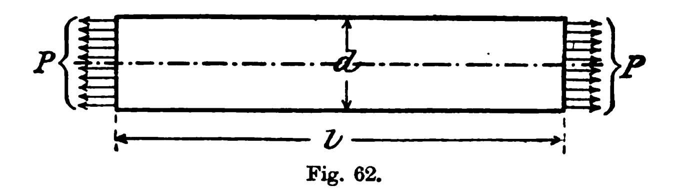


Fig. 62.

also eine bestimmte Verlängerung der Stabachse l und eine bestimmte Zusammenziehung des Durchmessers d. Das Aussehen des Stabes hat sich in diesem Teile des Versuches noch nicht geändert.

Lassen wir nun die Belastung weiterhin gleichmäßig zunehmen, so zeigt sich, daß von einer Stelle an die Verlängerungen des Stabes schneller wachsen als vorhin. Allmählich verändert der Stab auch sein Aussehen, die vorhin glatte (gedrehte) Oberfläche verliert ihren Glanz, und wir kommen schließlich in ein Stadium, in dem sich der Versuchskörper ganz anders verhält als im ersten Teile des Versuches. Wenn jetzt die Belastung weiter zunimmt, zeigt der Stab eine ganz bedeutende Längenvergrößerung. Man nennt diesen Zustand das **„Fließen“** des Stabes.

Hat dann der Stab im Zustande des Fließens eine größere Längenänderung erfahren, so fangen die Ausdehnungen an, wieder langsamer zu wachsen. Nun zeigt sich aber eine auffallende Gestaltänderung. An einer Stelle — gewöhnlich in der Nähe der Mitte — verliert der Stab seine zylindrische Form; er erleidet

Digitized by Google

hier eine Einschnürung, deren Durchmesser immer kleiner wird, bis schließlich an dieser Stelle der Bruch erfolgt (Fig. 63).

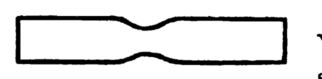


Fig. 63.

Fassen wir die Beobachtungen aus diesem Versuche zusammen, so haben wir drei verschiedene Zustände bemerkt:

1. Der Stab erfährt ziemlich geringe Formänderungen, indem er seine Länge vergrößert und seinen Durchmesser verkleinert. Die Änderungen wachsen in demselben Maße, wie die Belastung zunimmt.

2. Die Formänderungen des Stabes wachsen viel schneller als die Belastungen. Selbst wenn die Belastung nur um einen geringen Betrag vergrößert wird, dehnt sich der Stab weiter aus und kommt erst nach bedeutender Längenänderung zur Ruhe. Das Aussehen hat sich bereits etwas geändert. (Zustand des Fließens.)

3. Die Formänderungen nehmen weiter zu, aber in geringerem Maße als im Zustande des Fließens. Die Gestalt des Stabes ändert sich jetzt wesentlich; er erleidet an einer Stelle eine Einschnürung, die schließlich zur Zerstörung führt.

Was soeben von einem auf *Zug* beanspruchten Stabe ausgesagt wurde, gilt in entsprechend geänderter Weise auch bei einem auf *Druck* beanspruchten Körper. Die Kräfte haben jetzt gerade entgegengesetzte Richtung als bei Zugbeanspruchung. Deshalb tritt bei den Formänderungen an Stelle einer Verlängerung eine Verkürzung der Stabachse, und an Stelle einer Einschnürung (Fig. 63) eine Ausbauchung (Aufstauchung) ein. Die obigen drei Zustände gestalten sich also bei einem auf Druck beanspruchten Stabe folgendermaßen:

1. Solange die Belastung klein ist, erfährt der Stab auch nur kleine Formänderungen, und zwar verkürzt sich seine Länge und vergrößert sich sein Durchmesser. Diese Formänderungen wachsen in demselben Maße, wie die Belastung zunimmt.

2. Überschreitet die Belastung ein gewisses Maß, so wachsen die Formänderungen sehr schnell; viel schneller, als die Belastung vergrößert wird. Selbst wenn dann die Belastung nur um eine Kleinigkeit vermehrt wird, entsteht sofort eine weitere beträchtliche Zusammendrückung. Auch das Aussehen der Oberfläche hat sich geändert (Zustand des „Quetschens“).

3. Wird die Belastung noch weiter vermehrt, so tritt namentlich eine starke Ausbauchung ein, woran sich dann die vollständige Zerstörung anschließt.

Digitized by Google

Natürlich treten diese Formänderungen nicht immer genau so auf, wie eben beschrieben; namentlich nicht bei sehr spröden Körpern. Die obigen Ausführungen sollen ja auch nur das Verhalten im allgemeinen klarlegen. Bei Druckbeanspruchung ist ferner vorausgesetzt, daß der Körper so bemessen ist, daß nicht etwa ein *Ausknicken* stattfindet.

§ 26.

Genaueres über die Formänderungen. Die Poissonsche Konstante.

I. Bezeichnung der einzelnen Formänderungen (Verlängerung λ, Dehnung ε; Zusammenziehung δ, Querdehnung ε_q).

1. Aus dem vorigen Versuche ist ersichtlich, daß wir unsere Konstruktionen niemals so hoch beanspruchen dürfen, daß sie in das zweite oder dritte Stadium des betrachteten Versuchskörpers kommen. Schon aus der Veränderung des Aussehens kann man schließen, daß das Gefüge des Stabes gelitten hat; außerdem würden eine Brücke oder ein Maschinenteil, die in den Zustand des Fließens kommen, sich derartig in der Form verändern, daß sie für dauernde Benutzung unbrauchbar werden. Für die praktische Verwendbarkeit eines Materials ist vor allen Dingen sein Verhalten in dem ersten Abschnitte des vorigen Versuches maßgebend. Wir wollen deshalb in diesem Paragraphen zunächst diesen Abschnitt der Formänderungen näher untersuchen.

Zu jeder Belastung P gehörte eine bestimmte Vergrößerung (bzw. Verkleinerung) der ursprünglichen Stablänge l. Wir wollen diese Längenzunahme (-abnahme) mit λ bezeichnen und nennen sie „die zu der Belastung P gehörige **Verlängerung,** bzw. **Verkürzung** λ“.

Um aber nicht jedesmal Zug und Druck besonders unterscheiden zu müssen, wollen wir im folgenden allgemein nur von einer „Verlängerung“ λ sprechen, und geben ihr dafür, wenn es sich um Druck handelt, das negative Vorzeichen.

Wir finden also die Verlängerung λ eines Stabes, indem wir von der Länge, die er unter der Belastung P angenommen hat, die ursprüngliche Länge l abziehen.

2. Da sich diese Längenänderung λ (annähernd) gleichmäßig auf die gesamte Stablänge verteilt, so entfällt auf jedes Zentimeter derselben ein Betrag

$$\frac{\lambda}{l}.$$

Digitized by Google

Diesen Betrag nennen wir die „**Dehnung**" (auch „spezifische Dehnung") des Stabes bei der Belastung P, und bezeichnen ihn mit ε.

Der Unterschied zwischen Verlängerung λ und Dehnung ε ist also der:

λ bezeichnet die *gesamte* Längenänderung des Stabes, ε dagegen den Betrag, der hiervon auf *ein* cm entfällt. Man hat diesen Begriff „Dehnung" eingeführt, weil man auch Stäbe von verschiedenen Längen miteinander vergleichen muß. In diesem Falle darf man nicht die gesamten Verlängerungen gegenüberstellen, da der längere Stab (bei gleichen Belastungen) häufig eine größere Längenzunahme erfährt als der kürzere, selbst wenn sein Material weniger nachgiebig ist. Man muß hier vielmehr die Dehnungen (also die Vergrößerung pro Längeneinheit) miteinander vergleichen, um den Unterschied in den Materialien der beiden Stäbe kennen zu lernen.

3. Außerdem gehörte zu jeder Zuglast P eine bestimmte Verkleinerung des Durchmessers d. Wir bezeichnen diese Abnahme mit δ und nennen sie „die zu der Belastung P gehörige **Zusammenziehung** (Kontraktion) δ".

4. Da sich diese Verkleinerung ebenfalls gleichmäßig auf die d cm des Durchmessers verteilt, so entfällt auf 1 cm eine Abnahme von $\frac{\delta}{d}$. Dieses Stück, um das sich also jedes Zentimeter des Durchmessers zusammengezogen hat, bezeichnen wir mit ε_q und nennen es „**Querdehnung**". Durch die Einführung dieses Begriffes sind wir instand gesetzt, auch Stäbe von verschiedener Dicke miteinander zu vergleichen. (Bei Druckbelastung findet statt der Zusammenziehung eine Ausbauchung statt.)

II. Der Zusammenhang zwischen den Längs- und den Querformänderungen.

Wir wollen jetzt annehmen, daß wir eine Reihe von Stäben von *verschiedenem* Material und verschiedenen Abmessungen in der Weise belasten, daß wir auf jeden eine beliebige Last P (Zug) aufgebracht haben. Stab 1 mit der Länge l_1 cm und dem Durchmesser d_1 cm erfahre hierbei eine Verlängerung λ_1 cm und eine Zusammenziehung δ_1 cm. Die Dehnung und die Querdehnung, die der Stab bei dieser Belastung P erfährt, können wir nun durch Rechnung bestimmen:

$$\varepsilon_1 = \frac{\lambda_1}{l_1} \quad \text{und} \quad \varepsilon_{1q} = \frac{\delta_1}{d_1}.$$

Digitized by Google

In derselben Weise gehen wir bei Stab 2 vor, der die Abmessungen l_2 und d_2 haben möge. Wir bestimmen wieder durch Messung die Verlängerung λ_2 und die Zusammenziehung δ_2, und hierauf durch Rechnung

$$\varepsilon_2 = \frac{\lambda_2}{l_2} \quad \text{und} \quad \varepsilon_{2q} = \frac{\delta_2}{d_2}.$$

Wenn wir nun dieselbe Untersuchung bei den übrigen Stäben vornehmen, so bekommen wir natürlich bei jedem Stabe einen besonderen Wert für die Dehnung ε und die Querdehnung ε_q, da das eine Material sich (sowohl in der Länge als auch in der Breite) im allgemeinen doch anders ausdehnt als das andere Material. Stellen wir aber bei jedem Stabe die Dehnung ε und die Querdehnung ε_q nebeneinander, so wie wir es bei 1 und 2 getan haben, so zeigt sich folgende auffallende Tatsache:

Wie verschieden die ε und ε_q bei den verschiedenen Stäben auch ausfallen werden, bei allen Stäben ist *die Querdehnung ε_q ein bestimmter Bruchteil der Dehnung ε.* Es ergibt sich nämlich, daß ε_q stets der $3^1/_3$te Teil von ε ist.

Man muß natürlich beachten, daß derartige Angaben nur so lange gültig sind, als sie durch Versuche gedeckt sind. Der französische Physiker *Poisson* hatte versucht, das Verhältnis von ε_q zu ε auf Grund der Molekulartheorie zu bestimmen; seine Angaben haben sich jedoch nicht bestätigt. Wir schlagen jetzt den sichereren Weg des Versuches ein, indem wir bei verschiedenen Stäben nach der obigen Methode die beiden Dehnungen ausrechnen und miteinander vergleichen. Es ergibt sich hierbei, daß dieser Bruchteil allerdings nicht immer unveränderlich ist. Es zeigen sich bei den verschiedenen Materialien Schwankungen von 3 bis 4, so daß die Zahl $3^1/_3$ nur als Mittelwert anzusehen ist. Allgemein kann man schreiben:

$$\varepsilon_q = \frac{\varepsilon}{m},$$

wobei m mit genügender Genauigkeit bei den technisch wichtigen Materialien gleich $3^1/_3$ gesetzt werden kann. Man nennt diese Zahl m die *Poissonsche Konstante.* [Konstante, weil sie bei allen Materialien (nahezu) unveränderlich ist.]

Wir haben die Beziehung zwischen ε_q und ε der Einfachheit wegen nur an einem auf Zug beanspruchten Stabe abgeleitet. Natürlich gilt sie aber in sinngemäßer Anwendung ebenfalls bei Druckbeanspruchung.

Digitized by Google

Beispiele.

1. *Bei einem zylindrischen Stabe von $l = 20$ cm Länge und $d = 2{,}0$ cm Durchmesser ergaben sich bei einer Belastung P eine Verlängerung $\lambda = 0{,}017$ cm und eine Zusammenziehung $\delta = 0{,}00052$ cm.*

Wie groß waren Dehnung und Querdehnung?

Die zu der Belastung P gehörige Verlängerung λ war gleich 0,017 cm. Sie verteilt sich gleichmäßig auf $l = 20{,}00$ cm. Pro Zentimeter entfällt somit die Dehnung $\varepsilon = \frac{0{,}017}{20} = 0{,}00085$.

In derselben Weise ergibt sich der Betrag, um den sich 1 cm in der Querrichtung zusammengezogen hat. Wir erhalten Querdehnung $\varepsilon_q = \frac{0{,}00052}{2{,}0} = 0{,}00026$.

Bei diesem Material wäre das Verhältnis von ε zu ε_q

$$0{,}00085 : 0{,}00026 = 3{,}27\,;$$

es ist also

$$\varepsilon_q = \frac{\varepsilon}{3{,}27}.$$

Der Unterschied zwischen 3,27 und dem als Normalzahl angegebenen Wert $3^1/_3$ ist so unbedeutend, daß wir bei solchen Aufgaben ruhig mit $m = 3^1/_3$ rechnen können.

2. *Bei einem Stabe von $l = 50$ cm und $d = 1{,}5$ cm wurde bei einer bestimmten Belastung P eine Verlängerung $\lambda = 0{,}032$ cm gemessen.*

Wie groß ergeben sich hieraus Dehnung ε, Querdehnung ε_q und Zusammenziehung δ, wenn die Poissonsche Konstante mit $3^1/_3$ angenommen wird?

Zunächst berechnen wir

$$\varepsilon = \frac{\lambda}{l} = \frac{0{,}032}{50} = 0{,}00064\,.$$

Nun ist ε_q der $3^1/_3$te Teil von ε, also

$$\varepsilon_q = \frac{\varepsilon}{m} = \frac{0{,}00064}{3^1/_3} = 0{,}000192\,.$$

Die Zusammenziehung δ finden wir dann aus:

$$\varepsilon_q = \frac{\delta}{d}\,;$$

$$\delta = \varepsilon_q \cdot d = 0{,}000192 \cdot 1{,}5 = 0{,}00029 \text{ cm}.$$

Digitized by Google

Wäre in diesem Beispiele nicht λ, sondern z. B. δ durch den Versuch gefunden, so könnte man umgekehrt λ und die anderen Größen durch Rechnung bestimmen. Allgemein kann man sagen: Ist bei einem solchen Versuche *eine* Längen- oder Queränderung durch Beobachtung gefunden, so können die anderen durch Rechnung bestimmt werden. Man muß aber beachten, daß alle Längen in demselben Maßstabe (also alle in *Zentimeter* oder alle in *Meter* usw.) zu messen sind.

§ 27.

Die spezifische Spannung.

1. Bei den bisherigen Untersuchungen haben wir das Hauptgewicht darauf gelegt, die Formänderungen festzustellen, die der Körper infolge der Belastung P erfährt. In diesem Paragraphen wollen wir nun die Kräfte untersuchen, die im Innern des Körpers auftreten, sobald seine Endflächen durch äußere Kräfte beansprucht werden. Zu diesem Zwecke denke ich mir in Fig. 64 an beliebiger Stelle einen Schnitt vertikal zur Stabachse gelegt. Dieser Schnitt zerlegt den Stab in die Teile I und II. Am Teil I greifen an der linken Endfläche Kräfte an, die zusammen P kg betragen. Folglich müssen auch an der rechten Endfläche Kräfte wirken, deren Ersatzkraft horizontal und gleich P ist; mit anderen Worten: Teil II muß auf Teil I Kräfte ausüben, die zusammen gleich P sind. Wie diese Kräfte auf dem Querschnitte verteilt sind, geht aus dieser Bedingung noch nicht hervor. Wenn aber der Fall so liegt, wie in Fig. 64 angenommen, daß also die äußeren Kräfte gleichmäßig auf der Endfläche verteilt sind, und daß der Stab konstanten Durchmesser hat, ist es sehr wahrscheinlich, daß auch in dem betrachteten Querschnitte die vom Teile II auf Teil I ausgeübten Kräfte gleichmäßig verteilt auftreten werden. Hat also der Querschnitt die Fläche F qcm, so entfallen auf jeden qcm Kräfte im Betrage von $\frac{P}{F}$.

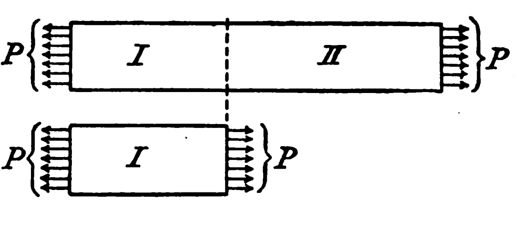


Fig. 64.

Diese Kräfte, die im Innern des Stabes auftreten, heißen **„innere Kräfte“** oder **„Spannungen“**. Insbesondere nennt man die

Digitized by Google

Kraft, die im Innern pro qcm übertragen wird, die *„spezifische Spannung“* und bezeichnet sie mit σ. In dem durch Fig. 64 dargestellten Belastungsfalle können wir also von dieser spezifischen Spannung aussagen:

1. Sie steht senkrecht zum Querschnitte.
2. Sie hat an jeder Stelle des Querschnittes die Größe $\sigma = \frac{P}{F}$.

Ist der Körper auf Zug beansprucht, so haben zwei im Innern des Körpers aufeinanderliegende Flächen das Bestreben, sich voneinander loszulösen; ist er auf Druck beansprucht, so werden diese Flächen aufeinander gepreßt. In der Rechnung bringt man diesen Gegensatz in der Beanspruchung durch entgegengesetzte Vorzeichen zum Ausdruck, und zwar bezeichnet man gewöhnlich Zugspannungen mit positivem und Druckspannungen mit negativem Vorzeichen.

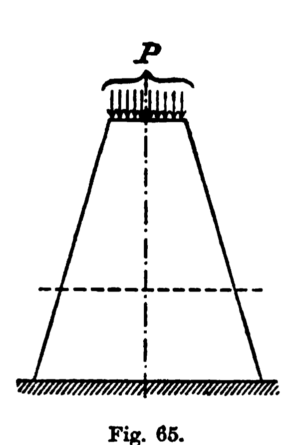


Fig. 65.

2. Man muß aber beachten, daß die obigen Aussagen 1 und 2 nicht mehr gültig sind, sobald die Voraussetzungen der Fig. 64 nicht erfüllt sind. Betrachten wir z. B. Fig. 65, die einen auf Normalfestigkeit beanspruchten Körper von veränderlichem Querschnitt darstellt. Hier ist es wahrscheinlich, daß die Spannungen nicht mehr senkrecht zu den Querschnitten stehen werden, außerdem werden die einzelnen Quadratzentimeter einer Querschnittsfläche verschieden große Kräfte übertragen. Die Ersatzkraft sämtlicher in dem betrachteten Querschnitte übertragenen Kräfte muß natürlich wieder gleich P sein; wie sich aber die einzelnen Teile der Fläche an dieser Kraftübertragung beteiligen, ist nicht ersichtlich. Wenn man auch in solchen Fällen einfach nach der Formel $\sigma = \frac{P}{F}$ rechnet, so weiß man zunächst nur das eine, daß die berechneten Spannungen und die in Wirklichkeit auftretenden nicht übereinstimmen werden.

Beispiel.

An einem Rundeisenstabe von $d = 3{,}0$ cm Durchmesser hängt eine Last von $P = 6500$ kg. Wie groß ist die Spannung in dem Stabe?

Digitized by Google

Ein senkrecht zur Stabachse gelegter Querschnitt hat den Inhalt

$$F = \frac{d^2 \pi}{4} = \frac{3{,}0^2 \pi}{4} = 7{,}07 \text{ qcm}.$$

Die *gesamte* zu übertragende Last beträgt

$$P = 6500 \text{ kg}.$$

Folglich entfällt auf *ein* qcm des Querschnitts eine zu übertragende Kraft (Spannung)

$$\sigma = \frac{P}{F} = \frac{6500 \text{ kg}}{7{,}07 \text{ qcm}} = 920 \frac{\text{kg}}{\text{qcm}}.$$

Da diese Größe die Kraft pro qcm bedeutet, so geben wir ihr die Benennung „kg pro qcm“ (geschrieben kg/qcm).

Zusatz: Ebenso wie wir soeben die Spannung in einem *senkrecht* zur Stabachse gelegten Querschnitt untersucht haben, kann man auch die Spannungen in Querschnitten untersuchen, die *schräg* zur Stabachse liegen. Da diese Spannungen aber für die Bruchgefahr des Stabes weniger wichtig sind, so braucht darauf nicht weiter eingegangen zu werden.

§ 28.

Der Zusammenhang zwischen Dehnung und Spannung (Das Hookesche Gesetz).

Sobald die Belastung P eines Körpers gegeben ist, können wir die im Innern des Stabes pro qcm übertragene Kraft σ berechnen. Um aber die infolge dieser Belastung auftretende Gestaltänderung, die Dehnungen, zu bestimmen, waren wir bisher so vorgegangen, daß wir uns zunächst λ durch *Messung* gefunden dachten und hieraus die ε berechneten. Es fragt sich nun, ob es möglich ist, die ε direkt aus den σ zu bestimmen; mit anderen Worten: ob man eine Gleichung aufstellen kann, in der σ und ε vorkommen und aus der man also ε berechnen kann, sobald σ bekannt ist.

Auf theoretischem Wege kann man diesen Zusammenhang natürlich nicht herleiten. Es ist wohl klar, daß bei wachsender Spannung auch die Dehnungen wachsen; ob sie aber bei gleichmäßig zunehmender Spannung ebenfalls gleichmäßig zunehmen, oder aber, ob sie schneller oder langsamer wachsen werden als die Spannungen, darüber kann nur der Versuch Aufschluß geben.

Digitized by Google

1. Bei einem derartigen Versuche würde man also so vorgehen: Man belastet einen Stab von der Länge l und dem Querschnitte F zunächst mit P_1 kg, mißt die hierbei entstehende Verlängerung λ_1 und berechnet die

$$\text{Spannung} \quad \sigma_1 = \frac{P_1}{F}; \qquad \text{Dehnung} \quad \varepsilon_1 = \frac{\lambda_1}{l}.$$

Dann verdoppelt man die Belastung auf $P_2 = 2P_1$, mißt die zu dieser Belastung gehörige Verlängerung λ_2 (indem man von der neuen Stablänge die ursprüngliche Länge l subtrahiert) und berechnet

$$\sigma_2 = \frac{P_2}{F} = \frac{2P_1}{F} = 2\sigma_1; \qquad \varepsilon_2 = \frac{\lambda_2}{l}.$$

In derselben Weise stellt man Spannung und Dehnung nebeneinander für den Fall, daß der Stab durch das Dreifache, Vierfache usw. der Anfangsspannung σ_1 beansprucht wird.

Führt man nun einen solchen Versuch z. B. mit einem Stahlstab aus, so ergibt sich, daß, wenn man die Spannungen auf das Doppelte, Dreifache, Vierfache usw. der Anfangsspannung σ_1 erhöht, auch die Dehnungen der Reihe nach das Doppelte, Dreifache, Vierfache usw. der Anfangsdehnung ε_1 werden (daß also $\varepsilon_2 = 2\varepsilon_1$, $\varepsilon_3 = 3\varepsilon_1$, $\varepsilon_4 = 4\varepsilon_1$ usw.). Mit anderen Worten: *bei Stahl wachsen die Dehnungen in demselben Maße wie die Spannungen.* Hat die Spannung den n-fachen Betrag von σ_1 erreicht, so ist auch die zugehörige Dehnung ε_n gleich dem n-fachen der Dehnung ε_1.

Aus dieser besonderen Eigenschaft des Stahles ergibt sich nun weiter sofort folgendes: Dividiert man bei der ersten Belastungsstufe die Spannung durch die Dehnung, $\frac{\sigma_1}{\varepsilon_1}$, so wird man eine bestimmte Zahl erhalten, die wir E nennen. Also

$$\frac{\sigma_1}{\varepsilon_1} = E.$$

Dieselbe Zahl E erhält man aber auch, wenn man bei der zweiten, dritten usw. Belastungsstufe die Spannung durch die Dehnung dividiert; denn es ist

$$\frac{\sigma_2}{\varepsilon_2} = \frac{2\sigma_1}{2\varepsilon_1} = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_1} = E,$$

$$\frac{\sigma_3}{\varepsilon_3} = \frac{3\sigma_1}{3\varepsilon_1} = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_1} = E \quad \text{usw.}$$

Digitized by Google

Allgemein kann man sagen: bei dem vorliegenden Material ist *das Verhältnis zwischen Spannung und Dehnung für alle Spannungsstufen eine unveränderliche Zahl E.* Diese Verhältniszahl E nennen wir den „**Elastizitätsmodul**" des Materials.

2. Um diesen Elastizitätsmodul z. B. für Stahl zu bestimmen, werden wir also so vorgehen: Wir belasten einen Stahlstab von der Länge l und einer Querschnittsfläche F mit einer Last P und messen die bei dieser Belastung entstehende Verlängerung λ. Dann berechnen wir

die Spannung $\sigma = \frac{P}{F}$ und

die Dehnung $\varepsilon = \frac{\lambda}{l}$.

Nun dividieren wir Spannung durch Dehnung und finden hiermit das Verhältnis dieser beiden Größen zueinander

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon}.$$

3. Sobald wir nun durch diesen einen Versuch die Verhältniszahl E bestimmt haben, können wir sie benutzen, *um zu jeder anderen Spannung σ sofort die dazugehörige Dehnung ε anzugeben.* Wir lösen einfach die obige Gleichung nach ε auf und erhalten

$$\varepsilon \cdot E = \sigma$$

$$\text{(I)} \qquad \boxed{\varepsilon = \frac{\sigma}{E}.}$$

Man nennt diese außerordentlich wichtige Beziehung das Elastizitätsgesetz oder das Hookesche Gesetz, weil der englische Physiker *Hooke* (gespr. Huhk) als Erster im Jahre 1678 diese Beziehung zwischen Spannung und Dehnung aufstellte.

Mit Hilfe dieser Gleichung kann man nun zu jeder beliebigen Belastung P die Dehnung ε und Verlängerung λ angeben, sobald der Elastizitätsmodul des betreffenden Materials bekannt ist. Ist z. B. ein Stab von der Länge l und dem Querschnitt F durch P kg belastet, so finden wir zunächst die Spannung

$$\sigma = \frac{P}{F}$$

und die Dehnung

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{P}{F \cdot E}.$$

Digitized by Google

Aus der Dehnung ε ergibt sich ferner sofort die Verlängerung λ, nämlich:

$$\varepsilon = \frac{\lambda}{l}; \quad \text{also} \quad \lambda = l \cdot \varepsilon,$$

was ja auch aus der Erklärung von Verlängerung und Dehnung sofort folgt. Setzen wir hierin den für ε gefundenen Wert ein, so bekommen wir

$$\lambda = l \cdot \frac{P}{F \cdot E},$$

oder, in anderer Form,

$$\text{(II)} \qquad \boxed{\lambda = \frac{P \cdot l}{E \cdot F}}.$$

Diese wichtige Gleichung ermöglicht also, *zu jeder Belastung P die zugehörige Verlängerung* λ (und hiermit auch die sonstigen Formänderungen) *zu berechnen.*

Dasselbe, was wir soeben bei einem Stahlstab gesehen haben, gilt nun auch für viele andere Materialien, z. B. Fluß- und Schweißeisen. Wenn man für eines dieser Materialien für verschiedene Belastungsstufen P_1, P_2, P_3 usw. das Verhältnis von Spannung zu Dehnung untersucht, so zeigt sich wieder, daß die Verhältniszahl für alle Spannungsstufen die gleiche ist. Für die verschiedenen Materialien ergeben sich im allgemeinen natürlich auch verschiedene Verhältniszahlen E; aber für ein und dasselbe Material ist die Verhältniszahl von σ zu ε für alle Spannungsstufen dieselbe. (Einschränkungen s. § 29.) Hat man also aus einem Versuch diese Verhältniszahl E bestimmt, so kann man mittels Formel (I) zu irgendeiner Spannung σ die zugehörige Dehnung ε, oder mittels Formel (II) zu einer Belastung P die zugehörige Verlängerung λ ausrechnen. Somit bildet das Hookesche Gesetz die Brücke, die von den äußeren Kräften (Lasten) zur Berechnung der Formänderungen hinüberführt.

Die Verhältniszahlen E für die verschiedenen Materialien sind in § 33 zusammengestellt. Bevor wir aber an die Einübung des Hookeschen Gesetzes durch Beispiele herangehen, müssen wir noch einige wichtige Einschränkungen besprechen.

Digitized by Google

§ 29.

Einschränkungen zum Hookeschen Gesetz.

Zu dem Hookeschen Gesetze ist noch zweierlei zu bemerken:

1. Es gibt eine Anzahl wichtiger Stoffe (Gußeisen, Kupfer, Bronze, Steine, Zement, Leder u. a.), für die es überhaupt nicht gilt. Wenn man bei einem derartigen Material bei einer beliebigen Spannung, z. B. $\sigma_1 = 500$, die zugehörige Dehnung ε_1 durch Messung bestimmt $\left(\text{aus } \varepsilon_1 = \frac{\lambda_1}{l}\right)$, so findet man natürlich auch hier durch Division von σ_1 durch ε_1 eine bestimmte Zahl E. Wenn man dann aber mit Hilfe dieser Zahl E für eine andere Spannung σ die zugehörige Dehnung $\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$ ausrechnet und diesen Wert durch Messung kontrolliert, so zeigt sich eine erhebliche Abweichung zwischen dem gerechneten und dem beobachteten Werte von ε. Diese ist dadurch verursacht, daß bei den angeführten Materialien die Dehnungen nicht mehr in demselben Maße wachsen wie die Spannungen; bei den meisten Stoffen wachsen die ε schneller als die σ, bei den anderen wieder nehmen sie langsamer zu. Der Bruch $\frac{\sigma}{\varepsilon}$ ist hier also für jede Spannung ein anderer, so daß wir für das betreffende Material überhaupt keinen bestimmten Wert E angeben können.

Andrerseits müssen wir aber eine Beziehung zwischen ε und σ haben, um zu jeder Kraft P die Verlängerung λ ausrechnen zu können. Professor v. Bach (Stuttgart) und sein damaliger Assistent, Herr Schüle, haben nun eine andere Gleichung zwischen Spannung und Dehnung aufgestellt, die „die gesuchte Gesetzmäßigkeit *innerhalb der für die ausführende Technik in Betracht kommenden Spannungsgebiete* befriedigend zum Ausdruck bringt“. (Vgl. v. Bach, „Elastizität und Festigkeit“.) Diese Gleichung lautet (in etwas anderer Schreibart als in dem angeführten Werke)

$$\varepsilon = \frac{\sigma^m}{E}.$$

Hierin sind m und E Zahlen, die für jedes Material durch Versuche bestimmt werden. Hierbei ergibt sich oft, daß für ein und denselben Körper für Zugbeanspruchungen andere Zahlen m und E gelten, als für Druckbeanspruchungen.

Digitized by Google

Wenn m und E für einen Körper bekannt sind, so können wir aus der Belastung P zunächst σ bestimmen, hieraus dann nach der obigen Gleichung ε und damit die Verlängerung $\lambda = \varepsilon \cdot l$. Man nennt das obige Gesetz das „Potenzgesetz" (weil σ als Potenz vorkommt). Es ermöglicht also, zu einer Belastung P die zugehörige Verlängerung des Stabes zu bestimmen und vertritt demnach das Hookesche Gesetz bei den Materialien, bei denen das letztere nicht gültig ist.

2. Die zweite Bemerkung bezieht sich auf die Stoffe, bei denen das Hookesche Gesetz gültig ist. Dieses sind namentlich Stahl und Schmiedeeisen. Wenn man bei einem von diesen Materialien für eine Spannung σ_1 das Verhältnis $E = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_1}$ bestimmt, dann mit Hilfe dieser Zahl E für beliebige andere Spannungen σ die dazugehörigen Dehnungen $\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$ berechnet und diese gerechneten Werte durch Messung am Versuchsstabe kontrolliert, so zeigt sich eine recht gute Übereinstimmung der gerechneten mit den gemessenen Dehnungen. Wenn man aber mit der Spannung immer höher geht, bei Flußeisen z. B. bis auf ca. 1800 kg/qcm, und nun für diese hohe Spannungen die zugehörigen Dehnungen $\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$ ausrechnet und dann durch Messung kontrolliert, so zeigt sich von einem bestimmten Punkte aus, daß die gerechneten Dehnungen kleiner sind als die direkt abgemessenen. Mit anderen Worten: diese Körper haben eine bestimmte Grenze, bis zu der das Hookesche Gesetz gültig ist. Geht man mit der Spannung über diese Grenze hinaus, so sind die Dehnungen nicht mehr proportional den Spannungen, sondern wachsen schneller als diese. Diese Grenze heißt die „Proportionalitätsgrenze" (*Proportionsgrenze*).

Sobald diese Körper über die Proportionalitätsgrenze beansprucht werden, verhalten sie sich also ähnlich wie die unter 1. genannten Stoffe. Das Verhältnis von $\sigma : \varepsilon$ ist nicht mehr unveränderlich, sondern ist von der jedesmaligen Spannung σ abhängig. Man könnte wohl durch Versuche für diese Körper eine Beziehung zwischen ε und σ bekommen, um ε auch noch für Spannungen zu berechnen, die über der Proportionalitätsgrenze liegen. Dieses hätte jedoch wenig praktischen Zweck, da wir mit solchen hohen Spannungen aus anderen Gründen nicht arbeiten dürfen.

Digitized by Google

Man kann übrigens den Zusammenhang der unter 1. und 2. genannten Körper auch noch anders ausdrücken, indem man sagt: die unter 2. aufgeführten Stoffe haben eine Proportionalitätsgrenze bei 1600, 1800, 2000 usw., je nach dem Material; die unter 1. genannten Körper haben dagegen eine Proportionalitätsgrenze in der Nähe von Null. Es gibt nämlich Untersuchungen in der theoretischen Physik (z. B. Bestimmung der Geschwindigkeit, mit der der Schall von festen Körpern fortgeleitet wird), bei denen die elastischen Schwingungen eine große Rolle spielen. Hier haben die Physiker auch bei Steinen einfach das Hookesche Gesetz angenommen und dabei eine recht gute Übereinstimmung zwischen Rechnung und Experiment gefunden. Hierdurch ist dann direkt bewiesen, daß bei den kleinen Spannungen, die bei diesen Vorgängen im Steinkörper auftreten, die Dehnungen proportional sind den Spannungen. Man kann also auch bei diesen Materialien von einer Proportionalitätsgrenze reden, nur daß diese sehr nahe an Null liegt.

§ 30.

Beispiele zu § 28 und § 29.

Einleitung. Bevor wir an die Berechnung von Zahlenbeispielen gehen, wollen wir uns noch über die Maßstäbe, in denen wir die einzelnen bisher vorgekommenen Größen messen werden, einigen.

Zunächst die *Verlängerung* λ. Sie ist die Zunahme, die die Länge eines Stabes erfahren hat. Sie selbst ist also ebenfalls eine Länge und muß im Längenmaßstab gemessen werden. Wir geben ihr deshalb die Bezeichnung „cm“. (Ebenso gut z. B. auch „m“; bequemer rechnet es sich aber mit cm.)

Die *Dehnung* ε ist entstanden aus dem Bruche $\lambda : l$. Haben wir nun zwei Längen, z. B. 6 cm und 2 cm, so ist das Verhältnis der beiden gleich $6:2=3$. Die Zahl 3 hat keinen besonderen Maßstab (sie ist weder in cm noch in irgendeinem anderen Maßstabe zu messen); sondern sie ist eine „unbenannte“ („absolute“) Zahl. Also tritt auch die Dehnung ε als eine unbenannte Zahl auf.

Die *Last* P messen wir meistens in kg (bisweilen auch in t).

Die *Spannung* σ ist entstanden durch Division der Last P durch die Fläche F; also aus kg : qcm. Sie erhält also den Maßstab kg : qcm, wofür man meistens schreibt kg/qcm oder kg/cm².

Der *Elastizitätsmodul* E ist entstanden aus Spannung : Dehnung; also aus Division von kg/qcm durch eine unbenannte Zahl. Wenn

Digitized by Google

man nun z. B. 6 cm durch die unbenannte Zahl 3 dividiert, so bekommt man das Resultat 2 cm; also hat das Resultat denselben Maßstab wie die ursprüngliche Zahl. Wenn man demnach kg/qcm durch die unbenannte Zahl ε dividiert, so hat das Resultat die Bezeichnung kg/qcm. Den Elastizitätsmodul E messen wir also in kg/qcm.

Über diese Bezeichnungen oder „Dimensionen", die man in der Physik den einzelnen Größen zulegen muß, ist ja schon sehr viel, und zwar meistens sehr viel Unklares, zusammengeschrieben worden. Man darf nicht vergessen, daß diese Bezeichnungen nur verhüten sollen, daß nicht in derselben Rechnung dieselbe Größe einmal z. B. in kg und das andere Mal in t vorkommt. Ist E aus einem Versuche gefunden, bei dem die Lasten P in kg und die Verlängerung λ in cm gemessen wurden, so geben wir E die Bezeichnung kg/qcm. Wollen wir jetzt eine Rechnung durchführen, bei der alles in t und m ausgedrückt ist, so dürften wir eigentlich das vorher gefundene E hierzu gar nicht benutzen, sondern müßten es aus einem Versuche bestimmen, der ebenfalls in t und m ausgeführt wurde. Statt dessen sagen wir: Ergab sich E bei dem ersten Versuche z. B. gleich 2200000, so müssen diese die Bezeichnung kg/qcm bekommen. Nun sind

$$2200000 \frac{\text{kg}}{\text{qcm}} = 2200000 \cdot \frac{1/1000 \text{ t}}{1/10000 \text{ qm}} = 2200000 \cdot 10 \frac{\text{t}}{\text{qm}} = 22000000 \frac{\text{t}}{\text{qm}}.$$

Diese Zahl für E hätte sich also ergeben, wenn E aus einem Versuche bestimmt wäre, in dem die λ in m und die P in t gemessen wären. Jetzt können wir in einer Rechnung, in der alle übrigen Größen in t und in m ausgedrückt sind, diese Zahl 22000000 als das Verhältnis von Spannung und Dehnung einführen. Die Resultate erscheinen dann natürlich ebenfalls in t und in m.

Erste Aufgabe.

An dem in Fig. 66 gezeichneten Flußeisenstabe wurde bei einer Belastung $P = 19200$ kg eine Verlängerung λ gleich 0,0112 cm gemessen. Wie groß ist der Elastizitätsmodul des Materials, und welche Formänderungen wird dieser Stab infolge einer Last von 30000 kg ausführen?

a) Zunächst bestimmen wir die Spannung σ in dem Stabe. Lege ich an beliebiger Stelle einen Querschnitt α, dessen Flächeninhalt

$$F = b \cdot h = 4{,}0 \cdot 6{,}0 = 24{,}0 \text{ qcm}$$

Digitized by Google

ist, so entfällt auf jeden Quadratzentimeter des Querschnitts eine Kraft

$$\sigma = \frac{P}{F} = \frac{19200 \text{ kg}}{24{,}0 \text{ qcm}} = 800 \text{ kg/qcm.}$$

Dann berechnen wir die Dehnung ε, die bei dem Versuche auftrat. Es ist

$$\varepsilon = \frac{\lambda}{l} = \frac{0{,}0112 \text{ cm}}{30{,}0 \text{ cm}} = 0{,}000373\,.$$

Aus σ und ε bestimmen wir schließlich das Verhältnis, in dem bei diesem Stabe die Spannung zur Dehnung steht. Dieses Verhältnis E ist:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{800 \text{ kg/qcm}}{0{,}000373} = 2140000 \text{ kg/qcm.}$$

b) Jetzt, da wir E gefunden haben, können wir auch für jede andere Belastung die Formänderungen berechnen, da ja Fluß-

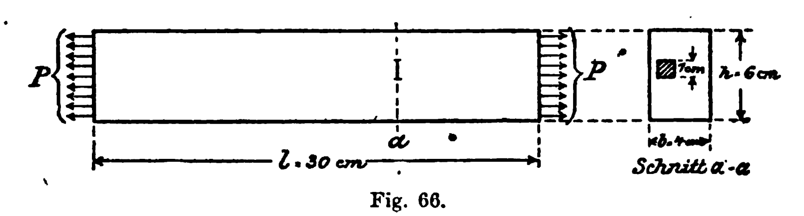


Fig. 66.

eisen zu den Materialien gehört, die dem Hookeschen Gesetze gehorchen. Vorausgesetzt ist, daß die Spannung infolge der neuen Belastung unterhalb der Proportionalitätsgrenze ist. Wir bestimmen also für die neue Belastung

$$P' = 30000 \text{ kg}$$

zunächst die Spannung

$$\sigma = \frac{30000 \text{ kg}}{24{,}0 \text{ qcm}} = 1250 \text{ kg/qcm.}$$

Sie liegt unterhalb der Proportionalitätsgrenze. Also dürfen wir die Formeln (I) und (II) (§ 28) verwenden. Wir finden

die Dehnung $\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{1250 \text{ kg/qcm}}{2140000 \text{ kg/qcm}} = 0{,}000584$;

bzw.

die Verlängerung $\lambda = \frac{P \cdot l}{E \cdot F} = \frac{30000 \text{ kg} \cdot 30 \text{ cm}}{2140000 \text{ kg/qcm} \cdot 24{,}0 \text{ qcm}} = \frac{900000 \text{ kg} \cdot \text{cm}}{51360000 \text{ kg}}$

$= 0{,}0175$ cm.

(Natürlich ist auch $\lambda = \varepsilon \cdot l = 0{,}000584 \cdot 30 \text{ cm} = 0{,}0175 \text{ cm.}$) Man beachte bei diesem Beispiel, daß man die Benennungen kg, cm,

Digitized by Google

kg/qcm usw. genau so miteinander multipliziert, gegeneinander forthebt usw., wie bei gewöhnlichen Zahlen multipliziert, gehoben usw. wird.

Will man außerdem die Zusammenziehungen feststellen, so berechnet man

$$\varepsilon_q = \frac{\varepsilon}{m} = \frac{0{,}000584}{3^1/_3} = 0{,}00017\,.$$

Denke ich mir also auf einer der Seitenflächen ein Quadrat von 1 cm Seitenlänge abgeteilt, so geht dieses in ein Rechteck über, dessen eine Seite gleich 1,00058 cm und dessen andere gleich 0,99983 cm ist. Die Formänderung des ganzen Stabes wird derart sein, daß infolge dieser Belastung von $P = 30000$ kg seine Länge um 0,0175 cm zunimmt; die 6 cm lange Seite des Querschnittes um $6 \cdot 0{,}00017 = 0{,}00102$ cm und die 4 cm lange Seite um $4 \cdot 0{,}00017 = 0{,}00068$ cm abnimmt. Würde man diese Zahlen durch Messung kontrollieren, so bekäme man eine sehr gute Übereinstimmung zwischen Theorie und Praxis.

Zweite Aufgabe.

Wie groß muß die Kraft P sein, die einen Rundstab aus Stahl von $l = 250$ cm und $d = 4$ cm um $\lambda = 0{,}14$ cm ausdehnt? (E für Stahl gleich 2200000 kg/qcm.)

Die Verlängerung λ ist gleich

$$\lambda = \frac{P\,l}{E\,F}\,.$$

Hieraus

$$P = \lambda \cdot \frac{E\,F}{l}$$

$$= 0{,}14 \cdot \frac{2200000 \cdot 12{,}57}{250}$$

$$= 15500 \text{ kg.}$$

Dritte Aufgabe.

Bei der in Fig. 67a dargestellten Brücke von $6 \times 4{,}00 = 24{,}00$ m Spannweite werden die Untergurtstäbe bei Belastung der Brücke auf Zug beansprucht. Die Spannung im Stabe 1 sei $\sigma = 750$ kg/qcm; im Stabe 2 sei $\sigma = 800$ kg/qcm, und im Stabe 3 sei $\sigma = 850$ kg/qcm. Infolge dieser Zugspannungen dehnen sich die Untergurtstäbe aus, so daß das bewegliche Lager eine Verschiebung nach rechts erfährt.

Wie groß ist diese Verschiebung? ($E = 2150000$ kg/qcm.)

Digitized by Google

Der Stab *1* hat eine Spannung von 750 kg pro qcm. Er erfährt also eine Dehnung $\varepsilon_1 = \frac{750}{2150000}$ und eine Verlängerung

$$\lambda_1 = \varepsilon_1 \cdot l = \frac{750 \cdot 400}{2150000} = 0{,}14 \text{ cm}.$$

Infolge der Durchsenkung der Brücke verschiebt sich Punkt C nicht nur horizontal, sondern auch vertikal, so daß der Stab AC die Lage AC' (Fig. 67b) annimmt. Hierin ist AC' die Länge, die der Stab infolge der Ausdehnung erhalten hat. Zieht man noch die Vertikale $C'C''$, so stellt CC'' die Verschiebung des Punktes C in horizontaler Richtung und $C''C'$ die Verschiebung in vertikaler Richtung dar. Letztere ist aber immer sehr gering, so daß wir in dem rechtwinkligen Dreiecke $AC''C'$ die Kathete AC''

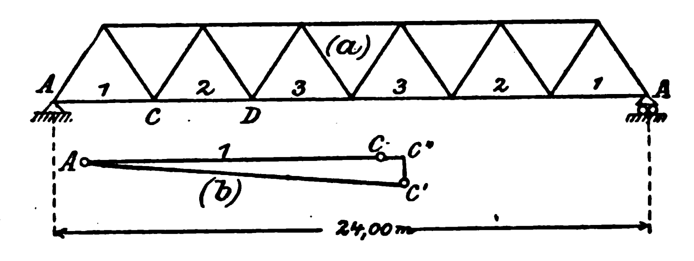


Fig. 67.

gleich der Hypotenuse setzen können. (Wäre $C''C' = 0{,}1$ cm, so wäre bei Ausrechnung nach dem Pythagoras der Unterschied zwischen AC'' und AC' ungefähr 0,00001 cm.) Wir erhalten somit die Horizontalverschiebung des Punktes C gleich

$$AC'' - AC = AC' - AC = (400 + \lambda_1) - 400 = \lambda_1.$$

Punkt D wird nun zunächst um dasselbe Stück λ_1 nach rechts verschoben, da er mit C fest verbunden ist; außerdem erleidet er noch infolge der Ausdehnung des Stabes *2*, λ_2, eine Verschiebung horizontal nach rechts und vertikal nach unten. Letztere können wir wieder vernachlässigen, so daß nur die Verschiebung λ_2 zu der Verschiebung λ_1 hinzukommt. Der gesamte Weg von Punkt D im horizontalen Sinne ist also gleich $\lambda_1 + \lambda_2$.

In entsprechender Weise ergeben sich die Verschiebungen der anderen Punkte als die Summe aus den Verlängerungen der Stäbe, die zwischen dem betreffenden Punkte und dem festen Lager A

Digitized by Google

liegen, und wir erhalten somit die Verschiebung des beweglichen Lagers:

$$\delta = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_3 + \lambda_2 + \lambda_1$$
$$= \frac{(750 + 800 + 850 + 850 + 800 + 750) \cdot 400}{2150000}$$
$$= 0{,}89 \text{ cm}.$$

Zu diesem Werte muß man nun noch die Verschiebung infolge Temperaturänderung addieren. Der Ausdehnungskoeffizient für Temperaturen ist beim Eisen $^1/_{85000}$. Dieses bedeutet: Erwärmt sich ein Eisenstab um 1° C, so dehnt er sich um $^1/_{85000}$ seiner Länge aus. Rechnen wir bei dieser Brücke mit einer Temperaturerhöhung von 35° gegenüber der Montagetemperatur, so wäre also diese Ausdehnung

$$\delta_t = \frac{2400 \cdot 35}{85000} = 0{,}99 \text{ cm}.$$

Die gesamte Verschiebung am beweglichen Lager ergibt sich darnach zu $0{,}89 + 0{,}99 = 1{,}88$ cm.

Man muß aber beachten, daß diese Ableitung nur zulässig ist, wenn der Untergurt horizontal ist; bei einer schrägen Lage des Stabes AC hätte sich die horizontale Verschiebung des Punktes C nicht einfach gleich λ_1 ergeben, sondern wäre außerdem noch abhängig von dem Neigungswinkel des Stabes.

Vierte Aufgabe.

Ein Deckenträger von I N. P. 30, der eine Länge von $l = 400$ cm hat, wird um $t = 100°$ erhitzt. Welche Druckkraft entsteht in dem Stabe, wenn infolge fester Auflagerung seine Wärmeausdehnung gehindert ist? ($E = 2\,150\,000$ kg/qcm.)

Wäre der Stab so gelagert, daß er sich frei ausdehnen kann, so würde er infolge dieser Temperaturerhöhung von 100° sich verlängern um

$$\frac{100 \cdot 400}{85\,000} = 0{,}5 \text{ cm}.$$

Die Druckkraft, die von den Auflagern auf den Stab ausgeübt wird, muß nun so groß sein, daß sie den Stab gerade um 0,5 cm verkürzen würde. In diesem Falle heben sich die Wirkungen der Druckkraft und der Temperaturänderung auf und der Stab behält seine ursprüngliche Länge. Nun berechnen wir die zu der Verkürzung λ gehörige Druckkraft P wie in Beispiel 2 aus

Digitized by Google

$$\lambda = \frac{Pl}{EF};$$

$$P = \lambda \cdot \frac{EF}{l}$$

$$= 0,5 \cdot \frac{2\,150\,000 \cdot 69,0}{400}$$

$$= 185\,400 \text{ kg.}$$

Wenn man hierzu die Spannung $\sigma = \frac{P}{F}$ ausrechnet, so sieht man, daß diese bereits weit über der Proportionalitätsgrenze liegt. Die obige Rechnung kann also nur als Annäherung betrachtet werden, da jenseits der Proportionalitätsgrenze eine genaue Berechnung der P aus den λ nicht mehr möglich ist. Sie zeigt aber, welche großen Kräfte bei einem Brande (bei dem Temperaturerhöhungen bis über 800° vorkommen) auftreten, sobald die Eisenkonstruktionen in ihrer Ausdehnung gehindert sind.

§ 31.

Die Dehnungskurve.

I. Graphische Darstellung des Hookeschen Gesetzes.

Derartige Untersuchungen, wie die Beziehung zwischen Spannung und Dehnung, werden immer am klarsten, wenn man sie zeichnerisch darstellt. Wir wollen also den zu Anfang des § 28 ausgeführt gedachten Versuch noch einmal durchnehmen, dabei aber die Ergebnisse sofort graphisch auftragen.

1. Wir beginnen damit, daß wir den Stab zunächst mit P_1 kg belasten, die Verlängerung λ_1 messen und hieraus durch Rechnung die Spannung $\sigma_1 = \frac{P_1}{F}$ und die Dehnung $\varepsilon_1 = \frac{\lambda_1}{l}$ bestimmen. Nun tragen wir in Fig. 68 die Spannung σ_1 und die Dehnung ε_1 als Strecken auf, errichten auf deren Endpunkten Lote und finden Punkt *1*.

Dann verdoppeln wir die Belastung, messen die Verlängerung λ_2, tragen $\sigma_2 = 2\sigma_1$ und ε_2 ab und bestimmen Punkt *2*.

In derselben Weise finden wir die Punkte *3*, *4* usw., indem wir die Spannungen auf das Dreifache, Vierfache usw. anwachsen lassen und die zugehörigen Dehnungen aus $\varepsilon = \frac{\lambda}{l}$ bestimmen. Ge-

Digitized by Google

horcht nun das vorliegende Material dem Hookeschen Gesetze, d. h. wachsen die Dehnungen proportional den Spannungen, so muß sich $\varepsilon_2 = 2 \cdot \varepsilon_1$, $\varepsilon_3 = 3 \cdot \varepsilon_1$, $\varepsilon_4 = 4 \cdot \varepsilon_1$ usw. ergeben haben. In der Figur zeigt sich dieses in der Weise, *daß die Punkte 1, 2, 3, 4 usw. auf einer Geraden liegen.*

Wenn wir nun die Spannung weiter steigern bis auf σ_7, hierzu die Dehnung ε_7 bestimmen und Punkt *7* zeichnen, so ergibt sich, daß dieser Punkt nicht mehr auf der Geraden *0—6* liegt. Die Dehnung ist nämlich jetzt schneller gewachsen als vorhin, wodurch Punkt *7* eine Abweichung nach rechts erhalten hat. Der Punkt *P* in Fig. 68 war also die letzte Stelle, bis zu der Proportionalität

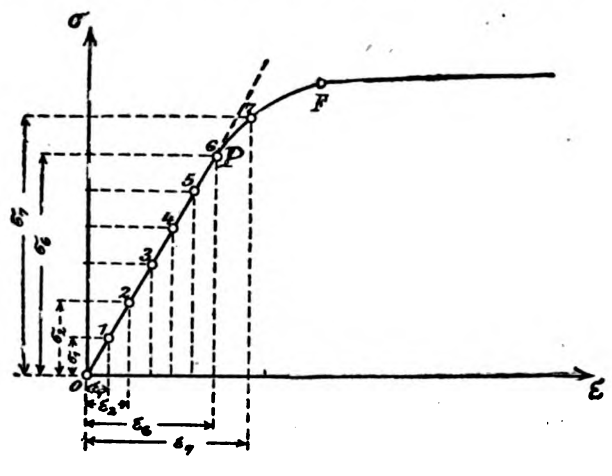


Fig. 68.

zwischen Spannung und Dehnung herrschte. Über *P* (d. h. σ_6) hinaus ist die Dehnung nicht mehr proportional der Spannung, sondern sie wächst schneller als diese. ***Der Punkt P bedeutet also nach § 29, 2 die Proportionalitätsgrenze des Materials.***

2. Vergrößern wir nun die Spannungen über *P* hinaus noch weiter, so wachsen die Dehnungen also immer schneller, bis wir schließlich zu einem zweiten Punkte, *F*, kommen, von dem aus das „Fließen" des Stabes beginnt (vgl. § 25). Diesen Punkt nennen wir die **„Fließgrenze"**, **„Streckgrenze"** oder (bei Druck) **„Quetschgrenze"**.

3. Von der Fließgrenze aus wachsen also die Dehnungen noch viel schneller, als vorhin auf der Strecke *PF*. Selbst wenn die Spannung nur um einen ganz geringen Betrag zunimmt, wächst die Dehnung sehr bedeutend. Schließlich tritt dann die Zerstörung ein.

Digitized by Google

Die in Fig. 68 gefundene Kurve heißt die *Dehnungskurve* des betreffenden Materials. Sie gibt zu jeder Spannung σ die zugehörige Dehnung ε an. Besonders ausgezeichnet sind auf ihr die beiden Punkte P und F. Bis zum Punkte P gilt das Hookesche Gesetz; von P bis F wachsen die Dehnungen zwar nicht mehr proportional den Spannungen, doch halten sie sich immerhin in geringen Grenzen; von F ab wachsen die Dehnungen ganz unverhältnismäßig viel schneller als die Spannungen.

II. Graphische Darstellung des Potenzgesetzes.

Um nun noch ein Material kennen zu lernen, das nicht dem Hookeschen Gesetze gehorcht, denken wir uns denselben Versuch mit einem Gußeisenkörper angestellt. Wir tragen wieder die zugehörigen σ und ε auf, Fig. 69. Jetzt erhalten wir aber für die Punkte *1*, *2*, *3* usw. keine gerade Linie, sondern die obenerwähnte Krümmung fängt bereits bei Punkt *0* an. Wenn wir hier die Verhältnisse $\frac{\sigma_1}{\varepsilon_1}$, $\frac{\sigma_2}{\varepsilon_2}$ usw. bilden, so zeigt die Figur deutlich, daß jeder Spannung σ ein besonderer Wert $\frac{\sigma}{\varepsilon}$ entspricht.

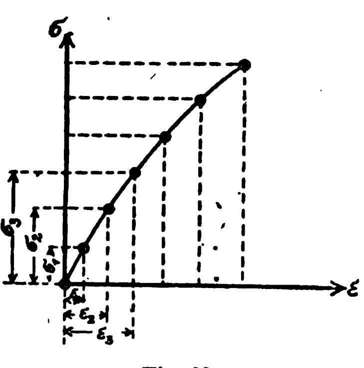


Fig. 69.

Wie nun in § 29 gezeigt, kann man bei diesen Körpern die Dehnung ε berechnen aus:

$$\varepsilon = \frac{\sigma^m}{E}.$$

Für Gußeisen z. B. ist $m = 1{,}08$ und $E = 1200000$; doch ändern sich diese Zahlen erheblich je nach der Beschaffenheit des Materials und sollen hier nur als Beispiel herausgegriffen werden. Will man nun z. B. für $\sigma = 200$ die Dehnung berechnen, so hat man (mittels logarithmischer Ausrechnung)

$$\varepsilon = \frac{200^{1{,}08}}{1200000} = \frac{306}{1200000} = 0{,}00026.$$

Wenn man in derselben Weise für alle Spannungen die Dehnungen berechnet und mit den Werten vergleicht, die der Versuch ergibt, so zeigt sich in der Tat eine recht gute Übereinstimmung.

Digitized by Google

Professor v. Bach gibt in seinen Werken (v. Bach: „Elastizität und Festigkeit"; v. Bach: „Die Maschinenelemente") die Formel für ε in der Form

$$\varepsilon = \alpha \cdot \sigma^m.$$

Die Zahl α wird als *„Dehnungskoeffizient"* bezeichnet; sie entspricht dem Werte $\frac{1}{E}$. (Bei dem vorliegenden Gußeisenstabe wäre $\alpha = \frac{1}{1200000}$). Setzt man $\sigma = 1$, so wird $\varepsilon = \alpha \cdot 1^m = \alpha$.; d. h. der Koeffizient α gibt die Dehnung an, die bei der Spannung 1 entsteht. Da α aber immer als kleiner Bruch auftritt, so ist es schließlich bequemer, die Gleichung für ε in der Form zu schreiben, wie wir es getan haben, und wie sie in fast sämtlichen Büchern gebräuchlich ist. Die Bedenken, die Herr v. Bach gegen diese Schreibart anführt, stützen sich auf eine inkorrekte Herleitung des Begriffes „Elastizitätsmodul"; sie treffen nicht mehr zu, wenn man E als das Verhältnis von $\sigma : \varepsilon$ betrachtet, wie in § 28 geschehen ist.

§ 31a.

Zusammenfassung zum 5. Vortrag.

In diesem Vortrage haben wir die einfachste Beanspruchungsart, nämlich die Normalfestigkeit, untersucht. Und zwar sind folgende Fragen behandelt:

I. Die Gestaltänderung eines gezogenen, bzw. gedrückten Stabes (§ 25, 26).

II. Die Spannung im Innern des Stabes (§ 27).

III. Der Zusammenhang zwischen Gestaltänderung und Spannung (ausgedrückt durch das Hookesche oder das Potenzgesetz; § 28—31).

---

6. Vortrag:

Praktische Anwendungen der Lehre von der Normalfestigkeit.

§ 32.

Die zulässigen Spannungen.

Wir wollen jetzt die für die Praxis wichtigste Frage behandeln: Welche Abmessungen müssen wir einem Stabe geben, damit er mit Sicherheit die an ihm angreifenden Lasten tragen kann?

Digitized by Google

1. Sicherheit gegen Bruch.

Der naheliegendste Weg zur Lösung dieser Aufgabe ist der, daß wir von dem betreffenden Material durch Versuche feststellen, bei welcher Spannung der Bruch eintritt. Bezeichnen wir dann diese Spannung mit σ_B, so können wir festsetzen: die Konstruktion ist so auszuführen, daß die Spannung infolge der Last P nicht größer ist als ein Bruchteil von σ_B. Diese Grenze, die die Spannungen im Körper nicht überschreiten dürfen, nennen wir die „**zulässige Spannung** k“. Sie darf immer nur einen gewissen Teil von σ_B betragen, da wir auch für den Fall Sicherheit haben müssen, daß die betreffende Konstruktion überlastet wird, daß sich Fehler im Material vorfinden usw. Ist das Material gegen Zug und Druck verschieden widerstandsfähig, so muß die Bruchspannung für beide Belastungsarten bestimmt werden und hieraus die zulässige Spannung für Druck und für Zug gesondert ermittelt werden.

Wenn wir nach dieser Methode die Grundlagen für die Dimensionierung schaffen, so müssen wir aber auf alle Fälle beachten, daß die Bruchspannung unter denselben Umständen zu bestimmen ist, unter denen das Material nachher als Konstruktionsteil verwendet wird. Es ist ja eine bekannte Tatsache, daß z. B. ein auf Biegung beanspruchter Stab, der hin und her gebogen wird, schon bei einer viel geringeren Kraftanstrengung bricht, als ein Körper, der nur nach einer Seite abgebogen wird. Ähnliche Verhältnisse liegen bei Zug und Druck vor. Ein Stab, z. B. die Kolbenstange einer Dampfmaschine, der abwechselnd gezogen und gedrückt wird, erweist sich als viel weniger widerstandsfähig als ein anderer Körper, z. B. ein Tragseil, das gleichmäßig durch eine ruhende Last beansprucht wird.

Die genauen Untersuchungen darüber verdanken wir in erster Linie *Wöhler*. Er stellte die Versuche in der Weise an, daß er

I. einen Stab durch eine allmählich von Null anwachsende Last P_I zum Zerreißen brachte. Die größte Spannung, die hierbei im Stabe auftrat, wollen wir σ_I nennen (sog. „Tragfestigkeit“);

II. einen Stab belastete, dann entlastete, hierauf wieder die Last aufbrachte, dann wieder entlastete usf. und hierbei die Kraft P_{II} feststellte, die gerade ausreichte, um den Stab zum Zerreißen zu bringen. Die zu P_{II} gehörige Spannung $\sigma_{II} = \frac{P_{II}}{F}$ ist die sog. „Ursprungsfestigkeit“ (weil der Stab hierbei abwechselnd in seinem ursprünglichen, spannungslosen Zustande und im belasteten Zustande ist). Hierbei ist also die Spannung im Stabe zuerst 0, dann σ_{II}, dann wieder 0, dann σ_{II} usf.

Digitized by Google

III. einen Stab durch eine Kraft auf Zug belastete, dann mit derselben Kraft auf Druck beanspruchte, dann die Kraft wieder als Zugkraft wirken ließ usf. und hierbei feststellte, welche Kraft P_{III} bei dieser Belastungsweise erforderlich ist, um den Bruch des Körpers herbeizuführen. Die zu dieser Kraft gehörige Spannung $\sigma_{III} = \frac{P_{III}}{F}$ wollen wir „Schwingungsfestigkeit" nennen. Bei dieser Belastung ist die Stabspannung zuerst $+\sigma_{III}$, dann $-\sigma_{III}$, dann $+\sigma_{III}$ usf.

Bei diesen Versuchen zeigten sich nun folgende Resultate:

Ist bei der unter I genannten Belastungsart eine Kraft P_I von z. B. 12000 kg erforderlich, um den Versuchsstab zu zerreißen, so genügt bei der Belastungsart II bereits eine Kraft von 8000 kg und bei der Belastungsart III sogar schon eine Kraft von 4000 kg, um den Bruch herbeizuführen. *Die Bruchspannungen* (auch Bruchfestigkeiten genannt) *verhalten sich also bei diesen drei Belastungsarten wie 3:2:1.*

Diese Versuche, die später von Bauschinger, Weyrauch, v. Bach u. a. fortgesetzt und ergänzt wurden, sind von der größten Wichtigkeit für die Praxis. Man weiß jetzt, daß man bei der Festsetzung der zulässigen Spannung vor allen Dingen die Belastungsart des betreffenden Konstruktionsteiles zu berücksichtigen hat. In den Tabellen über Zug- und Druckfestigkeit ist oft nur die Bruchspannung für die I. Belastungsart angegeben, da diese am einfachsten durch den Versuch zu bestimmen ist. Soll nun das Material für eine Konstruktion verwendet werden, die abwechselnd Zug und Druck aufzunehmen hat, so weiß man jetzt, daß es bei dieser Belastung nur den dritten Teil der angegebenen Festigkeit besitzt. Hiervon nimmt man dann einen bestimmten Bruchteil als zulässige Spannung.

Wenn bei größeren Bauwerken, z. B. Brücken, einzelne Teile nur auf Zug oder Druck, andere dagegen abwechselnd auf Zug und Druck (je nach der Laststellung) beansprucht werden, wird man für die ersteren höhere Beanspruchungen zulassen als für die zweiten. Nach diesem Gesichtspunkte ist die Launhardt-Weyrauchsche Formel

$$\sigma = \sigma_0 (1 + \tfrac{1}{2}\omega)$$

aufgestellt. In dieser bedeutet σ_0 eine gewisse Grundspannung, z. B. 800 kg/qcm, und ω ist das Verhältnis der kleinsten zu der größten Spannkraft eines Stabes. Hat ein Stab z. B. einen größten

Digitized by Google

Zug von 20000 kg und einen größten Druck von 10000 kg, so ist für ihn die zulässige Spannung

$$\sigma = \sigma_0 \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{-10000}{+20000}\right) = \sigma_0 \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{-1}{2}\right) = \frac{3}{4} \sigma_0 .$$

Dagegen ist für einen anderen Stab, der bei der einen Laststellung die größte Spannkraft von 40000 kg Zug und bei einer anderen die kleinste Spannkraft von 8000 kg Zug erhält, bei dem also überhaupt keine Druckspannungen vorkommen, eine Spannung von

$$\sigma = \sigma_0 \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{8000}{40000}\right) = \sigma_0 \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5}\right) = \frac{11}{10} \sigma_0$$

zulässig.

Derartige Formeln für die zulässige Spannung erfahren bei größeren Brückenbauten unter Berücksichtigung der besonderen Umstände noch häufig Abänderungen. Immer aber ist der Grundgedanke maßgebend: Ein Stab, dessen Spannkräfte stark schwanken, ist vorsichtiger zu dimensionieren als ein anderer, dessen Spannkraft weniger veränderlich ist.

2. Sicherheit gegen zu große Formänderungen.

Wenn man nach diesen unter 1. entwickelten Gesichtspunkten die zulässige Spannung bestimmt, so erzielt man Konstruktionen, die tatsächlich gegenüber der Bruchgefahr die Sicherheit haben, die man in dem betreffenden Falle für erforderlich hält. Nun kommt es aber sowohl bei Maschinenteilen als auch bei Eisenkonstruktionen noch darauf an, wie sich die Konstruktion im Betriebe verhält. Sie kann sehr wohl genügende Sicherheit gegen Bruchgefahr haben, sobald sie aber schon bei normaler Belastung zu große Durchbiegungen usw. zeigt, ist sie trotzdem unbrauchbar.

Wir kommen hierdurch zu einem anderen Gesichtspunkte für die Querschnittsbestimmung. Wenn man nämlich einen Flußeisenstab bis zu einer gewissen Grenze belastet, so daß er sich ausdehnt, und hierauf die Belastung abnimmt, so zieht er sich ebenso viel zusammen, wie er sich vorher ausgedehnt hat. Belastet man ihn über diese Grenze hinaus, so zieht er sich nach der Entlastung nicht mehr vollständig zusammen; der Stab nimmt also nicht mehr die Gestalt an, die er ursprünglich hatte, sondern es ist ein sog. „*Dehnungsrest*" zurückgeblieben. Man nennt diese Grenze die „**Elastizitätsgrenze**". Sie liegt gewöhnlich etwas oberhalb der Proportionalitätsgrenze, so daß die für diese gefundene Zahl auch häufig einfach als Elastizitätsgrenze genommen wird.

Es ist nun klar, daß bei einer Konstruktion, die dauernd im Betriebe sein soll, die Elastizitätsgrenze nirgends überschritten

Digitized by Google

werden darf. Sobald dieses geschehen würde, würde die Konstruktion bei Belastung und darauffolgender Entlastung nicht mehr die ursprüngliche Gestalt annehmen, sondern bereits bleibende Formänderungen zeigen. Diese vergrößern sich bei jeder folgenden Be- und Entlastung, wodurch dann im Betriebe Störungen hervorgerufen werden. Außerdem weist schon der Umstand, daß das Material nicht mehr seine ursprüngliche Gestalt annehmen kann, darauf hin, daß beim Überschreiten der Elastizitätsgrenze gewisse ungünstige Veränderungen im Gefüge stattgefunden haben.

Zusammenfassung.

Wir haben also bei der Querschnittsbestimmung nach zwei Gesichtspunkten zu verfahren:

1. Rücksicht auf eine gewisse Sicherheit gegen Bruchgefahr,
2. Rücksicht auf eine gewisse Sicherheit gegen unzulässige Formänderungen.

Im allgemeinen sind die nach 1. zu bestimmenden zulässigen Spannungen die kleineren, so daß sie für die Dimensionierung in Betracht kommen. Wenn man aber z. B. bei der Berechnung eines Dachbinders außer dem Eigengewicht noch größte Schneelast und größten Winddruck als Belastung eingeführt hat, trotzdem die beiden letzteren Belastungen niemals gleichzeitig auftreten können, so wird man die zulässige Spannung nicht nach der üblichen Sicherheit gegen Bruch bestimmen, sondern hier bis zu der Elastizitätsgrenze hinaufgehen. Deshalb schreibt z. B. die Preußische Eisenbahnverwaltung in diesem Falle für Flußeisen eine zulässige Spannung bis zu 1600 kg/qcm vor. Ebenso wird man hohe Eisenkonstruktionen, z. B. Fördertürme, so bauen, daß sie bei normalem Betriebe nur geringe Beanspruchungen erleiden; dagegen kann man beim Zusammentreffen aller ungünstigen Belastungsmöglichkeiten Spannungen bis zu der Elastizitätsgrenze gestatten.

Nach diesen Gesichtspunkten sind auch die amtlichen Vorschriften aufgestellt (s. Band II. 2. Teil).

§ 33.

Zusammenstellung einiger für die Praxis wichtigen Angaben.

In der folgenden Tabelle sollen nur für einige der wichtigsten Materialien die Angaben über Elastizitätsmodul, Proportionalitätsgrenze usw. zusammengestellt werden. Die Zahlen können dann

Digitized by Google

Material	Elastizitätsmodul E (kg/qcm)	Proportionalitätsgrenze σ_P (kg/qcm)	Fließ- bzw. Quetschgrenze σ_F (kg/qcm)	Bruchfestigkeit σ_B (kg/qcm) auf		Zulässige Spannung (kg/qcm) (bei Belastungsfall I) auf	
				Zug	Druck	Zug	Druck
Flußeisen	2150000	1800 und mehr	2000 und mehr	3400—4400	Bei Druckbeanspruchung findet ein vollständiges Zusammenquetschen — ohne eigentlichen Bruch — statt.	800—1600	800—1600
Schweißeisen . . .	2000000	1300 „ „	1800 „ „	3300—4000		1000	1000
Flußstahl	2200000	2500—5000	2800 „ „	4500—10000		1200—1800	1200—1800
Stahlguß	2150000	2000 und mehr	2100 „ „	3500—7000	bis über 10000	600—900	900—1200
Gußeisen	(750000—1050000)	—	—	1200—2400	7000—8500	250(—300)	500(—900)
Eiche	105000	475 bei Zug 150 bei Druck	—	960	350	100	80
Kiefer	96000 (für Druck)	bei Zug nicht vorh. 155 bei Druck	—	790	280	100	60
Granit	—	—	—	—	800—2000	—	45
Sandstein	—	—	—	—	400—1800	—	15—30
Ziegelmauerwerk (mit Mörtel) . .	—	—	—	?	140—300	?	7—12
Beton	(rd. 150000—300000)	—	—	?	80—250	?	20—40

Digitized by Google

als Anhaltspunkte für statische Berechnungen dienen. Doch sind sie natürlich nur als Mittelwerte aufzufassen, da die meisten Materialien (z. B. Gußeisen, Beton u. a.) je nach der Herstellung ganz verschieden ausfallen können.

Zu den einzelnen Zahlen ist noch folgendes zu bemerken:

1. Gußeisen, die Steine, Mauerwerk, Beton und zum Teil auch die Hölzer gehorchen nicht dem Hookeschen Gesetze. Hier läßt sich also kein Elastizitätsmodul angeben. Wo es doch geschehen ist, sind die Zahlen nur als Notbehelf (zur Umgehung des unangenehmen Potenzgesetzes) aufzufassen.

2. Wo nicht das Hookesche Gesetz gilt, existiert natürlich auch keine Proportionalitätsgrenze.

3. Die Fließ-, bzw. Quetschgrenze ist auch nicht bei allen Materialien wahrnehmbar ausgeprägt. Gußeisen springt bei zu starkem Druck *plötzlich* auseinander; ebenso die Steine.

4. Die Bruchfestigkeit hängt sehr von der Herstellung, Bearbeitung usw. des Materials ab. Bei vielen Stoffen ist sie für Zug und Druck verschieden; bei einigen sehr klein, bzw. nicht genau untersucht.

5. Die zulässigen Spannungen schwanken ebenfalls sehr stark. Ob Mauerwerk und Beton auch Zug aufnehmen darf, darüber sind sich die Gelehrten noch nicht einig.

Auf Grund dieser Festigkeitszahlen kann man nun den erforderlichen Querschnitt eines auf Zug oder Druck beanspruchten Stabes bestimmen. Da diese Aufgabe namentlich für die Konstruktion der Fachwerke wichtig ist, soll sie nicht hier, sondern später im Anschluß an die Berechnung der Fachwerke noch genauer besprochen werden. Daselbst finden sich auch die weiteren Angaben über Stoßverbindungen von Stäben usw.

§ 34.

Einige statisch unbestimmte Aufgaben.

Wir wollen jetzt noch einige Aufgaben behandeln, zu deren Lösung die Regeln der Statik allein nicht ausreichen, und die wir daher als statisch unbestimmt bezeichnen. Ihre Lösung geschieht, indem wir außer der Statik noch die Festigkeitslehre zur Hilfe nehmen. Es sollen hier, ohne die allgemeine Theorie der statisch unbestimmten Systeme zu geben, als Abschluß einige lehrreiche Anwendungen des bisher Durchgenommenen gezeigt werden.

Digitized by Google

Zum Verständnis möge vorher eine allgemeine Übersicht über die folgenden Aufgaben gebracht werden. Es handelt sich um die Berechnung von Stabkräften; d. h. von solchen Kräften, die von einzelnen Stäben auf einen Körper bzw. Punkt ausgeübt werden. Diese Berechnungen werden wir in drei voneinander verschiedenen Abschnitten erledigen:

1. Da die Stabkräfte den betreffenden Körper (Punkt) im Gleichgewicht halten, können wir zunächst die Gleichgewichtsbedingungen der Statik anwenden (Abschnitt I). Wir schreiben also die Bedingungen an und haben somit eine Gruppe von Gleichungen, in denen die Unbekannten vorkommen. Hierbei wird sich aber zeigen, daß wir mehr Unbekannte als Gleichungen haben. Wir müssen also noch weitere Gleichungen aufsuchen, um die Unbekannten berechnen zu können.

2. Nun gehen wir auf die Formänderungen (Verlängerungen bzw. Verkürzungen) der einzelnen Stäbe ein. Da die Stäbe elastisch sind, so wird der Angriffspunkt (bzw. Angriffskörper) unter der Einwirkung der Last etwas nachgeben. Aus dieser Bewegung können wir dann Beziehungen zwischen den Formänderungen der verschiedenen Stäbe aufstellen. Wir bleiben aber nicht bei den Formänderungen stehen, sondern drücken diese mittels des Hookeschen Gesetzes [Gleichung (II) in § 28] durch die Spannkräfte aus. Auf diese Weise bekommen wir also eine Reihe von Gleichungen, in denen ebenfalls die Spannkräfte vorkommen.

3. Nun nehmen wir die unter 1 und 2 gefundenen Gleichungen zusammen und haben dann ebensoviel Gleichungen wie Unbekannte. Die weitere Arbeit ist dann rein mathematisch: Es sind diese Gleichungen aufzulösen und hierdurch die Unbekannten zu bestimmen.

Beim Durcharbeiten der folgenden Aufgaben wird dieser Gedankengang noch klarer werden.

Erste Aufgabe.

Ein Punkt m (Fig. 70a), der durch drei Stäbe gestützt ist, ist durch eine vertikale Kraft P belastet. Die Spannkräfte in den Stäben sind zu ermitteln!

1. Die Kräfte, die von den Stäben auf den Punkt ausgeübt werden, nenne ich S_1, S_1' und S_2. Zusammen mit der Last P halten sie den Punkt m im Gleichgewicht. Wir können also die Gleichgewichtsbedingungen anschreiben (§ 5)

$$\text{(I)} \qquad S_1 \cdot \cos\alpha = S_1' \cdot \cos\alpha\,,$$

$$\text{(II)} \qquad S_1 \cdot \sin\alpha + S_1' \cdot \sin\alpha + S_2 = P\,.$$

Digitized by Google

In diesen zwei Gleichungen sind drei Unbekannte (S_1, S_1' und S_2). Wir können sie also noch nicht auflösen, sondern müssen noch eine weitere Beziehung aufsuchen. Dieses geschieht, indem wir auf die Formänderungen der Konstruktion eingehen.

2. Infolge der Belastung P senkt sich der Punkt m. Die beiden Stäbe *1* mögen gleichen Querschnitt haben. Dann kann sich der Punkt m nur vertikal abwärts, nicht schräg zur Seite, verschieben, so daß die drei Stäbe *1*, *1* und *2* die in Fig. 70b gezeichnete Lage einnehmen. Die Zusammendrückungen der Stäbe *1* und *2* mögen λ_1 und λ_2 heißen. Aus der Fig. 70b können wir nun eine Beziehung zwischen den Zusammendrückungen λ_1 und λ_2 der Stäbe *1* und *2* ableiten. Nämlich:

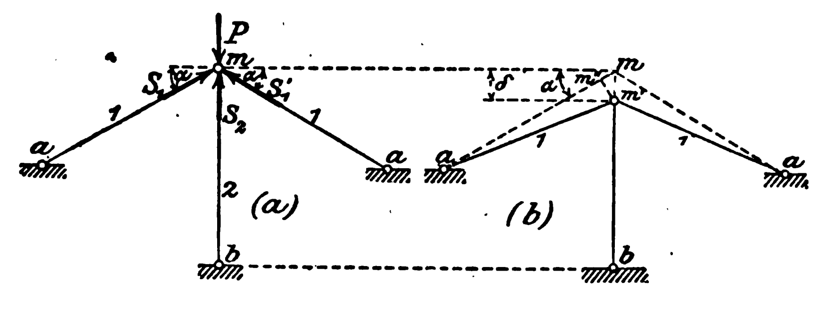


Fig. 70.

Bezeichnen wir die Einsenkung des Punktes m mit δ, so ist zunächst

$$\lambda_2 = \delta .$$

Ebenso drücken wir die Verkürzung der Stäbe *1* durch δ aus. Die Verkürzungen sind nämlich nach Fig. 70b gleich $am - am'$, worin am die ursprüngliche und am' die zusammengedrückte Stablänge bezeichnen. Fällen wir noch von m' auf am das Lot $m'm''$, so können wir mit genügender Genauigkeit $am'' = am'$ setzen; denn in einem rechtwinkligen Dreiecke, dessen eine Kathete verschwindend klein ist gegenüber den anderen beiden Seiten, ist die Hypotenuse gleich der anderen Kathete; vgl. Aufgabe 3 in § 30. (Man muß beachten, daß in Fig. 70b die Strecke δ gegenüber den Stablängen in viel zu großem Maßstabe dargestellt ist.) Wir haben also die Verkürzung von Stab *1*, λ_1, gleich $am - am'' = mm''$. Nun ist

$$\sphericalangle\, m\,m'\,m'' = \sphericalangle\, \alpha\,;$$

folglich

$$m\,m'' = \delta \cdot \sin\alpha\,,$$

Digitized by Google

so daß sich ergibt:

$$\lambda_1 = \delta \cdot \sin\alpha .$$

Schreiben wir nun die beiden Gleichungen

$$\lambda_2 = \delta$$

und

$$\lambda_1 = \delta \cdot \sin\alpha$$

zusammen, so ergibt sich direkt die Beziehung zwischen den beiden Zusammendrückungen

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \sin\alpha ,$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 \cdot \sin\alpha .$$

Da aber nicht die Zusammendrückungen gesucht sind, sondern die Spannkräfte, so müssen wir noch λ_1 und λ_2 ausdrücken durch S_1 und S_2. Hierzu dient das Hookesche Gesetz. Es ist

$$\lambda_1 = \frac{S_1 \cdot l_1}{E \cdot F_1} ,$$

$$\lambda_2 = \frac{S_2 \cdot l_2}{E \cdot F_2} ,$$

worin l_1 und F_1 die Länge und den Querschnitt der beiden gleichstarken Stäbe *1*, und l_2 und F_2 die Länge und den Querschnitt des Stabes *2* bedeuten. E ist der Elastizitätsmodul.

Wir haben also aus der Betrachtung der elastischen Formänderung die Beziehung gefunden:

$$\text{(III)} \qquad \frac{S_1 \cdot l_1}{E \cdot F_1} = \frac{S_2 \cdot l_2}{E \cdot F_2} \cdot \sin\alpha .$$

3. Nun bringen wir die Gleichungen (I) und (II) und die zuletzt gefundene Gleichung (III) zusammen:

$$\text{(I)} \qquad S_1 \cdot \cos\alpha = S_1' \cdot \cos\alpha ,$$

$$\text{(II)} \qquad S_1 \cdot \sin\alpha + S_1' \cdot \sin\alpha + S_2 = P ,$$

$$\text{(III)} \qquad \frac{S_1 \cdot l_1}{E \cdot F_1} = \frac{S_2 \cdot l_2}{E \cdot F_2} \cdot \sin\alpha .$$

Dieses sind drei Gleichungen, aus denen sich die drei Unbekannten ausrechnen lassen müssen. Zunächst ergibt sich aus Gleichung (I):

$$\text{(Ia)} \qquad S_1 = S_1' .$$

Digitized by Google

Die Gleichung (III) wollen wir schreiben:

$$\text{(IIIa)} \qquad S_1 = S_2 \frac{l_2}{l_1} \frac{F_1}{F_2} \cdot \sin\alpha .$$

Diesen Wert in Gleichung (II) eingesetzt, ergibt (da $S_1' = S_1$ ist):

$$\text{(IIa)} \qquad S_2 \frac{l_2}{l_1} \frac{F_1}{F_2} \sin^2\alpha + S_2 \frac{l_2}{l_1} \frac{F_1}{F_2} \sin^2\alpha + S_2 = P ,$$

$$S_2 = \frac{P}{\left(2 \cdot \frac{l_2}{l_1} \frac{F_1}{F_2} \sin^2\alpha + 1\right)} .$$

Entsprechend ergibt sich S_1:

$$S_1 = \frac{P}{\left(2 \sin\alpha + \frac{l_1}{l_2} \cdot \frac{F_2}{F_1} \frac{1}{\sin\alpha}\right)} .$$

Sobald also die Längen, Querschnittsflächen und Neigungswinkel der Stäbe gegeben sind, können wir die unbekannten Stabkräfte S_1 und S_2 berechnen.

Die soeben behandelte Aufgabe, bei einem durch drei Stäbe gestützten Punkte die Stabkräfte zu bestimmen, hat nicht nur theoretischen Wert. Betrachtet man Fig. 71, die den oberen Teil eines Dachbinders mit Laterne darstellt, so erkennt man, daß sie ohne weiteres zur Bestimmung der Kräfte in den Stäben *1* und *2* verwendet werden kann. Wenn man für dieses System einen zusammenhängenden Kräfteplan für Binder und Laterne zeichnen will, so stößt man bei der Laterne stets auf Schwierigkeiten. Dieses kommt daher, weil das System innerlich statisch unbestimmt ist, wie wir später sehen werden. Man hilft sich dann meistens dadurch, daß man den Stab *2* für die Rechnung einfach fortläßt oder auch auf andere Art. Durch die vorigen Untersuchungen sind wir aber in der Lage, die Berechnung auch korrekt durchzuführen. Ist z. B.

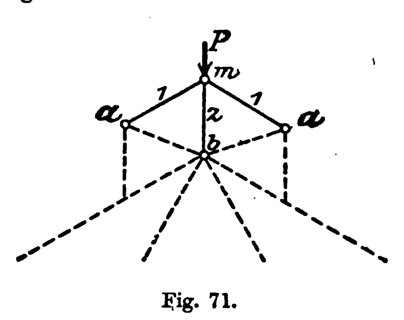


Fig. 71.

$l_1 = 120$ cm; $\quad l_2 = 100$ cm; $\quad F_1 = F_2 = 8{,}0$ qcm $\quad$ und $\quad \alpha = 30°$,

so ergibt sich

Digitized by Google

$$S_2 = \frac{P}{2 \cdot \frac{100}{120} \cdot \frac{8,0}{8,0} \cdot 0,5^2 + 1}$$

$$= \frac{P}{0,42 + 1,00} = \frac{P}{1,42}$$

$$= 0,71\,P\,;$$

$$S_1 = \frac{P}{2 \cdot 0,5 + \frac{120}{100}\,\frac{8,0}{8,0}\,\frac{1}{0,5}}$$

$$= \frac{P}{1,00 + 2,40} = \frac{P}{3,40}$$

$$= 0,29\,P\,.$$

Man sieht also, daß der mittlere Stab den weitaus größten Teil der Last aufzunehmen hat, während die beiden seitlichen nur je mit $0,29\,P$ beansprucht werden. Würde man bei dieser Rechnung noch berücksichtigen, daß auch die Fußpunkte a, a, b sich infolge der Belastung des Binders etwas verschieben, so würde sich der auf Stab *2* entfallende Anteil von P vielleicht noch größer ergeben als $0,71\,P$. Trotzdem will ich damit durchaus nicht sagen, daß man in solchen Fällen die Annäherungsmethoden aufgeben und das soeben entwickelte Verfahren verwenden soll. Für die Spannungen im Binder ist es ziemlich gleichgültig, in welcher Weise die Laterne die Lasten überträgt; und die einzelnen Stäbe in der Laterne werden schon aus Konstruktionsgründen genügend stark genommen. Es sollte nur einmal gezeigt werden, wie man derartige Fälle behandeln kann.

Zweite Aufgabe.

Das in Fig. 72 dargestellte Krangerüst ist in a durch einen Bolzen und in b durch die beiden Stäbe 1 und 2 gestützt. Die Spannkräfte S_1 und S_2 dieser beiden Stäbe infolge der Last P sind zu berechnen.

1. An dem Krangerüst wirken im ganzen vier Kräfte: P, S_1, S_2 und A; letztere ist schräg gerichtet, da a das feste Lager der Konstruktion darstellt. Da der Körper im Gleichgewicht sein soll, so müssen diese Kräfte die drei Bedingungen erfüllen:

$$\text{(I)} \qquad S_1 \cdot \cos\alpha_1 + S_2 \cdot \cos\alpha_2 = A \cdot \cos\alpha\,,$$

$$\text{(II)} \qquad S_1 \cdot \sin\alpha_1 + S_2 \cdot \sin\alpha_2 + P = A \cdot \sin\alpha\,,$$

$$\text{(III)} \qquad S_1 \cdot q_1 + S_2 \cdot q_2 = P \cdot p\,.$$

Digitized by Google

Bezeichnen wir zur Abkürzung die Horizontalprojektion von A mit H und die Vertikalprojektion mit V, also

$$A \cdot \cos\alpha = H \; ; \quad A \cdot \sin\alpha = V ,$$

so lauten die Gleichungen:

$$\text{(I)} \qquad S_1 \cdot \cos\alpha_1 + S_2 \cdot \cos\alpha_2 - H = 0 ,$$

$$\text{(II)} \qquad S_1 \cdot \sin\alpha_1 + S_2 \cdot \sin\alpha_2 - V = -P ,$$

$$\text{(III)} \qquad S_1 \cdot q_1 + S_2 \cdot q_2 = P \cdot p .$$

In diesen drei Gleichungen kommen vier Unbekannte (S_1, S_2, H und V) vor; also sind sie noch nicht lösbar. Wir müssen deshalb aus dem elastischen Verhalten der Konstruktion noch eine vierte Gleichung ableiten.

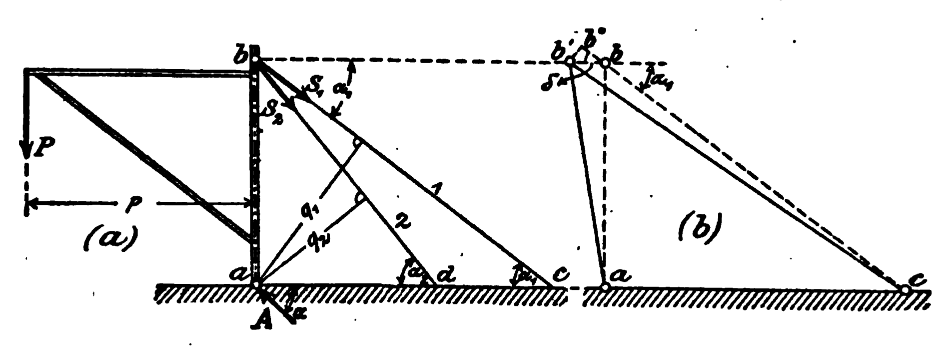


Fig. 72.

2. Infolge der Last P bekommen die Stäbe *1* und *2* Zugspannungen, sie dehnen sich also aus, und Stab ab macht eine kleine Drehbewegung um sein festes Lager a. In Fig. 72b ist Stab ab in seiner neuen Lage ab' gezeichnet. Dazu ist noch Stab *1* in seiner neuen und in seiner alten Lage dargestellt. Seine Verlängerung, λ_1, ist also gleich $cb' - cb$. Die Verschiebung δ des Punktes b ist in Wirklichkeit ein Kreisbogen um a mit dem Radius ab. Da dieser Bogen jedoch verschwindend klein ist, können wir ihn ersetzen durch die Tangente im Punkte b, d. h. wir nehmen bb' als horizontale Gerade an. Fällen wir jetzt das Lot $b'b''$ auf die Verlängerung von cb, so können wir außerdem $cb' = cb''$ setzen (aus demselben Grunde wie in Aufgabe 3 von § 30 und im vorigen Beispiele). Wir haben also:

$$\lambda_1 = cb' - cb = cb'' - cb = bb'' = \delta \cos\alpha_1 \; ;$$

denn in dem Dreieck $bb'b''$ kommt ebenfalls $\sphericalangle \alpha_1$ vor.

Digitized by Google

In entsprechender Weise ergibt sich für die Verlängerung des Stabes *2*

$$\lambda_2 = \delta \cos\alpha_2 ,$$

und durch Division der beiden Werte:

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{\cos\alpha_1}{\cos\alpha_2} .$$

Hierfür kann man nach Fig. 72a noch einfacher schreiben [da $\cos\alpha = \sin(90 - \alpha)$ ist],

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{q_1}{q_2} .$$

Da wir aber nicht die Verlängerungen λ, sondern die Stabkräfte S haben wollen, bringen wir mittels des Hookeschen Gesetzes die λ mit den S in Verbindung:

$$\lambda_1 = \frac{S_1 \cdot l_1}{E \cdot F_1} ; \quad (l_1 \text{ Länge, } F_1 \text{ Querschnitt von Stab } 1),$$

$$\lambda_2 = \frac{S_2 \cdot l_2}{E \cdot F_2} ; \quad (l_2 \text{ Länge, } F_2 \text{ Querschnitt von Stab } 2)$$

und erhalten hierdurch die bisher noch fehlende Gleichung

$$\text{(IV)} \qquad \frac{S_1 \cdot l_1}{E \cdot F_1} : \frac{S_2 \cdot l_2}{E \cdot F_2} = q_1 : q_2 .$$

3. Wir haben also insgesamt vier Gleichungen mit vier Unbekannten:

$$\text{(I)} \qquad S_1 \cdot \cos\alpha_1 + S_2 \cdot \cos\alpha_2 - H = 0 ,$$

$$\text{(II)} \qquad S_1 \cdot \sin\alpha_1 + S_2 \cdot \sin\alpha_2 - V = -P ,$$

$$\text{(III)} \qquad S_1 \cdot q_1 + S_2 \cdot q_2 = P \cdot p ,$$

$$\text{(IV)} \qquad \frac{S_1 \cdot l_1}{E \cdot F_1} : \frac{S_2 \cdot l_2}{E \cdot F_2} = q_1 : q_2 .$$

Bei der Auflösung verfahren wir so, daß wir aus Gleichung (IV)

$$S_1 = S_2 \cdot \frac{l_2}{l_1} \cdot \frac{F_1}{F_2} \cdot \frac{q_1}{q_2}$$

bestimmen und diesen Wert in (III) einsetzen. Wir erhalten dadurch

$$S_2 \cdot \frac{l_2}{l_1} \cdot \frac{F_1}{F_2} \cdot \frac{q_1}{q_2} \cdot q_1 + S_2 \cdot q_2 = P \cdot p ,$$

$$S_2 = \frac{P \cdot p}{\frac{l_2}{l_1} \frac{F_1}{F_2} \frac{q_1}{q_2} q_1 + q_2} .$$

Digitized by Google

Entsprechend ergibt sich

$$S_1 = \frac{P \cdot p}{q_1 + \frac{l_1}{l_2} \frac{F_2}{F_1} \frac{q_2}{q_1} q_2}.$$

Sobald S_1 und S_2 bekannt sind, finden wir weiter [aus (I) und (II)]:

$$H = S_1 \cdot \cos\alpha_1 + S_2 \cdot \cos\alpha_2 ,$$
$$V = S_1 \cdot \sin\alpha_1 + S_2 \cdot \sin\alpha_2 + P ,$$

und aus diesen beiden Werten schließlich Größe und Richtung von A:

$$A = \sqrt{H^2 + V^2}; \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{V}{H}.$$

Zahlenbeispiel. Es mögen nun sein:

die Höhe von a bis b gleich 3,00 m,
der Abstand „ a „ c „ 4,00 „
„ „ „ a „ d „ 2,50 „

Daraus ergeben sich dann:

$$l_1 = 5{,}00 \text{ m}, \quad l_2 = 3{,}91 \text{ m};$$
$$q_1 = 2{,}40 \text{ m}, \quad q_2 = 1{,}92 \text{ m}.$$

F_1 möge gleich $1{,}20\,F_2$ sein.

Hiermit wird dann

$$S_1 = \frac{P \cdot p}{2{,}40 + \frac{5{,}00}{3{,}91} \frac{1{,}00}{1{,}20} \frac{1{,}92}{2{,}40} 1{,}92}$$
$$= \frac{P \cdot p}{2{,}40 + 1{,}64} = \frac{P \cdot p}{4{,}04}$$
$$= 0{,}248\, P \cdot p ,$$

$$S_2 = \frac{P \cdot p}{\frac{3{,}91}{5{,}00} \cdot 1{,}20 \cdot \frac{2{,}40}{1{,}92} \cdot 2{,}40 + 1{,}92}$$
$$= \frac{P \cdot p}{2{,}82 + 1{,}92} = \frac{P \cdot p}{4{,}74}$$
$$= 0{,}211\, P \cdot p .$$

Entsprechend bestimme man A!

An dieses Beispiel wollen wir noch eine Bemerkung anknüpfen, die für sämtliche statisch unbestimmten Systeme gültig ist:

Digitized by Google

In den obigen Gleichungen kommen außer den Maßen l_1, l_2, q_1, q_2 auch bereits die Querschnitte F_1 und F_2 vor. Die ersteren Maße sind natürlich gegeben; die Querschnitte dagegen sind unbekannt, sie sollen ja erst mit Hilfe der Stabkräfte S_1 und S_2 ermittelt werden. Um also die Gleichungen auflösen zu können, müssen wir zunächst F_1 und F_2 oder wenigstens das Verhältnis von F_1 zu F_2 schätzen, diese Zahl dann in die Gleichungen einführen und damit S_1 und S_2 berechnen. Ergibt sich nun, daß diese Spannkräfte S ganz andere Querschnitte brauchen, als wir geschätzt haben, so bleibt nichts anderes übrig, als die Rechnung noch einmal von vorne anzufangen. Bei diesem zweiten Rechnungsgang hat man dann schon auf Grund der ersten Rechnung einen besseren Anhalt, wie die Querschnitte ungefähr ausfallen werden. Man sieht jedoch, daß die Berechnung von statisch unbestimmten Systemen eigentlich nur eine Kontrollrechnung ist, ob die zunächst geschätzten Querschnitte richtig angenommen sind, und daß namentlich bei größeren Brückensystemen die Rechenarbeit unter Umständen recht umfangreich werden kann.

Dritte Aufgabe.

Ein Körper, auf den die Kräfte P_1 und P_2 wirken, ist bei a drehbar gelagert und bei 1, 2 und 3 durch horizontale Stäbe abgestützt. Wie groß sind die spezifischen Spannungen σ in den Stäben? (Fig. 73.)

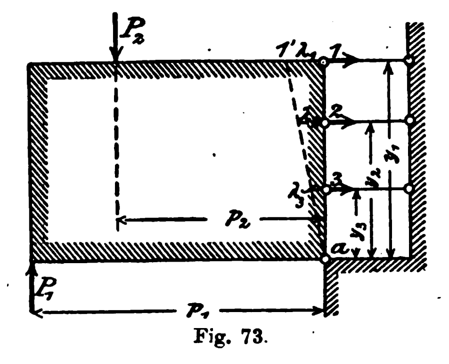


Fig. 73.

Die Querschnitte der Stäbe seien f_1, f_2 und f_3. Die Rechnung gestaltet sich ebenso wie im vorigen Beispiel.

1. Nennen wir die Kraft, die vom Stabe *1* auf den Körper ausgeübt wird, S_1; entsprechend die Kräfte von den beiden anderen Stäben S_2 und S_3, so haben wir zunächst die eine Gleichgewichtsbedingung

$$S_1 \cdot y_1 + S_2 \cdot y_2 + S_3 \cdot y_3 + P_1 \cdot p_1 = P_2 \cdot p_2 ,$$

oder

$$S_1 \cdot y_1 + S_2 \cdot y_2 + S_3 \cdot y_3 = P_2 \cdot p_2 - P_1 \cdot p_1 .$$

Drückt man hierin die Stabkräfte durch die Spannungen aus $\left(\sigma = \frac{S}{f}; \text{ also } S = \sigma \cdot f\right)$, so erhält man:

$$\sigma_1 f_1 \cdot y_1 + \sigma_2 f_2 \cdot y_2 + \sigma_3 f_3 \cdot y_3 = P_2 \cdot p_2 - P_1 \cdot p_1 .$$

Digitized by Google

(Die anderen beiden Gleichgewichtsbedingungen könnten zur Berechnung des bei *a* entstehenden Auflagerdrucks dienen. Davon wollen wir aber absehen.) Da diese eine obige Gleichung nicht zur Bestimmung der drei Unbekannten σ_1, σ_2 und σ_3 ausreicht, müssen wir noch andere Beziehungen aufsuchen.

2. Wenn infolge der Dehnbarkeit der Stäbe der Körper sich etwas um Punkt *a* gedreht hat, so daß die Kante *a 1* in die punktiert gezeichnete Lage *a 1'* kommt, so verhalten sich die Verlängerungen

$$\lambda_1 : \lambda_2 = y_1 : y_2 , \quad \lambda_1 : \lambda_3 = y_1 : y_3 \quad \text{oder} \quad \lambda_2 : \lambda_3 = y_2 : y_3 .$$

Man schreibt eine solche Beziehung in der Form

$$\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3 = y_1 : y_2 : y_3 .$$

Da die ursprünglichen Stablängen einander gleich waren, so gilt auch in bezug auf die Dehnungen:

$$\varepsilon_1 : \varepsilon_2 : \varepsilon_3 = y_1 : y_2 : y_3 .$$

Da wir jedoch nicht die Dehnungen, sondern die Spannungen berechnen wollen, so führen wir

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} ; \qquad \varepsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E} ; \qquad \varepsilon_3 = \frac{\sigma_3}{E}$$

ein und erhalten die Beziehung

$$\text{(II)} \qquad \sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3 = y_1 : y_2 : y_3 .$$

Diese Gleichung sagt aus, daß sich die Spannungen in den Stäben verhalten wie deren Entfernungen vom Drehpunkte *a*.

3. Nun haben wir insgesamt die Gleichungen

$$\text{(I)} \qquad \sigma_1 f_1 \cdot y_1 + \sigma_2 f_2 \cdot y_2 + \sigma_3 f_3 \cdot y_3 = P_2 \cdot p_2 - P_1 \cdot p_1 ,$$

$$\text{(II)} \qquad \sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3 = y_1 : y_2 : y_3 .$$

Da die zweite insgesamt zwei selbständige Gleichungen in sich schließt (nämlich $\sigma_1 : \sigma_2 = y_1 : y_2$ und $\sigma_2 : \sigma_3 = y_2 : y_3$ oder $\sigma_1 : \sigma_3 = y_1 : y_3$), so sind ebensoviel Gleichungen wie Unbekannte vorhanden.

Wollen wir jetzt eine von diesen Spannungen, z. B. σ_1, berechnen, so drücken wir zunächst die beiden anderen mit Hilfe der Gleichung (II) durch σ_1 aus:

$$\sigma_1 : \sigma_2 = y_1 : y_2 ; \qquad \text{hieraus} \qquad \sigma_2 = \frac{\sigma_1}{y_1} y_2 ;$$

$$\sigma_1 : \sigma_3 = y_1 : y_3 ; \qquad \text{„} \qquad \sigma_3 = \frac{\sigma_1}{y_1} y_3 .$$

Digitized by Google

Diese Werte für σ_2 und σ_3 führen wir in Gleichung (I) ein und erhalten

$$\sigma_1 f_1 \cdot y_1 + \frac{\sigma_1}{y_1} y_2 f_2 \cdot y_2 + \frac{\sigma_1}{y_1} y_3 f_3 \cdot y_3 = P_2 \cdot p_2 - P_1 \cdot p_1 ,$$

$$\frac{\sigma_1}{y_1} (f_1 \cdot y_1^2 + f_2 \cdot y_2^2 + f_3 \cdot y_3^2) = P_2 \cdot p_2 - P_1 \cdot p_1 .$$

Die Summe in der Klammer können wir ausrechnen, da die Querschnitte f und die Abstände y gegeben sind; wir wollen sie zur Abkürzung mit „J" bezeichnen. Ebenso wollen wir zur Abkürzung die Summe der statischen Momente auf der rechten Seite der Gleichung mit „M" bezeichnen.

Hierdurch bekommt dann die Gleichung die Form:

$$\frac{\sigma_1}{y_1} \cdot J = M ;$$

woraus sich die Spannung σ_1 im Stabe *1* ergibt

$$\text{(VII)} \qquad \sigma_1 = \frac{M}{J} \cdot y_1 .$$

Ermittelt man in derselben Weise die Spannungen σ_2 und σ_3, so ergeben sich diese:

$$\sigma_2 = \frac{M}{J} \cdot y_2 ,$$

$$\sigma_3 = \frac{M}{J} \cdot y_3 .$$

Wir bekommen also jede Spannung, indem wir zunächst die Summenwerte M und J bestimmen und dann den Quotienten $M : J$ mit dem betreffenden Abstande y multiplizieren. Wir werden diese Aufgabe später für den Fall erweitern, daß an Stelle der Stäbe die einzelnen Fasern eines auf Biegung beanspruchten Balkens treten und auf diesem Wege zur Ableitung der *Grundgleichung der Biegungsfestigkeit* gelangen.

Digitized by Google

Abschnitt IV.

Die Biegungsfestigkeit.

7. Vortrag:

Die Grundformeln der Biegungslehre.

§ 35.

Einleitung.

Bei der Betrachtung eines auf Biegung beanspruchten Körpers wollen wir folgende in Fig. 74 dargestellte Aufgabe zugrunde legen: Ein Balken sei durch die vertikalen Kräfte P_1, P_2, P_3 und P_4 belastet und in den Punkten A und B unterstützt. Die Kräfte im Innern des Balkens sind zu bestimmen!

Infolge der Belastung wird sich der Balken etwas durchbiegen, so daß die ursprünglich gerade Stabachse in eine krumme Linie übergeht. Diese Formänderung ist das Kennzeichnende für einen auf Biegung beanspruchten Körper. Sie unterscheidet sich hierdurch wesentlich von der Beanspruchung auf Normalfestigkeit, bei der die Stabachse wohl Längenänderungen erfuhr, dabei aber ihre gerade Gestalt nach der Formänderung beibehielt.

Um den Umfang der Aufgabe, die Kräfte im Innern des Balkens zu bestimmen, kennen zu lernen, denke ich mir durch den Balken einen beliebigen Schnitt α—α gelegt und auf diesem Schnitte eine kleine Fläche abgeteilt. Sobald die äußeren Kräfte auf den Körper einwirken, müssen die einzelnen Teile desselben derartig Kräfte aufeinander ausüben, daß der Zusammenhang des ganzen Körpers gewahrt bleibt. Die Kraft, die in dem Flächenelement übertragen wird, sei mit Q_1 bezeichnet. Ihre Größe sowohl als ihre Richtung ist unbekannt. Wir wissen nur das eine, daß nach dem Prinzip von Wirkung und Gegenwirkung die Kraft Q_1, die der linke Teil auf den rechten ausübt, ebenso groß, aber entgegengesetzt gerichtet ist wie die Kraft Q_1, die der rechte Teil

Digitized by Google

auf den linken Teil ausübt. Ist der Inhalt der betrachteten Fläche gleich f_1 qcm, so ist die an dieser Stelle pro Quadratzentimeter übertragene Kraft

$$p = \frac{Q_1}{f_1}.$$

Wir nennen p die zu der Fläche f_1 gehörige Spannung.

Betrachten wir nun auf demselben Querschnitte α—α eine andere Fläche, so wird die Kraft, die in dieser Fläche von den Teilen des Balkens aufeinander ausgeübt wird, sowohl in Größe als auch in Richtung verschieden sein von Q_1. Hierdurch unterscheidet sich die Biegungsbeanspruchung von der Beanspruchung auf Normalfestigkeit. Bei dieser waren wegen der vollständig gleichmäßig verteilten Belastung in allen Punkten eines Querschnittes die Spannungen gleichgroß und gleichgerichtet; jetzt

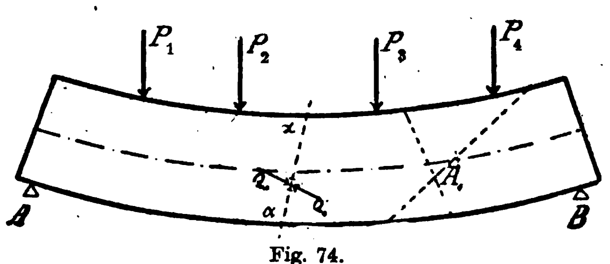


Fig. 74.

ändern sie sich bei ein und demselben Querschnitte von Punkt zu Punkt. Die Berechnung wird dadurch natürlich viel umständlicher.

Wenn ich nun andererseits durch einen beliebigen Punkt A_1 nach verschiedenen Richtungen Querschnitte gelegt denke, so wird natürlich je nach der Lage dieser Flächen die von ihnen übertragene Kraft eine andere sein. Der Spannungszustand in diesem Punkte des Körpers kann erst dann als bekannt angesehen werden, wenn wir zu jeder möglichen Richtung die zugehörige Spannung angeben können.

So umständlich brauchen wir uns die Aufgabe allerdings nicht zu machen, daß wir alle möglichen Schnittrichtungen untersuchen, um den an der betreffenden Stelle herrschenden Spannungszustand zu bestimmen. Die Erfahrung lehrt, daß bei einem aus gleichmäßigem Material bestehenden Balken die Bruchfläche rechtwinklig zur Stabachse steht. Deshalb genügt es, zunächst die Spannungen nur für solche Querschnitte zu untersuchen, die rechtwinklig zur Stabachse sind. Nur für einige besondere Berechnungen müssen wir auch anders liegende Schnittflächen in den Kreis unserer Betrachtungen ziehen.

Digitized by Google

§ 36.

Allgemeines über die Formänderungen der einzelnen Balkenschichten. (Neutrale Faserschicht, Nullinie.)

Wir beschränken unsere Untersuchungen zunächst auf solche Körper, die eine senkrechte Symmetrieebene haben. Auch der in Fig. 75 gezeichnete Körper sei also in bezug auf die vertikale Ebene $y-y$ symmetrisch; d. h. die linke Hälfte sei das Spiegelbild der rechten (Fig. 75b). Die Folge dieser Symmetrie ist die, daß der Balken sich bei vertikaler Belastung nur vertikal nach

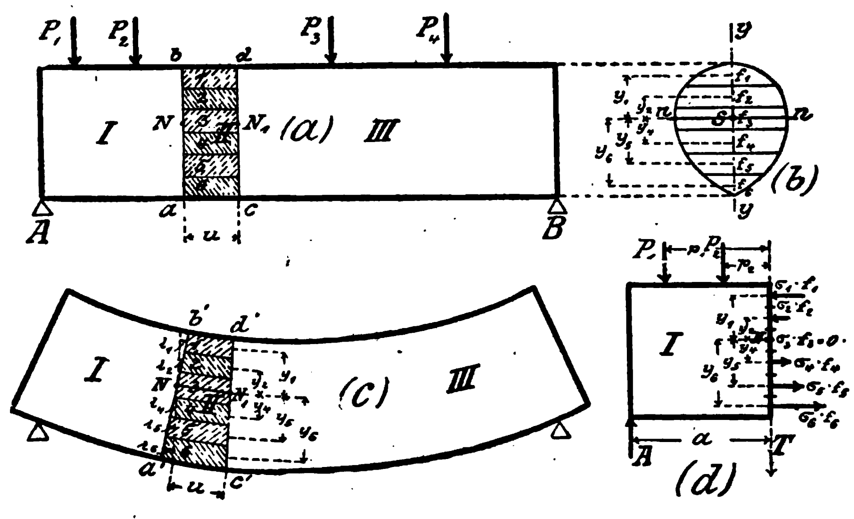


Fig. 75.

unten durchbiegt und nicht etwa außerdem noch seitlich ausschlägt (wie es bei unsymmetrischen Querschnitten vorkommen kann).

Durch den Balken legen wir zwei Querschnitte, ab und cd. Der Abstand zwischen beiden werde mit u bezeichnet. Er sei sehr klein, damit die inneren Kräfte auf der Strecke von einem Punkte des Querschnittes ab bis zu dem entsprechenden Punkte des Querschnittes cd als unverändert angenommen werden können.

Zwischen den Querschnitten denke ich mir eine Anzahl von horizontalen Ebenen gelegt, so daß das Balkenstück *II* in Fig. 75a in lauter horizontale „Faserschichten" eingeteilt wird. In Fig. 75a sind der Deutlichkeit wegen nur sechs solcher Schichten gezeichnet; in Wirklichkeit seien aber unendlich viele, so daß jede Schicht eine unendlich dünne Faser des Balkens darstellt. Die seitlichen

Digitized by Google

Ansichtsflächen dieser Schichten sind mit *1* bis *6* bezeichnet; die Stirnflächen (in den Querschnitten *ab* und *cd* liegend) mit f_1 bis f_6 (Fig. 75a und b).

Infolge der Durchbiegung des Balkens verlieren die Schnitte *ab* und *cd* ihre ursprünglich parallele Lage, und der Teil *II* nimmt die in Fig. 75c dargestellte keilförmige Gestalt an. Im allgemeinen wird sich hierbei ein Teil der horizontalen Schichten, in die wir uns das Balkenstück aufgelöst dachten, verkürzt und ein anderer Teil verlängert haben. Zwischen diesen beiden Teilen muß es dann eine Faserschicht geben, die sich weder verkürzt noch verlängert hat. Wir nennen diese die

„neutrale Faserschicht“.

Sie sei in Fig. 75a und c dargestellt durch die Schicht NN_1. Es sei also dieses diejenige Schicht, die auch nach der Durchbiegung (Fig. 75c) ihre ursprüngliche Länge *u* beibehalten hat. Die darüber liegenden Schichten haben sich verkürzt, die darunter liegenden verlängert.

Die Linie, in der diese (unendlich dünne) „neutrale Faserschicht“ die Querschnittsflächen *ab* oder *cd* schneidet, heißt die

„Nullinie“.

Sie ist in Fig. 75b mit *n*—*n* bezeichnet. Die Nullinie ist also gewissermaßen die Stirnfläche der neutralen Faserschicht.

Die genaue Lage von NN_1 und *n*—*n* zu bestimmen, ist Aufgabe der späteren Untersuchungen. Vorläufig ist es wichtig, sich diese Bezeichnungen zu merken.

§ 37.

Allgemeines über die Spannungen in einem Querschnitte rechtwinklig zur Stabachse (Normalspannungen σ und Schub- oder Tangentialspannungen τ).

Nun wollen wir uns einen Überblick verschaffen, welche inneren Kräfte z. B. auf den Querschnitt *ab* einwirken.

I. Allgemeines und Bezeichnungen.

1. Die wirklich vorhandene Spannung p.

Der Teil *I* des Balkens von Fig. 75c ist in Fig. 76a noch einmal, und zwar perspektivisch, gezeichnet. Da die Durchbiegungen im Maßstabe der Zeichnung sehr klein sind, so ist er einfach als gerades Stück dargestellt. Auf der Querschnittsfläche wollen wir

Digitized by Google

ein kleines Flächenteilchen f, ein sog. „*Flächenelement*“, ins Auge fassen. Zur besseren Orientierung ziehen wir durch f *innerhalb* der Querschnittsfläche eine horizontale Linie $x—x$ und eine vertikale Linie $y—y$, und *rechtwinklig* zur Querschnittsfläche eine Linie $z—z$. (Diese läuft also in Richtung der Stabachse und tritt rechtwinklig aus der Querschnittsfläche heraus.)

Die innere Kraft, die in der Fläche f übertragen wird, nenne ich i. Dieses ist also die Kraft, die der angrenzende Balkenteil *II* auf den betrachteten Teil *I* innerhalb der Fläche f ausübt, etwa so, wie die einzelnen Steine einer gemauerten Brücke aufeinander Kräfte ausüben. Die Kraft i steht im allgemeinen natürlich vollständig *schief* zur Querschnittsfläche. Um die pro Quadratzentimeter gerechnete Kraft zu erhalten, dividiere ich die gesamte Kraft i durch die Anzahl der Quadratzentimeter, auf die sie einwirkt, also durch f. (Es ist natürlich nebensächlich, daß f nur der Bruchteil eines Quadratzentimeters ist. Wir können trotzdem angeben, wieviel innere Kraft an dieser Stelle f auf ein Quadratzentimeter entfallen würde.) Diesen Wert haben wir „die zu der Fläche f gehörige *Spannung*“ genannt. Wir wollen sie mit p bezeichnen, so daß ist

$$p = \frac{i}{f}.$$

Der Wert p ist in Fig. 76a eingezeichnet, und zwar in der Richtung, in der an der Stelle f die innere Kraft wirken möge. Die Länge der stark ausgezogenen Linie gebe — in einem beliebigen Maßstabe — die Größe von p an. Wie bereits hervorgehoben, wird p im allgemeinen nicht rechtwinklig, sondern schräg zum Querschnitte stehen. (Hierdurch unterscheidet sich dieser Fall von der Normalfestigkeit, bei der ja die Spannungen, die in einem rechtwinklig zur Stabachse gelegten Querschnitt auftreten, sämtlich *rechtwinklig* zum Querschnitte stehen.)

2. Zerlegung von p in Seitenkräfte (σ, τ_s, τ_w).

Da wir mit schrägen Kräften schlecht arbeiten können, fälle ich von dem Endpunkte von p sowohl auf die Querschnittsfläche als auch auf die Achse $z—z$ Lote. Der Fußpunkt des ersten Lotes ist mit a, der des zweiten mit b bezeichnet. Nun verbinde ich f und a und zerlege p in zwei Seitenkräfte so, daß die eine in die Verbindungslinie fa fällt und die andere rechtwinklig zu f steht. Diese Seitenkräfte ergeben sich also aus dem Rechteck, dessen Diagonale die angenommene Spannung p ist; dessen eine Seite die (in der Querschnittsfläche liegende) Linie fa

Digitized by Google

ist, und dessen andere Seite das Stück fb der (zu der Querschnittsfläche rechtwinklig stehenden) Achse $z-z$ bildet (Rechteck $pafb$ in Fig. 76a).

Nun wollen wir folgende Bezeichnungen einführen: Die Seitenkraft fb heiße

„Normalspannung σ",

und die Komponente fa heiße

„Schub- oder Tangentialspannung τ".

Die erste Bezeichnung rührt natürlich daher, weil σ normal (d. h. rechtwinklig zur Querschnittsfläche) steht. Die zweite Benennung

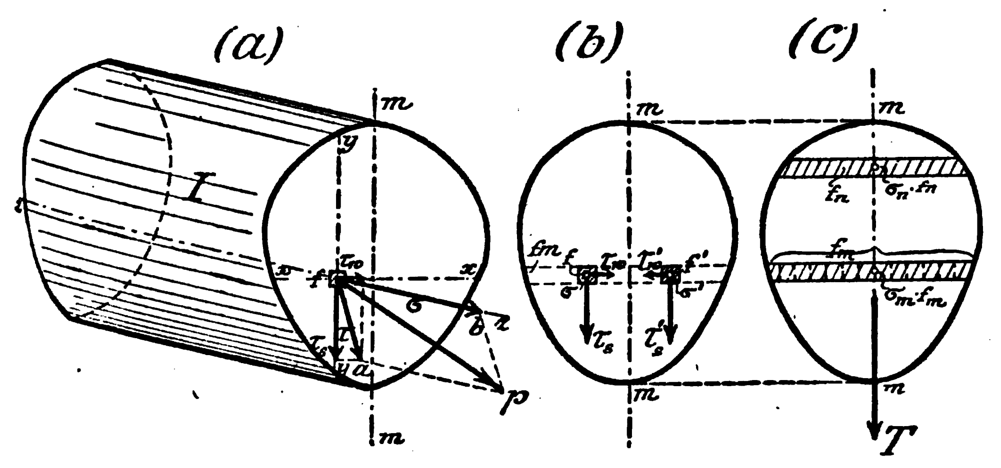


Fig. 76.

kommt daher, weil derartige *innerhalb* der Fläche liegende Spannungen namentlich für die auf „Schub" beanspruchten Körper wichtig sind.

Da aber die Schubspannung τ auch noch schräg, wenn auch schon innerhalb der Querschnittsfläche, verläuft, wollen wir sie noch weiter zerlegen, und zwar horizontal und vertikal. Diese Zerlegung führen wir also aus, indem wir innerhalb der Querschnittsfläche ein Rechteck zeichnen, dessen Diagonale die Schubspannung τ, und dessen Seiten parallel mit der (horizontalen) x-Achse bzw. mit der (vertikalen) y-Achse laufen. In Fig. 76a ist auch dieses Rechteck eingezeichnet. Den hierdurch bestimmten Seitenkräften τ_s und τ_w wollen wir die Bezeichnung geben:

τ_s = senkrechte Schubspannung } des Flächenelementes f.
τ_w = wagerechte „ }

Digitized by Google

In Fig. 76b, in der Ansicht der Querschnittsfläche, sind diese Spannungen eingezeichnet. Die Normalspannung σ erscheint in dieser Zeichnung natürlich als Punkt.

Zusammenfassung.

Im allgemeinen wirkt auf jedes Flächenelement f des Querschnittes eine *schräg* zur Querschnittsfläche stehende Spannung p. Diese haben wir aber im Interesse einer einfachen Rechnung ersetzt durch drei *rechtwinklig* zueinander stehende Seitenkräfte, nämlich durch die

Normalspannung σ (**rechtwinklig** zur Querschnittsfläche),
senkrechte **Schubspannung** τ_s (senkrecht **innerhalb** der Querschnittsfläche),
wagerechte „ τ_w (wagerecht „ „ „).

Durch diese Zerlegung haben wir erreicht, daß wir bei jedem Flächenelement nur mit in bestimmten Richtungen wirkenden Spannungen zu rechnen haben, an Stelle der regellos durcheinander liegenden Spannungen p.

Es kann natürlich auch vorkommen, daß bereits die ursprüngliche Spannung p rechtwinklig zu ihrem Flächenelement f steht. Dann werden τ_s und τ_w gleich Null, und die Spannung p ist bereits eine Normalspannung.

II. Vereinfachungen für den symmetrischen Querschnitt.

Das Bisherige gilt für jeden beliebigen Querschnitt. Nun wollen wir sehen, wie sich die Sache dadurch vereinfacht, daß der von uns zugrunde gelegte Querschnitt in bezug auf eine vertikale Mittellinie m—m (früher, in Fig. 75, mit y—y bezeichnet) symmetrisch ist. Da auch die äußeren Kräfte — Lasten und Auflagerkräfte — in dieser Symmetrieebene liegen, befindet sich also ein Element f auf der linken Seite (Fig. 76b) unter genau den gleichen Umständen wie ein entsprechend liegendes f' auf der rechten Seite. Daraus folgt, daß auch die in diesen Flächenelementen auftretenden Spannungen sich entsprechen müssen. Es muß also sein:

1. Normalspannung $\sigma = \sigma'$ (erscheinen in Fig. 76b als Punkte)
2. Senkrechte Schubspannung $\tau_s = \tau_s'$ (entweder beide nach oben oder beide nach unten).
3. Wagerechte Schubspannung $\tau_w = -\tau_w'$ (laufen nach entgegengesetzten Richtungen; entweder beide nach der Achse m—m zu oder von dieser fort).

Teilen wir den ganzen Querschnitt in lauter Flächenelemente ein, so haben wir unendlich viele dieser kleinen Flächen. Zu jeder dieser gehören drei Spannungskomponenten (σ, τ_s und τ_w). Um mit diesen Kräften rechnen zu können, müssen wir sie zu Resultierenden zusammenfassen. Hierbei haben wir folgende Vereinfachungen:

a) Zusammenfassung der Normalkräfte.

Für sämtliche Flächenelemente, die in einem *horizontalen Querschnittsstreifen* liegen, wollen wir eine *durchschnittliche Normalspannung* einführen.

Im nächsten Paragraphen werden wir nämlich sehen, daß sämtliche Flächenelemente (Vierecke), die z. B. den horizontalen Streifen f_m bilden, annähernd die gleiche Normalspannung σ haben, so daß wir recht wohl für alle Elemente ein und desselben Streifens einen Durchschnittswert für die Normalspannung einführen können. Wir bezeichnen diesen Durchschnittswert z. B. für den Streifen f_m mit σ_m und nennen ihn die Normalspannung des Querschnittstreifens f_m. Entsprechend ist z. B. σ_n die Normalspannung von f_n, d. h. die (durchschnittliche) Normalspannung sämtlicher den Streifen f_n bildenden Flächenelemente, usw. Aus den *Spannungen* σ (den *pro Quadratzentimeter* übertragenen Kräften) ergeben sich dann die *gesamten* Kräfte, die auf die Flächenstreifen f_m, f_n usw. einwirken, indem wir das betreffende σ mit dem Inhalte des Flächenstreifens multiplizieren. Es werden demnach folgende Normalkräfte übertragen (Fig. 76c):

im Streifen f_m: $\sigma_m \cdot f_m$,
" " f_n: $\sigma_n \cdot f_n$; usw.

Die Kraft $\sigma_m \cdot f_m$ z. B. ist also die Resultierende aus allen Normalkräften, die auf die einzelnen Elemente (Quadrate) des Streifens f_m wirken. Sie steht mithin ebenfalls rechtwinklig zur Querschnittsfläche und wirkt, da der Querschnitt in bezug auf die Achse m—m symmetrisch ist, in der Mitte des Flächenstreifens f_m (Fig. 76c). Entsprechend stehen auch die anderen Kräfte $\sigma_n \cdot f_n$ usw. sämtlich rechtwinklig zur Querschnittsfläche und greifen sämtlich in der Symmetrieachse m—m an.

b) Zusammenfassung der Schubkräfte $\tau_s \cdot f$.

Die Schubspannungen τ_s ergeben — ebenfalls wegen der vorhandenen Symmetrie — eine Resultierende T, die in die Symmetrieachse fällt. Diese Resultierende T kann nach oben oder nach unten gehen, ebenso wie die Schubspannungen τ_s — je nach der Richtung von p — nach oben oder nach unten zeigen. In Fig. 76 ist letzterer Fall angenommen.

Digitized by Google

c) Zusammenfassung der Schubkräfte $\tau_w \cdot f$.

Die Schubspannungen τ_w heben sich gegenseitig auf (Fig. 76b) und ergeben also eine Resultierende gleich Null.

Zusammenfassung.

Dadurch, daß wir die zu jedem Flächenelemente gehörige Spannung p in drei rechtwinklig zueinander stehende Komponenten zerlegt und dann die gleichgerichteten Komponenten zu Resultierenden zusammengefaßt haben, hat sich das anscheinend so unübersichtliche Spannungsbild wesentlich vereinfacht. Wir haben nämlich sämtliche auf den Querschnitt wirkende inneren Kräfte auf folgende Ersatzkräfte zurückgeführt:

1. die Normalkräfte $\sigma_m \cdot f_m$; $\sigma_n \cdot f_n$; usw.,
2. die Schubkraft (Scheerkraft, Tangentialkraft) T.

Die einzelnen Normalkräfte sind voneinander verschieden groß. Sie stehen aber sämtlich rechtwinklig zur Querschnittsfläche und in der Symmetrieebene $m—m$. Ebenfalls in dieser greift die Tangentialkraft T an.

Natürlich sind diese Ersatzkräfte nicht maßgebend für die Beanspruchung der einzelnen Flächenelemente. Sondern für jedes Flächenelement f gilt die betreffende Spannung p. Ist p zu groß, so wird an der Stelle f eine Zerstörung eintreten. Wohl aber können wir die Ersatzkräfte verwenden, wenn wir z. B. das Gleichgewicht des ganzen Teiles I untersuchen. An diesem Teile wirken die Spannungen des Schnittes ab (Fig. 75 und 76) als Kräfte an der Oberfläche (äußere Kräfte) genau so, wie A und P_1 und P_2. Wir können also beim Aufstellen der Gleichgewichtsbedingungen statt mit den einzelnen Kräften $p \cdot f$ mit den Ersatzkräften arbeiten. Im nächsten Paragraphen, dem wichtigsten der ganzen Biegungsfestigkeit, werden wir auf diese Weise die Gleichgewichtsbedingungen anschreiben und hierdurch zur genaueren Berechnung von σ_1, σ_2 usw. gelangen.

§ 38.

Die Berechnung der Normalspannungen σ.

Erster Teil: Einzeichnung der inneren Kräfte.

Jetzt kehren wir zu Fig. 75 zurück, die wir in § 36 zur Untersuchung der in den einzelnen Schichten auftretenden Formänderungen gebraucht hatten. Die nächste Arbeit sei die Berechnung der Normalspannungen σ in der Querschnittsfläche ab.

Digitized by Google

Zu diesem Zwecke ist der Teil *I* in Fig. 75d noch einmal gezeichnet. Wir haben hier also zunächst die äußeren Kräfte A, P_1 und P_2, wie in Fig. 75a. Außerdem sind aber in Fig. 75d auch die in der Fläche ab von Fig. 75a einwirkenden inneren Kräfte angebracht (also $\sigma_1 \cdot f_1$, $\sigma_2 \cdot f_2$ usw. und T). Fig. 75d stellt also den Teil *I* mit *sämtlichen* an ihm angreifenden Kräften dar. Durch Hinzufügung auch der inneren Kräfte haben wir den Teil *I*, der in Fig. 75a nur ein Stück eines Körpers ist, gewissermaßen zu einem *selbständigen* Körper gemacht, auf den wir dann die Gesetze der Statik, z. B. die Gleichgewichtsbedingungen, anwenden können.

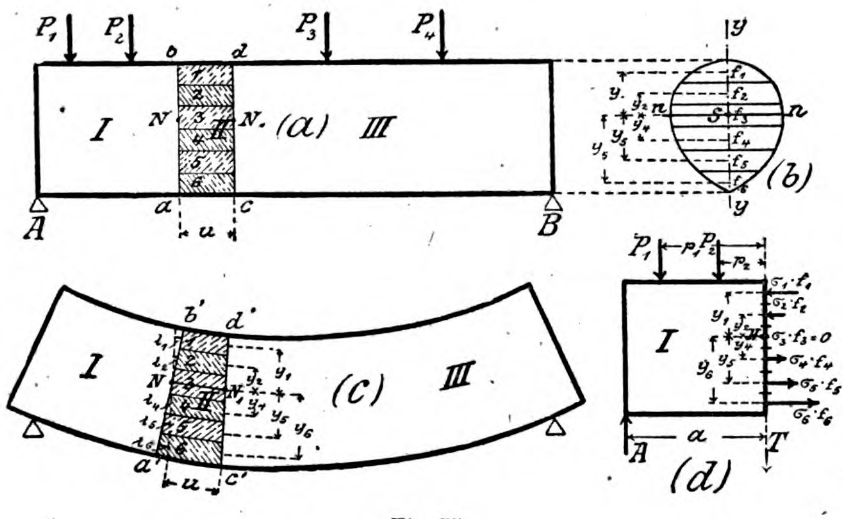


Fig. 75.

Hinsichtlich der in Fig. 75d eingezeichneten inneren Kräfte ist zu bemerken: Ein Teil der Kräfte $\sigma \cdot f$ ist nach links, der andere nach rechts wirkend gezeichnet. Dieses ergibt sich nämlich aus der Betrachtung der Formänderungen der einzelnen Schichten. Die erste Schicht, *1*, ist durch die Biegung *zusammengedrückt* (Fig. 75c). Sie verhält sich wie ein kleiner Stab, der die ursprüngliche Länge u hatte, und dessen Endflächen gewaltsam (infolge der Einsenkung des Balkens) einander genähert wurden. Die Kraft, die ein solcher auf *Druck* beanspruchter Stab auf seine Endflächen (Widerlager) ausübt, besteht also in einem Gegendruck, gegen die Stützflächen gerichtet. Deshalb übt die zusammengepreßte Schicht *1* auf den Teil *I* eine Druckkraft aus, die von

Digitized by Google

rechts nach links zeigt (Fig. 75d). Der auf den Teil *III* ausgeübte Druck wirkt natürlich von links nach rechts.

Entsprechend ist die Normalkraft $\sigma_2 \cdot f_2$ eingezeichnet, die die Schicht *2* auf den Balkenteil *I* ausübt.

Die Schicht *3* sei die neutrale Faserschicht. Sie erfährt keine Längenänderungen und übt also auf die sie stützenden Flächen keine Kräfte aus. Sie wird nur der Vollständigkeit wegen mit aufgeführt.

Die Schichten *4*, *5* und *6* werden verlängert. Sie wirken wie Stäbe, die auf Zug beansprucht sind, und üben also auf die angrenzenden Flächen Kräfte aus, die von den Endflächen nach dem Stabmittelpunkte zeigen. Demgemäß sind die von diesen Schichten auf den Teil *I* ausgeübten Kräfte in Fig. 75d eingezeichnet. Die auf den Teil *III* ausgeübten Kräfte würden gerade entgegengesetzt zeigen.

Die Richtung der Kraft T kann nach oben oder nach unten zeigen (vgl. § 37, II).

Zweiter Teil: Ableitung der Biegungsformel $\sigma = \frac{M}{J} \cdot y$.

Nach diesen Vorbereitungen gehen wir zur Berechnung der in Fig. 75d eingezeichneten inneren Kräfte. Es möge hierzu im voraus bemerkt werden, daß der Rechnungsgang sich eng an die Berechnung statisch unbestimmter Aufgaben (wiederhole § 34, namentlich 3. Aufgabe) anschließen wird.

1. Anschreiben der Gleichgewichtsbedingungen.

Die Gesamtwirkung sämtlicher am Teile *I* angreifenden Kräfte besteht darin, daß er einen Ruhezustand aufsucht und in diesem verharrt. Wir können also die **Gleichgewichtsbedingungen** anschreiben, um mit deren Hilfe diejenigen Kräfte, die in Fig. 75d noch unbekannt sind, zu berechnen. Als Bezugspunkt für die statischen Momente wollen wir den Schnittpunkt N der neutralen Faserschicht mit dem Querschnitte ab nehmen; also den Punkt, in dem in der Seitenansicht die Nullinie erscheint. (Die Nullinie wird zunächst nach Gutdünken eingezeichnet.) Die Abstände der Normalkräfte sind y_1, y_2 usw. genannt. Dann lauten also die drei Gleichgewichtsbedingungen (§ 13, 1):

(1) $\sigma_1 \cdot f_1 + \sigma_2 \cdot f_2 + \sigma_3 \cdot f_3 = \sigma_4 \cdot f_4 + \sigma_5 \cdot f_5 + \sigma_6 \cdot f_6$,

(2) $A = P_1 + P_2 + T$,

(3) $A \cdot a = P_1 \cdot p_1 + P_2 \cdot p_2 + (\sigma_1 f_1 \cdot y_1 + \sigma_2 f_2 \cdot y_2 + \sigma_3 f_3 \cdot y_3 + \sigma_4 f_4 \cdot y_4 + \sigma_5 f_5 \cdot y_5 + \sigma_6 f_6 \cdot y_6)$.

In diesen drei Gleichungen sind sämtliche Spannungen σ und außerdem die Schubkraft T unbekannt. Um letztere wollen wir

Digitized by Google

uns jetzt aber nicht kümmern, sondern sie in § 41 besonders behandeln. Da in der Gleichung (2) außer T keine anderen inneren Kräfte vorkommen, so scheidet diese Gleichung also bei der Berechnung der Normalspannungen σ aus, und es bleiben nur die Gleichungen (1) und (3) übrig.

Diese formen wir zunächst um:

$$\text{(I)} \qquad \sigma_1 f_1 + \sigma_2 f_2 + \sigma_3 f_3 = \sigma_4 f_4 + \sigma_5 f_5 + \sigma_6 f_6 ,$$

$$\text{(II)} \quad \sigma_1 f_1 \cdot y_1 + \sigma_2 f_2 \cdot y_2 + \sigma_3 f_3 \cdot y_3 + \sigma_4 f_4 \cdot y_4 + \sigma_5 f_5 \cdot y_5 + \sigma_6 f_6 \cdot y_6 = + A \cdot a - P_1 \cdot p_1 - P_2 \cdot p_2 .$$

In Wirklichkeit haben wir natürlich nicht nur sechs verschiedene Spannungen, sondern unendlich viele. Denn die Spannung ist ja in jeder der unendlich dünnen Schichten, aus denen wir uns den Balken aufgebaut denken, verschieden. Die Zahl von sechs Schichten sollte nur als Anhalt dienen, um sich die wirklichen Verhältnisse vorstellen zu können.

In diesen zwei Gleichungen haben wir also unendlich viel Unbekannte $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots)$. Da wir aber aus zwei Gleichungen nicht unendlich viel Unbekannte ausrechnen können, müssen wir noch weitere Gleichungen aufsuchen.

2. Unterstützung durch eine Annahme.

Deshalb machen wir folgende Annahme: Es mögen sich verhalten:

$$\text{(III)} \qquad \begin{cases} \sigma_2 : \sigma_1 = y_2 : y_1 \\ \sigma_3 : \sigma_1 = y_3 : y_1 \\ \sigma_4 : \sigma_1 = y_4 : y_1 \\ \sigma_5 : \sigma_1 = y_5 : y_1 \\ \sigma_6 : \sigma_1 = y_6 : y_1 \end{cases}$$

In Worten: *Die Normalspannungen σ_1, σ_2 usw. der einzelnen Flächenstreifen f_1, f_2 usw. mögen sich verhalten wie deren Abstände y_1, y_2 usw. von der Nullinie.* Am übersichtlichsten schreibt man diese Annahme in Form einer fortlaufenden Verhältnisreihe:

$$\text{(III)} \qquad \sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3 : \sigma_4 : \sigma_5 : \sigma_6 = y_1 : y_2 : y_3 : y_4 : y_5 : y_6 .$$

(Man beachte, daß sich die *Spannungen*, nicht aber die gesamten Kräfte $\sigma_1 \cdot f_1, \sigma_2 \cdot f_2$ usw., so verhalten sollen; letztere hängen außerdem von der Größe der Flächen f ab.)

Durch diese Annahme erhalten wir zu den bereits vorhandenen zwei Gleichungen (I) und (II) noch fünf neue selbständige Gleichungen und haben dann also sieben Gleichungen, aus denen wir die unbekannten Größen, nämlich die Lage der Nullinie und die Spannungen σ_1 bis σ_6, ausrechnen können.

Digitized by Google

Bevor wir aber an diese rein mathematische Aufgabe des Ausrechnens gehen, möge erläutert werden, wie man auf die obige Annahme wohl kommen kann. In Fig. 75c sind die *Verkürzungen* bzw. *Verlängerungen* der einzelnen Schichten mit λ_1, λ_2 usw. bezeichnet. Die Abstände y sind ebenfalls eingeschrieben, und man findet aus der Figur, daß sich verhält:

$$\lambda_2 : \lambda_1 = y_2 : y_1$$
$$\vdots \quad \vdots \qquad \vdots \quad \vdots$$
$$\lambda_6 : \lambda_1 = y_6 : y_1$$

oder, gemeinsam geschrieben:

$$\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3 : \lambda_4 : \lambda_5 : \lambda_6 = y_1 : y_2 : y_3 : y_4 : y_5 : y_6$$

(λ_3 ist gleich Null und nur der Vollständigkeit wegen mitgeführt; ebenso y_3).

Nun besteht nach § 28 zwischen der Verlängerung (Verkürzung) λ eines auf Zug (Druck) beanspruchten Stabes und der auf ihn einwirkenden Kraft P die Beziehung

$$\lambda = \frac{P \cdot l}{E \cdot F}$$

(E = Elastizitätsmodul; F = Querschnittsfläche des Stabes; l = ursprüngliche Stablänge).

Für die Schicht 1 z. B. ist P (d. h. die an jeder Endfläche wirkende gesamte Belastung) gleich $\sigma_1 \cdot f_1$; für l ist u einzusetzen; F ist gleich f_1. Also lautet die Beziehung für die erste Schicht:

$$\lambda_1 = \frac{\sigma_1 f_1 \cdot u}{E \cdot f_1} = \frac{\sigma_1 \cdot u}{E} = \sigma_1 \cdot \frac{u}{E}.$$

Für die zweite Schicht wird entsprechend

$$\lambda_2 = \sigma_2 \cdot \frac{u}{E}; \qquad \text{usw.}$$

Setzen wir diese für λ_1, λ_2 usw. gefundenen Werte in die obigen Verhältnisse ein, so wird:

$$\sigma_1 \cdot \frac{u}{E} : \sigma_2 \cdot \frac{u}{E} : \ldots = y_1 : y_2 : \ldots$$

Nun bleibt eine fortlaufende Verhältnisreihe auch dann bestehen, wenn man auf einer Seite jedes Glied durch ein und dieselbe Zahl dividiert. Wir wollen also in der obigen linken Seite

Digitized by Google

jedes Glied durch den Faktor $\frac{u}{E}$ dividieren, so daß dieser fortfällt, und erhalten dann

$$\sigma_1 : \sigma_2 : \ldots = y_1 : y_2 : \ldots ;$$

d. h. wir kommen auf unsere, zunächst als ganz willkürliche Annahme hingestellte, Verhältnisreihe zurück.

Trotzdem darf man aber nicht glauben, daß wir diese Annahme nun direkt bewiesen hätten. Die obige Ableitung würde z. B. dann hinfällig werden, wenn die Linien $a\,b$ und $c\,d$ von Fig. 75a infolge der Durchbiegung nicht *gerade* bleiben, sondern sich krümmen würden. In der Tat zeigt auch die genaue Untersuchung, daß im allgemeinen eine ursprünglich gerade Linie $a\,b$ nach der Durchbiegung eine leicht geschwungene Kurve bildet. Mit anderen Worten: Ein ursprünglich *ebener* Querschnitt wird wellenförmig. Wenn aber eine derartige Krümmung eintritt, so läßt sich auch nicht sagen, wie die Verlängerungen λ_1, λ_2 usw. sich zueinander verhalten werden, und damit werden dann auch die weiteren Folgerungen zunichte.

Der Standpunkt, den man in dieser Frage einnehmen soll, ist also folgender: Die Beziehung zwischen den Spannungen

$$\sigma_1 : \sigma_2 : \ldots = y_1 : y_2 : \ldots$$

ist eine *Annahme*, die zwar im allgemeinen nicht mathematisch genau zutreffen wird, die aber recht plausibel ist und sich bisher auch als genügend zutreffend bewährt hat. Da wir in der technischen Biegungstheorie ohne diese Annahme die Normalspannungen σ überhaupt nicht ausrechnen könnten, müssen wir ihre Ungenauigkeit — wohl oder übel — in den Kauf nehmen. Man nennt diese Annahme die *Navier*sche Hypothese.

3. *Mathematische Auflösung der Gleichungen.*

Jetzt kommt, wie bei jeder statisch unbestimmten Aufgabe, als dritter Schritt der rein mathematische Teil, nämlich die Auflösung der Gleichungen. Wir haben also insgesamt die Gleichungen

$$\text{(I)} \qquad \sigma_1 f_1 + \sigma_2 f_2 + \sigma_3 f_3 = \sigma_4 f_4 + \sigma_5 f_5 + \sigma_6 f_6 \,,$$

$$\text{(II)} \qquad \sigma_1 f_1 \cdot y_1 + \sigma_2 f_2 \cdot y_2 + \sigma_3 f_3 \cdot y_3 + \sigma_4 f_4 \cdot y_4 + \sigma_5 f_5 \cdot y_5 + \sigma_6 f_6 \cdot y_6 = + A \cdot a - P_1 \cdot p_1 - P_2 \cdot p_2 \,,$$

$$\text{(III)} \qquad \sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3 : \sigma_4 : \sigma_5 : \sigma_6 = y_1 : y_2 : y_3 : y_4 : y_5 : y_6 \,.$$

Die Auflösung dieser Gleichungen kann nun folgendermaßen geschehen: Mit Hilfe der Gleichungen (III) drücken wir sämtliche Spannungen durch eine Spannung, z. B. durch σ_1, aus. Dann erhalten wir

Digitized by Google

$$\text{(III)}\quad \begin{cases} \text{aus } \sigma_2 : \sigma_1 = y_2 : y_1 \text{ die Spannung } \sigma_2 = \sigma_1 \cdot \dfrac{y_2}{y_1}, \\ \sigma_3 : \sigma_1 = y_3 : y_1 \quad ,, \quad ,, \quad \sigma_3 = \sigma_1 \cdot \dfrac{y_3}{y_1}, \\ \sigma_4 : \sigma_1 = y_4 : y_1 \quad ,, \quad ,, \quad \sigma_4 = \sigma_1 \cdot \dfrac{y_4}{y_1} \quad \text{usw.} \end{cases}$$

Diese Werte setzen wir in (I) und (II) ein und erhalten

$$\text{(I)}\quad \sigma_1 f_1 + \sigma_1 \cdot \frac{y_2}{y_1} f_2 + \sigma_1 \cdot \frac{y_3}{y_1} f_3 = \sigma_1 \cdot \frac{y_4}{y_1} f_4 + \sigma_1 \cdot \frac{y_5}{y_1} f_5 + \sigma_1 \cdot \frac{y_6}{y_1} f_6,$$

$$\text{(II)}\quad \sigma_1 f_1 \cdot y_1 + \sigma_1 \frac{y_2}{y_1} f_2 \cdot y_2 + \sigma_1 \frac{y_3}{y_1} f_3 \cdot y_3 + \sigma_1 \frac{y_4}{y_1} f_4 \cdot y_4 + \cdots = +A \cdot a - P_1 \cdot p_1 - P_2 \cdot p_2.$$

In der ersten Gleichung dividieren wir jedes Glied durch σ_1, und multiplizieren ferner jedes Glied mit y_1. In der zweiten Gleichung wollen wir $\frac{\sigma_1}{y_1}$ als Faktor herausziehen. Somit wird

$$\text{(I)}\quad f_1 \cdot y_1 + f_2 \cdot y_2 + f_3 \cdot y_3 = f_4 \cdot y_4 + f_5 \cdot y_5 + f_6 \cdot y_6,$$

$$\text{(II)}\quad \frac{\sigma_1}{y_1}(f_1 \cdot y_1^2 + f_2 \cdot y_2^2 + f_3 \cdot y_3^2 + f_4 \cdot y_4^2 + f_5 \cdot y_5^2 + f_6 \cdot y_6^2) = +A \cdot a - P_1 \cdot p_1 - P_2 \cdot p_2.$$

Dieses sind also unsere früheren Gleichungen (I) und (II), umgeformt durch Unterstützung der Hypothese (III).

4. Deutung der Resultate (I) und (II).

(I) Die erste Gleichung bestimmt die Lage der Nullinie (neutralen Faserschicht). Bisher hatten wir die Nullinie (Punkt N in Fig. 75d) nach Gutdünken eingezeichnet und dann von ihr aus die Abstände y gemessen. Jetzt haben wir aber in Gleichung (I) zur mathematischen Bestimmung der Lage der Nullinie folgende Aussage:

> Die Nullinie teilt die Querschnittsfläche so in zwei Teile, daß die Summe aus den Produkten: „Flächenstreifen × Abstand bis zur Nullinie" bei dem einen Teile ebenso groß ist wie bei dem anderen.

Durch diese Eigenschaft ist die Lage der Nullinie vollständig bestimmt: Wir nehmen zunächst eine Linie $n-n$ an, und sehen dann nach, ob die obige Bedingung erfüllt ist. Allerdings werden wir auf diese Weise etwas herumprobieren müssen, bevor wir die richtige Linie $n-n$ finden. Deshalb wird später — im 8. Vortrag — das Verfahren zur Bestimmung der Nullinie noch systematischer ausgebaut werden; im Prinzip ist aber durch die obige Bedingung die Lage der Nullinie vollständig bestimmt.

Digitized by Google

(II) ***Die zweite Gleichung ergibt die Größe der einzelnen Normalspannungen σ.*** Wir finden

$$\sigma_1 = \frac{(+A \cdot a - P_1 \cdot p_1 - P_2 \cdot p_2)}{(f_1 \cdot y_1^2 + f_2 \cdot y_2^2 + \ldots)} \cdot y_1$$

Ferner ergibt sich $\left(\text{da } \sigma_2 = \sigma_1 \cdot \frac{y_2}{y_1}\right)$

$$\sigma_2 = \frac{(+A \cdot a - P_1 \cdot p_1 - P_2 \cdot p_2)}{(f_1 \cdot y_1^2 + f_2 \cdot y_2^2 + \ldots)} \cdot y_2 \quad \text{usw.}$$

In Worten:

> Die Normalspannung σ in einem Flächenstreifen f ist gleich der Summe (bzw. Differenz) aus den Produkten:
>
> „Kraft × Abstand bis zur Nullinie"
>
> aller seitlich vom Querschnitte angreifenden äußeren Kräfte, dividiert durch die Summe aus den Produkten:
>
> „Flächenstreifen × Quadrat des Abstandes bis zur Nullinie"
>
> und multipliziert mit dem Abstande des betreffenden Flächenstreifens von der Nullinie.

[Zuerst muß man also aus Gleichung (I) die Lage der Nulllinie bestimmen, weil deren Abstände bis zu den einzelnen Streifen zur Berechnung der Spannungen σ gebraucht werden.]

Da der Summenausdruck

$$+A \cdot a - P_1 \cdot p_1 - P_2 \cdot p_2$$

für alle Spannungen σ des Querschnittes vorkommt, wollen wir ihn zur Abkürzung

„Momentensumme" oder „Biegungsmoment M"

für den Querschnitt ab nennen. Er entsteht also, indem man jede äußere Kraft mit ihrem Abstande bis zum Querschnitte multipliziert und dann die Summe (bzw. Differenz) dieser Produkte bildet.

Den Summenausdruck

$$f_1 \cdot y_1^2 + f_2 \cdot y_2^2 + f_3 \cdot y_3^2 + f_4 \cdot y_4^2 + \ldots$$

nennen wir das

„Trägheitsmoment J"

des Querschnittes. (Die Bezeichnung „Trägheitsmoment" kommt daher, weil dieselbe Summe bei vielen Aufgaben der Mechanik gebraucht wird, bei denen das sogenannte „Trägheitsprinzip" eine Rolle spielt.)

Digitized by Google

Mit diesen Abkürzungen ergibt sich also für die Spannung σ in einer Schicht f, die um y von der Nullinie entfernt ist, die Formel

$$\boxed{\sigma = \frac{M}{J} \cdot y.}$$

In Worten:

Für irgendeinen Flächenstreifen f eines Balkenquerschnittes ist die

$$\textit{Normalsp.}\ \sigma = \frac{\textit{Momentensumme f. d. Querschn.}}{\textit{Trägheitsmoment des Querschn.}} \times \textit{Abstand von f bis Nullinie.}$$

Liegt die betreffende Schicht *oberhalb* der Nullinie, so ist σ eine Druckspannung; liegt sie unterhalb, so ist σ eine Zugspannung. Hiermit sind die Normalspannungen vollständig bestimmt.

Zusammenfassung.

Die Bestimmungen der Normalspannungen σ geschah durch Anschreibung der Gleichgewichtsbedingungen unter Zuhilfenahme einer Hypothese. Die schließlich erhaltene Formel lautet:

$$\sigma = (M:J) \cdot y.$$

Um diese Formel zu verwenden, wird man also folgendermaßen vorgehen:

a) die Nullinie bestimmen (von der aus sind die Abstände y zu messen),

b) den Summenausdruck $J = f_1 \cdot y_1^2 + f_2 \cdot y_2^2 + \dots$ ausrechnen,

c) den Summenausdruck $M = +A \cdot a - P_1 \cdot p_1 - \dots$ ausrechnen.

Aus diesen Hilfswerten ist dann σ an jeder Stelle zu bestimmen.

§ 39.

Beispiel zu § 38.

An einem einfachen Beispiele — Balken mit rechteckigem Querschnitt — möge die Theorie zunächst in Buchstaben und dann auch in Zahlen durchgeführt werden.

I. Durchführung des Beispieles in Buchstaben.

a) Bestimmung der Lage der Nullinie.

Ohne weiteres Probieren sieht man, daß beim rechteckigen Querschnitt die Nullinie in der Höhe $h/2$ einzuzeichnen ist. Dann hat der oberste Flächenstreifen den gleichen Abstand y wie der unterste, der zweitoberste den gleichen Abstand wie der zweituntersten usw. Folglich ist auch die Summe der Produkte aus $f \cdot y$ bei der oberen Hälfte gleich der entsprechenden Summe bei der unteren Hälfte.

Digitized by Google

b) Bestimmung des „Trägheitsmomentes" J.

α) Angenähert.

Zunächst wollen wir die Querschnittsfläche nur in sechs Streifen zerlegen und sehen, welchen Wert wir für die Summe $f_1 \cdot y_1^2 + f_2 \cdot y_2^2 + \ldots$ erhalten werden. Um die Zahlenrechnung zu vereinfachen, nehmen wir die Höhen der einzelnen Streifen gleich groß; dann sind die Inhalte der einzelnen Flächenstreifen f_1, f_2, f_3 usw. einander gleich, nämlich

$$f = \frac{b\,h}{6}.$$

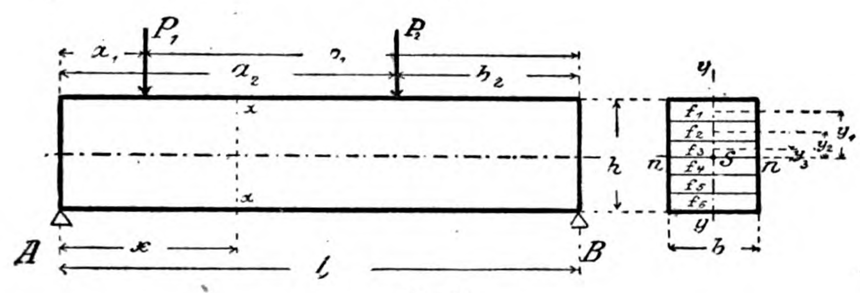


Fig. 77.

Die Ausrechnung von J können wir dadurch vereinfachen, daß wir die Summe $f \cdot y^2$ zunächst für eine Querschnittshälfte ausrechnen und dann mit 2 multiplizieren:

$$J = (f_1 \cdot y_1^2 + f_2 \cdot y_2^2 + f_3 \cdot y_3^2) \cdot 2$$
$$= f(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) \cdot 2.$$

Nun ist

$$y_3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{h}{6}, \qquad y_2 = \frac{3}{2} \cdot \frac{h}{6}, \qquad y_1 = \frac{5}{2} \cdot \frac{h}{6}.$$

Setzen wir diese Werte in die obige Gleichung ein, so erhalten wir

$$J = \frac{b\,h}{6} \cdot \left[\left(\frac{5}{2} \cdot \frac{h}{6}\right)^2 + \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{h}{6}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{h}{6}\right)^2\right] \cdot 2$$

$$= \frac{b\,h}{6} \cdot \left[\left(\frac{5}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{h}{6}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{h}{6}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{h}{6}\right)^2\right] \cdot 2$$

$$= \frac{b\,h}{6} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{h}{6}\right)^2 \cdot (5^2 + 3^2 + 1^2) \cdot 2$$

$$= \frac{b\,h \cdot h^2}{6 \cdot 4 \cdot 36} \cdot 2 \cdot (5^2 + 3^2 + 1^2)$$

$$= \frac{b\,h^3}{6 \cdot 2 \cdot 36} \cdot (5^2 + 3^2 + 1^2).$$

Digitized by Google

Der Ausdruck in der Klammer stellt die Summe der Quadrate der ungeraden Zahlen 1, 3 und 5 dar; er ergibt durch Ausrechnung der Werte die Zahl 35. Hiermit wird dann

$$J = \frac{b\,h^3 \cdot 35}{6 \cdot 2 \cdot 36}.$$

Wegen der folgenden Entwicklung wollen wir diesen Wert in der Form schreiben:

$$J = \frac{35}{36} \cdot \frac{b\,h^3}{12}.$$

Dieses ist also nicht der genaue Wert von J, den wir in die Formel

$$\sigma = \frac{M}{J} \cdot y$$

einzusetzen haben. Es sollte nur einmal diese Annäherungsrechnung durchgeführt werden, um zu zeigen, wie einfach sich der Summenausdruck J — wenigstens in der Annäherung — berechnen läßt.

β) Der genaue Wert von J für den rechteckigen Querschnitt.

Bei Berechnung des *genauen* Wertes von J müssen wir die Flächenstreifen f_1, f_2 usw. unendlich dünn nehmen, da ja auch die Spannung σ in jeder der unendlich dünnen Fasern eine andere ist. Eine solche Berechnung für unendlich viele, unendlich dünne Streifen geschieht folgendermaßen: Teilen wir den Querschnitt nicht in sechs, sondern in n Teile, so ist der Inhalt eines jeden der gleichgroßen Flächenstreifen

$$\text{(I)} \qquad f = \frac{b\,h}{n}.$$

Die Höhe eines jeden Streifens ist $\frac{h}{n}$. Der Abstand des Streifens, der zunächst der Nullinie liegt, ist dann

$$y = \frac{1}{2} \cdot \frac{h}{n};$$

der Abstand des folgenden Streifens ist

$$y = \frac{3}{2} \cdot \frac{h}{n},$$

des darauffolgenden

$$y = \frac{5}{2} \cdot \frac{h}{n} \quad \text{usw.}$$

Digitized by Google

Wir werden nun J wieder so berechnen, daß wir die Summe $f \cdot y^2$ nur für die obere Querschnittshälfte nehmen und dann mit 2 multiplizieren:

$$J = \frac{b\,h}{n}\left[\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{h}{n}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\cdot\frac{h}{n}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\cdot\frac{h}{n}\right)^2 + \left(\frac{7}{2}\cdot\frac{h}{n}\right)^2 + \ldots\right]\cdot 2\,.$$

Hierbei ist der Flächenstreifen, der zunächst der Nullinie liegt, zuerst aufgeführt, dann der folgende usw. Wir erhalten dann

$$J = \frac{b\,h}{n}\cdot\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{h}{n}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{h}{n}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{h}{n}\right)^2 + \left(\frac{7}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{h}{n}\right)^2 + \ldots\right]\cdot 2$$

$$= \frac{b\,h}{n}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{h}{n}\right)^2\cdot(1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + \ldots)\cdot 2$$

$$= \frac{b\,h\cdot h^2}{n\cdot 4\cdot n^2}\cdot 2\cdot(1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + \ldots)$$

$$\text{(II)}\qquad J = \frac{b\,h^3}{2\,n^3}\cdot(1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + \ldots)\,.$$

Der Ausdruck in der Klammer stellt wieder die Summe der Quadrate der ungeraden Zahlen dar. Die Anzahl der Glieder in der Klammer ist $\frac{n}{2}$, denn wir haben die Summe $f \cdot y^2$ nur über eine Querschnittshälfte genommen und dann mit 2 multipliziert; ebenso, wie wir vorhin bei sechs Flächenstreifen nur drei Glieder in der Klammer hatten.

Jetzt können wir J mit jeder gewünschten Genauigkeit berechnen, indem wir für n eine entsprechend hohe Zahl setzen. Wenn wir aber die Klammer in dieser Weise bestimmen wollten, indem wir also jedes einzelne Quadrat ausrechneten und hierauf die Summe bildeten, so würde es uns ähnlich gehen, wie dem Mathematiker *Ludolph* mit der Zahl π: Er hatte sein ganzes Leben damit zugebracht, um π mit genügender Genauigkeit nach den alten Methoden der Geometrie zu berechnen; dann entwickelte sich die Theorie der sogenannten unendlichen Reihen, und jetzt brauchen wir, um π genügend genau zu bestimmen, ebensoviel Stunden, wie er Jahre gebraucht hatte. Wenden wir diese Lehre auf unsere Aufgabe an, so werden wir die Faktoren der obigen Summe nicht einzeln ausrechnen, sondern sofort den gesamten Ausdruck bestimmen. Einen ähnlichen Fall haben wir ja auch schon in § 10, 5. Aufgabe, gehabt. Ebenso wie dort, benutzen wir zur Ausrechnung der Reihe die entsprechende Summenformel,

Digitized by Google

und zwar lautet die betreffende Formel für den jetzt vorliegenden Fall:

$$(1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + 9^2 + \ldots) = \frac{4}{3} \cdot x^3 - \frac{1}{3} \cdot x,$$

wenn x die Anzahl der in der Klammer enthaltenen Glieder bedeutet. Die Ableitung dieser Formel braucht an dieser Stelle wohl nicht durchgeführt zu werden; man überzeuge sich aber durch Probieren, daß die Gleichung richtig ist. In unserem Falle ist nun die Anzahl der in der Klammer enthaltenen Glieder gleich $\frac{n}{2}$. Wir erhalten somit den Wert der Klammer in Gleichung (II):

$$(1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + \ldots) = \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{n}{2}\right)^3 - \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{n}{2}\right).$$

Hiermit geht die Gleichung (II) über in:

$$J = \frac{b\,h^3}{2\,n^3}\left[\frac{4}{3} \cdot \left(\frac{n}{2}\right)^3 - \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{n}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{b\,h^3}{2\,n^3}\left(\frac{4 \cdot n^3}{3 \cdot 8} - \frac{n}{6}\right)$$

$$= \frac{b\,h^3}{2\,n^3} \cdot \frac{4}{24}(n^3 - n)$$

$$J = \frac{b\,h^3}{12\,n^3} \cdot (n^3 - n).$$

Wenn wir den Ausdruck auf der rechten Seite durch n^3 kürzen, so erhalten wir

$$\text{(III)} \qquad J = \frac{b\,h^3}{12}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right).$$

Im ersten Falle hatten wir den Querschnitt in sechs Streifen zerlegt. Setzen wir $n = 6$ in die obige Gleichung ein, so wird, übereinstimmend mit dem Früheren:

$$J = \frac{b\,h^3}{12}\left(1 - \frac{1}{36}\right) = \frac{b\,h^3}{12} \cdot \frac{35}{36}.$$

Wollen wir aber das genaue Resultat haben, so müssen wir n unendlich groß nehmen. In diesem Falle ist ferner $n^2 = \infty$, also

$$\frac{1}{n^2} = \frac{1}{\infty} = 0,$$

Digitized by Google

da eine endliche Zahl, dividiert durch eine unendlich große, Null ergibt. Aus der in obiger Gleichung enthaltenen Klammer wird also

$$1 - \frac{1}{n^2} = 1 - 0 = 1,$$

und wir erhalten für J den Wert

$$\text{(IV)} \qquad J = \frac{b\,h^3}{12}.$$

Hiermit ist die Summe aus den Produkten $f \cdot y^2$ beim Rechteck mit absoluter Genauigkeit bestimmt.

Die obige Gleichung (III) ist auch insofern interessant, als das Glied $\frac{1}{n^2}$ immer den Fehler angibt, der dann entsteht, wenn man statt $n = \infty$ für n eine endliche Zahl nimmt. Man sieht, daß für $n = 10$ der Fehler nur noch 1% ist. Daran kann man denken, wenn man bei unregelmäßigen Querschnitten, bei denen sich für J keine Formeln aufstellen lassen, die Zerlegung in eine bestimmte Anzahl von Streifen vornimmt. Es genügt dann immer schon eine ziemlich geringe Zahl, um genügende Genauigkeit zu erzielen.

c) Bestimmung der Momentensumme M.

Das Biegungsmoment ist die Summe (bzw. Differenz) aus den Produkten:

Kraft × Abstand bis zur Nullinie des Querschnittes.

In diesem Falle wirken auf den Balkenteil links vom Schnitte die beiden Kräfte A und P_1. Den Auflagerdruck A müssen wir zunächst noch bestimmen:

$$A = \frac{P_1 \cdot b_1 + P_2 \cdot b_2}{l}.$$

Die Abstände der Kräfte bis zum Querschnitte α—α sind:

$$x; \quad \text{bzw.} \quad (x - a_1).$$

Also ergibt sich das Biegungsmoment

$$M = + A \cdot x - P_1 (x - a_1).$$

Somit haben wir für diese Aufgabe für sämtliche erforderlichen Werte die Formeln aufgestellt und können zur zahlenmäßigen Durchrechnung übergehen.

Digitized by Google

II. Zahlenbeispiel.

Es sei nun für Fig. 77:

$$l = 500 \text{ cm.}$$

$$P_1 = 1000 \text{ kg}; \quad a_1 = 100 \text{ cm}; \quad b_1 = 400 \text{ cm},$$

$$P_2 = 1500 \text{ kg}; \quad a_2 = 300 \text{ cm}; \quad b_2 = 200 \text{ cm},$$

$$h = 28 \text{ cm}; \quad b = 22 \text{ cm},$$

$$x = 250 \text{ cm}; \quad x - a_1 = 250 - 100 = 150 \text{ cm.}$$

Wie groß sind die Normalspannungen im Schnitte $\alpha - \alpha$*?* (Man zeichne den Balken mit diesen Maßen auf!)

a) Die Lage der Nullinie.

Wir haben gesehen, daß beim rechteckigen Querschnitt die Nullinie in halber Balkenhöhe liegen muß. Bezeichnen wir den Abstand der Nullinie bis zur Oberkante des Querschnittes mit e_1 und bis zur Unterkante mit e_2, so ist also in dieser Aufgabe:

$$e_1 = 14{,}0 \text{ cm}; \quad e_2 = 14{,}0 \text{ cm.}$$

b) Das Trägheitsmoment J.

Für den rechteckigen Querschnitt ergab sich für den Summenausdruck $f_1 \cdot y_1^2 + f_2 \cdot y_2^2 + \ldots$ der Wert

$$J = \frac{1}{12} b h^3.$$

Für diese Aufgabe wird also

$$J = \frac{1}{12} \cdot 22{,}0 \text{ cm } (28{,}0 \text{ cm})^3$$

$$= \frac{1}{12} \cdot 22{,}0 \text{ cm} \cdot 21952 \text{ cm}^3$$

$$= 40245 \text{ cm}^4.$$

c) Die Momentensumme M.

Zunächst berechnen wir

$$A = \frac{1000 \cdot 400 + 1500 \cdot 200}{500}$$

$$= 1400 \text{ kg.}$$

Hierauf

$$M = 1400 \text{ kg} \cdot 250 \text{ cm} - 1000 \text{ kg} \cdot 150 \text{ cm}$$

$$= 350000 \text{ kg} \cdot \text{cm} - 150000 \text{ kg} \cdot \text{cm}$$

$$= 200000 \text{ kg} \cdot \text{cm.}$$

Digitized by Google

Aus diesen Angaben finden wir nun für irgendeine Schicht, die y cm von der Nullinie entfernt ist, die Normalspannung

$$\sigma = \mp \frac{M}{J} \cdot y$$

$$= \mp \frac{200000 \text{ kgcm}}{40245 \text{ cm}^4} \cdot y$$

$$\sigma = \mp 4{,}97 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^3} \cdot y \,.$$

(Das Minuszeichen gilt für die Schichten *oberhalb*, das Pluszeichen für die Schichten *unterhalb* der Nullinie.)

Die größten Spannungen entstehen da, wo y am größten ist; also in der obersten und in der untersten Faser. Für diese ist

$$y = 14{,}0 \text{ cm.}$$

Setzt man diesen Wert in die obige Formel ein, so erhält man

$$\sigma = \mp 4{,}97 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^3} \cdot 14{,}0 \text{ cm}$$

$$= \mp 70 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^3} \cdot \text{cm}, \qquad \sigma = \mp 70 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} \,.$$

Für eine Faserschicht, die z. B. 7,0 cm über der Nullinie des Balkens liegt, würde sich ergeben

$$\sigma = -4{,}97 \cdot 7{,}0 = -35 \text{ kg/qcm} \quad \text{usw.}$$

Hiermit ist die Aufgabe auch zahlenmäßig durchgeführt.

III. Die „Dimensionen" von M und J.

In der vorigen Rechnung haben wir zu jeder Größe gleich die Bezeichnung hinzugeschrieben, und zwar sowohl bei den ursprünglich gegebenen Größen (Lasten und Abmessungen des Balkens), als auch bei den im Laufe der Rechnung neu aufgestellten Größen. Hierzu ist folgendes zu bemerken:

Die **Momentensumme (Biegungsmoment)** M ist entstanden durch Multiplikation einer Kraft mal einer Länge. War die erstere in kg und die letztere in cm gemessen, so werden wir also dem Moment den Zusatz **kg · cm** (oder **cm · kg**) geben.

Das **Trägheitsmoment** J ist (in seiner ursprünglichen Form) entstanden aus den Multiplikationen von Flächen mal Längen im Quadrat; also aus $\text{cm}^2 \cdot \text{cm}^2$. Wir werden deshalb dem Trägheits-

Digitized by Google

moment den Zusatz cm⁴ geben. In dieser „Dimension“ muß es sich natürlich auch aus den verschiedenen Formeln ergeben, die wir für die einzelnen Querschnittsformen zur schnelleren Berechnung von J aufstellen werden. (Für das Rechteck haben wir bereits die betreffende Formel abgeleitet.)

Man darf aber auch nicht versuchen, in diese „Dimensionen“ der einzelnen Größen mehr Bedeutung hineinzulegen, als in ihnen in Wirklichkeit enthalten ist. Wenn wir sagen, J bekommt die „Dimension“ cm^4, so heißt das: in einer Rechnung, in der die Längen in cm angegeben sind, müssen wir zur Berechnung von J auch die Abmessungen (Höhen und Breiten) des Querschnittes in cm, und nicht in einem anderen Maßstabe, einführen. Wenn man für eine solche Berechnung J aus einer Tabelle entnimmt, in der alles z. B. in dm gerechnet ist, und diesen Wert ohne Umrechnung in die Zahlenrechnung einführt, so macht man einen ähnlichen Fehler, als wenn man ohne weitere Bemerkung in einer Zeichnung die Längen der einzelnen Konstruktionsteile z. B. im Maßstabe 1:10 und die Breiten derselben 1:1 darstellt. Nur, wenn überhaupt kein Zweifel vorhanden ist, daß bei der betreffenden Berechnung alle Kräfte z. B. in kg und alle Abmessungen in cm gemessen werden, kann man sich die Bezeichnungen sparen. Dann weiß man ja auch ohne diese, daß die Spannungen schließlich in kg pro qcm herauskommen müssen. Dieses ist so ähnlich, wie man in einer Zeichnung die Angabe des Maßstabes fortlassen kann, wenn ein für allemal festgesetzt ist, daß diese Art von Zeichnungen nur in einem ganz bestimmten Maßstabe ausgeführt wird.

§ 40.

Graphische Darstellung des Biegungsgesetzes.

I. Graphische Darstellung der Spannungen σ.

Bei der Aufstellung der Biegungsgleichung mußten wir eine Annahme zu Hilfe nehmen, weil wir sonst die unendlich vielen Unbekannten σ gar nicht hätten ausrechnen können. Diese Annahme — die sogenannte *Navier*sche Hypothese — lautete: „Die Spannungen σ mögen sich verhalten wie ihre Abstände von der neutralen Faserschicht.“ Es ist nun recht zweckmäßig, zu sehen, welches Bild die Spannungen ergeben, wenn man sie dieser Annahme gemäß aufträgt.

Digitized by Google

In Fig. 78a ist der Balkenteil *I* von Fig. 75 noch einmal gezeichnet. Die Flächenstreifen $f_1 \dots$ sind ebenfalls (in Seitenansicht) eingetragen. Ferner ist zu jedem Flächenstreifen seine Normalspannung σ gezeichnet, und zwar sind wegen des Folgenden die Zugspannungen nach links über die Linie ab hinweg verschoben aufgetragen. Außerdem ist der Punkt N, in dem die Nullinie

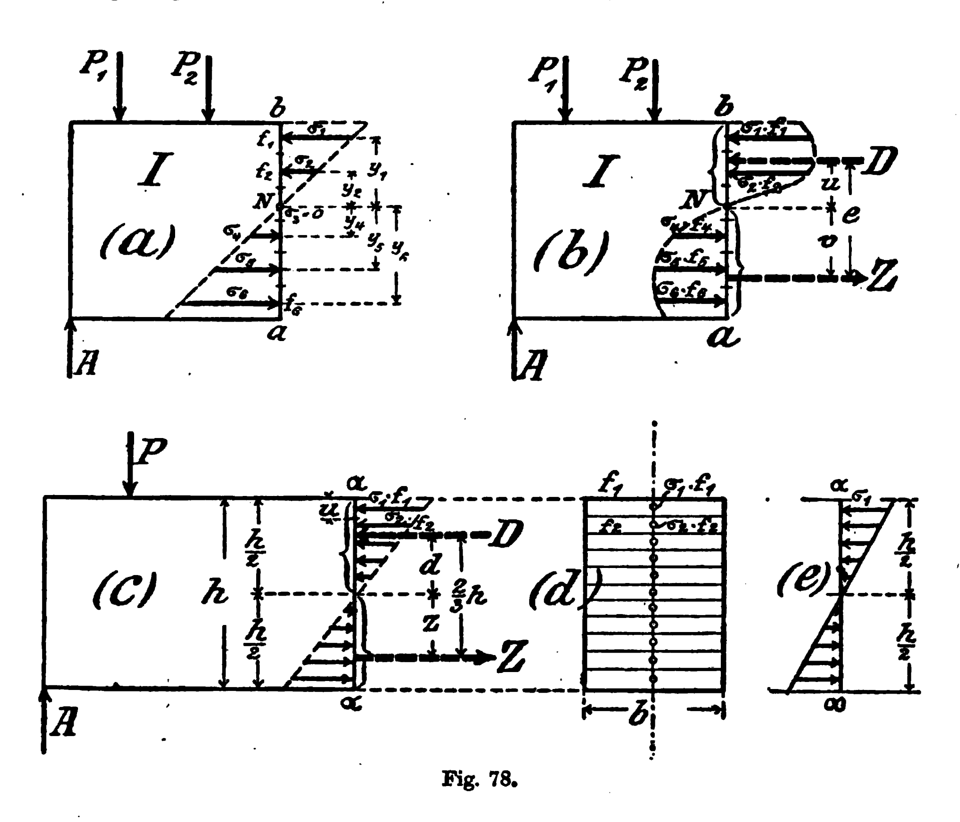


Fig. 78.

in der Seitenansicht erscheint, angegeben, und schließlich sind die Abstände y von den Spannungen bzw. Fasern bis zur Nullinie eingezeichnet.

Man sieht dann direkt aus der Figur, daß die Naviersche Annahme

$$\sigma_1 : \sigma_2 : \dots = y_1 : y_2 : \dots$$

sich auch so aussprechen läßt: Stellt man die Spannungen σ graphisch dar, so liegen die Endpunkte dieser Strecken sämtlich auf einer geraden Linie, die durch den Punkt N geht. Auf diese Weise prägt sie sich leicht dem Gedächtnis ein. Sobald man an

Digitized by Google

die Figur denkt, hat man auch sofort die Beziehungen zwischen den einzelnen Spannungen im Kopfe, z. B.

$$\sigma_1 : \sigma_2 = y_1 : y_2$$

oder

$$\sigma_6 : \sigma_1 = y_6 : y_1 \quad \text{usw.}$$

Wegen dieser Darstellung spricht man auch häufig von der „*geradlinigen*“ oder „*linearen*“ Spannungsverteilung. Es ist dieses also nur eine andere Bezeichnung für die *Navier*sche Spannungsannahme.

II. Graphische Darstellung der Normalkräfte $\sigma \cdot f$.

1. Bisher hat es sich um die Spannungen, d. h. die auf ein qcm bezogenen Kräfte, gehandelt. Um die gesamten in den einzelnen Fasern auftretenden Normalkräfte zu erhalten, müssen wir jede Spannung mit dem Inhalte des betreffenden Flächenstreifens multiplizieren. Also ergeben sich für die verschiedenen Fasern die Normalkräfte

$$\sigma_1 \cdot f_1 , \quad \sigma_2 \cdot f_2 \quad \text{usw.}$$

Die Höhen der einzelnen Streifen sind sämtlich unendlich klein zu nehmen. Die Breiten der Streifen sind aber, je nach der Querschnittsform, voneinander verschieden. Deshalb sind auch die Flächeninhalte f_1, f_2 verschieden groß. Wenn wir also die Spannungen σ_1, σ_2 usw. mit ihren Flächenstreifen f_1, f_2 usw. multiplizieren, so werden die hierdurch berechneten Normalkräfte $\sigma_1 \cdot f_1$, $\sigma_2 \cdot f_2$ usw. bei der graphischen Darstellung nicht mehr eine gerade Linie ergeben (Fig. 78 b). Ihre Endpunkte werden vielmehr, je nach der Größe der Flächen f_1, f_2 usw., auf einer Kurve liegen. (Ist z. B. f_2 bedeutend größer als f_1, so kann $\sigma_2 \cdot f_2$ größer werden als $\sigma_1 \cdot f_1$.) Dieses muß man sich vor Augen halten, um über die Größe der inneren Kräfte bei den verschiedenen Querschnittsformen Klarheit zu haben.

Denken wir uns nun die oberhalb der Nullinie wirkenden Normalkräfte (Druckkräfte) zu einer Resultierenden D und die unterhalb der Nullinie vorhandenen Normalkräfte (Zugkräfte) zu einer Resultierenden Z zusammengesetzt. Die erste Gleichgewichtsbedingungung („Summe der nach links zeigenden Projektionen gleich Summe der nach rechts zeigenden Projektionen“) ergibt dann die Gleichung:

$$D = Z .$$

Digitized by Google

In Worten: Die in einem Querschnitte auftretenden Normalkräfte ergeben bei ihrer Zusammensetzung zwei gleich große, aber entgegengesetzt gerichtete Kräfte D und Z. *Die Normalkräfte eines Querschnittes bilden also ein Kräftepaar* (§ 11).

Da die Kräfte D und Z die Resultierenden der Normalkräfte $\sigma_1 \cdot f_1$ usw. sind, ergeben sie für den Punkt N dieselbe Summe der statischen Momente, wie sämtliche Normalkräfte zusammen. Es ist also in Fig. 78b

$$D \cdot u + Z \cdot v = \sigma_1 f_1 \cdot y_1 + \sigma_2 f_2 \cdot y_2 + \ldots$$

(Die bekannten Bezeichnungen f_1, y_1 usw. sind in Fig. 78b fortgelassen.) Die auf der rechten Seite dieser Gleichung stehende Summe ist aber gleich der Momentensumme (Biegungsmoment) der äußeren Kräfte in bezug auf den Querschnitt ab:

$$\sigma_1 f_1 \cdot y_1 + \sigma_2 f_2 \cdot y_2 + \ldots = M\,.$$

Und für die linke Seite können wir nach § 11, II schreiben:

$$D \cdot u + Z \cdot v = D \cdot e\,,$$

oder auch

$$D \cdot u + Z \cdot v = Z \cdot e\,,$$

worin $D \cdot e$ oder $Z \cdot e$ nach § 11, II das „*Moment des Kräftepaares* D, Z" genannt wird. Insgesamt haben wir also nach Fig. 78b folgendes Resultat:

Bei Zusammenfassung sämtlicher auf einen Querschnitt wirkenden Normalkräfte $\sigma \cdot f$ ergibt sich ein Kräftepaar D, Z. Das Moment $D \cdot e$ bzw. $Z \cdot e$ dieses Kräftepaares ist gleich der Momentensumme M der äußeren Kräfte in bezug auf den Querschnitt.

Diese Aussage läßt sich ja übrigens auch direkt aus den Gleichgewichtsbedingungen des Teiles I ableiten. Viel gewonnen ist durch diese Zusammenfassung der inneren Kräfte zu dem Kräftepaar D, Z nicht, da wir dieses ja immer erst aus den Kräften $\sigma \cdot f$ bestimmen müssen. Man bekommt aber durch Fig. 78b ein Bild, bis auf welche einfachste Form sich die Normalkräfte $\sigma \cdot f$ schließlich zurückführen lassen.

2. Nur in einem Falle ergibt die Darstellung der Kräfte $\sigma_1 f_1$, $\sigma_2 f_2$ usw. ebenfalls eine gerade Linie; nämlich beim rechteckigen Querschnitt.

Beim Rechteck haben alle Fasern die gleiche Breite und folglich auch den gleichen Flächeninhalt. Es ist also

$$f_1 = f_2 = \ldots$$

Digitized by Google

Deshalb verhalten sich auch die Produkte $\sigma_1 \cdot f_1$, $\sigma_2 \cdot f_2$ usw. zueinander ebenso wie die Spannungen σ_1, σ_2 usw. selber; sie ergeben also bei der graphischen Darstellung ebenfalls eine gerade Linie (Fig. 78c). Da beim rechteckigen Querschnitte die Nulllinie in halber Höhe liegt (Fig. 77), so ist bei ihm die größte Druckspannung (in der obersten Faser) gleich der größten Zugspannung (in der untersten Faser). Die inneren Kräfte $\sigma \cdot f$ ergeben also bei der graphischen Darstellung zwei verschränkt zueinander liegende kongruente Dreiecke.

Für den rechteckigen Querschnitt wollen wir auch noch das innere Kräftepaar D, Z, auf das sich — wie wir vorhin gesehen haben — bei jedem Querschnitt die Kräfte $\sigma \cdot f$ schließlich zurückführen lassen, bestimmen. In § 10 (5. Aufgabe, am Schluß) hatten wir zur Ermittlung der Resultierenden R einer dreieckförmig verteilten Kräftegruppe die Formel abgeleitet:

$$R = \frac{1}{2} \frac{P_1}{u} \cdot y .$$

Hierin war P_1 die erste Last, u der Abstand der Lasten voneinander und y die Belastungslänge. Nach dieser Formel ergibt sich für die Kraft D in Fig. 78c:

$$D = \frac{1}{2} \frac{\sigma_1 f_1}{u} \cdot \frac{h}{2} .$$

Die Breite des Querschnittes sei b; also ist

$$f_1 = b \cdot u .$$

Hiermit ergibt sich

$$D = \frac{1}{2} \frac{\sigma_1 \cdot b \cdot u}{u} \cdot \frac{h}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \sigma_1 \cdot \frac{h}{2} \cdot b .$$

Denselben Wert bekommen wir für die Resultierende Z der Zugkräfte.

Die Lagen der Kräfte D und Z sind nach § 10 (5. Aufgabe) dadurch bestimmt, daß

$$d = \frac{2}{3} \frac{h}{2} = \frac{1}{3} h$$

und ebenso

$$z = \frac{1}{3} h$$

ist. Der Gesamtabstand zwischen D und Z ist also $\frac{2}{3} h$.

Digitized by Google

Diese für den rechteckigen Querschnitt gefundenen Resultate prägen sich folgendermaßen leicht dem Gedächtnis ein: Trägt man die Spannungen σ_1 der äußersten (obersten und untersten) Fasern auf, so sind die Kräfte D und Z dargestellt durch den Inhalt

$$F = \frac{1}{2}\sigma_1 \cdot \frac{h}{2}$$

eines „*Spannungsdreiecks*" (Fig. 78e) multipliziert mit der Breite b des Querschnittes.

§ 41.

Die Berechnung der Schubspannungen τ.

I. Die „Kraftsumme" Q des Querschnittes.

Bisher haben wir uns nur um die Normalspannungen σ der einzelnen Balkenfasern gekümmert und zu deren Berechnung die Biegungsformel $\sigma = \frac{M}{J} \cdot y$ aufgestellt. Außer den Normalspannungen wirken aber noch die in der Querschnittsebene liegenden Schubspannungen τ. Mit deren Berechnung wollen wir uns jetzt beschäftigen.

Von den drei Gleichgewichtsbedingungen, die in § 38 den Ausgangspunkt der Spannungsberechnung bildeten, enthalten die erste und die dritte nur die Normalspannungen σ und sind deshalb auch zu deren Ermittlung bereits benutzt worden. Die Schubspannungen kommen in diesen beiden Gleichungen gar nicht vor. Es bleibt also zur Berechnung der Schubspannungen τ nur die zweite Gleichung übrig, nämlich:

$$A = P_1 + P_2 + T \quad \text{(Fig. 75d und 76c).}$$

Hierin bedeutet T die Resultierende der in der Querschnittsfläche ab enthaltenen Schubkräfte; A, P_1 und P_2 sind die am Teile I angreifenden äußeren Kräfte. Wir schreiben die Gleichung zunächst so, daß die unbekannte Größe allein auf einer Seite steht:

$$T = A - P_1 - P_2 .$$

Auf der rechten Seite steht die Summe der seitlich vom Schnitte befindlichen äußeren Kräfte, wobei die entgegengesetzte Richtung von A und P_1, P_2 durch verschiedene Vorzeichen zum Ausdruck gebracht ist. Wir wollen diese Summe die

„Kraftsumme" oder „Querkraft" Q

Digitized by Google

für den Schnitt ab nennen. Hiermit lautet die Formel zur Berechnung der Schubkraft:

$$(I) \qquad T = Q .$$

In Worten: *Die Resultierende aller Schubkräfte in einem Schnitte ab ist gleich der Kraftsumme (Querkraft) für diesen Schnitt.*

II. Die Anordnung der Schubspannungen bei den verschiedenen Querschnittsformen.

Durch diese Formel ist nun die Resultierende aller Schubkräfte bestimmt. Es bleibt aber noch anzugeben, wie sich die Schubkräfte auf die einzelnen Flächenelemente (Fig. 76) des Querschnittes verteilen. Wir sollen jetzt also für jedes Flächenelement die Größe der betreffenden Schubspannung τ und außerdem deren Richtung, oder — was auf dasselbe hinauskommt — die beiden Seitenkräfte τ_s und τ_w von τ bestimmen. Leider endet hier unsere Weisheit. Daß aus der obigen Formel (I) sich bereits alle Schubspannungen im einzelnen ausrechnen lassen sollen, ist natürlich nicht zu verlangen. Denn auch bei den Normalspannungen σ mußten wir ja zu den Gleichgewichtsbedingungen noch eine Annahme (die *Navier*sche Hypothese) zu Hilfe nehmen, um die nötige Anzahl von Gleichungen zu erhalten. Der Unterschied besteht aber darin, daß die *Navier*sche Hypothese recht gut mit der Wirklichkeit übereinstimmt, während die zur Berechnung der Schubspannungen üblichen Annahmen dieses leider nicht tun.

An dieser Stelle wollen wir nicht weiter auf die Sache eingehen. Es möge jetzt genügen, für einige Fälle die aus derartigen Berechnungen sich ergebenden Resultate zusammenzustellen. (Es wird sich nämlich herausstellen, daß die Wirkung der Schubspannungen gegenüber der Wirkung der Normalspannungen im allgemeinen vernachlässigt werden darf.)

Diese Resultate sind nun folgende:

a) Für den rechteckigen Querschnitt (Fig. 79a und b). Die Schubspannungen laufen sämtlich parallel der y-Achse (die Komponenten τ_w sind also gleich Null). Die größte Schubspannung tritt in der mittleren Faserschicht auf, und zwar ist bei einer Querkraft Q und einer Querschnittsfläche $F = bh$ diese maximale Schubspannung:

$$\tau_{max} = \frac{3}{2} \frac{Q}{F} .$$

Digitized by Google

Die kleinste Schubspannung tritt in der obersten und in der untersten Schicht auf, und zwar ist sie direkt gleich Null.

Für eine dazwischenliegende Schicht mit dem Abstande y von der mittelsten Schicht dient zur Berechnung der Schubspannung die Formel

$$\tau = \frac{3}{2}\,\frac{Q}{F}\left[1 - \left(\frac{2\,y}{h}\right)^2\right]$$
$$= \tau_{\max}\left[1 - \left(\frac{2\,y}{h}\right)^2\right].$$

Um die Verteilung der Schubspannungen anschaulich zur Darstellung zu bringen, wollen wir sie rechtwinklig zu den einzelnen

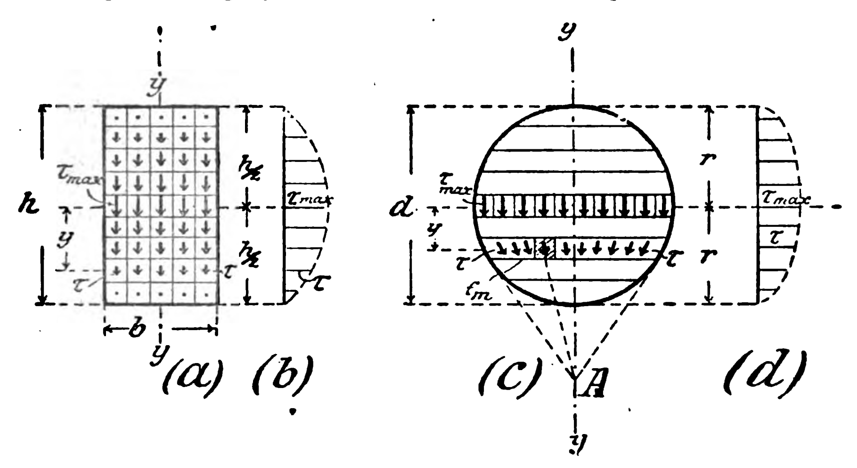


Fig. 79.

Flächenstreifen aufgetragen denken (Fig. 79b). Dann ergibt sich, daß die Endpunkte der τ auf einer Kurve, nämlich einer Parabel, liegen.

Für die Praxis ist aus dem Obigen besonders zweierlei zu merken:

1. Die Schubkraft T verteilt sich also nicht gleichmäßig auf die einzelnen Flächenstreifen (denn dann wäre ja für alle von diesen die Schubspannung $\tau = \frac{Q}{F}$), sondern die größte Schubspannung ist um 50% größer als bei gleichmäßiger Verteilung.

2. Die Schubspannung in den äußersten Fasern (also gerade da, wo die *größten* Normalspannungen auftreten) ist gleich Null.

b) Für den Kreisquerschnitt (Fig. 79c und d). Nur in der mittelsten Faserschicht laufen die Schubspannungen parallel der

Digitized by Google

y-Achse, und zwar sind dieses die größten Schubspannungen, die überhaupt in der Querschnittsfläche vorkommen. Die Formel zu ihrer Berechnung lautet

$$\tau_{max} = \frac{4}{3} \frac{Q}{F}.$$

(Q = Kraftsumme für den betreffenden Schnitt; $F = \frac{d^2\pi}{4}$ = Inhalt der Querschnittsfläche.)

Für jeden anderen Flächenstreifen sind die Schubspannungen schräg gegen die y-Achse gerichtet. Man findet diese Richtung z. B. für den Flächenstreifen f_m, indem man an dieser Stelle an den Kreisumfang die Tangenten legt und hierdurch den Punkt A bestimmt. Dann laufen sämtliche Schubspannungen der einzelnen Elemente (d. h. der kleinen Quadrate) des Flächenstreifens durch diesen Punkt. Die Größe der Schubspannungen in den einzelnen Elementen ein und desselben Streifens ist voneinander verschieden; und zwar hat dasjenige Element des Streifens, das am Kreisumfange liegt, die größte Schubspannung von allen Elementen dieses Streifens. Die betreffende Formel lautet

$$\tau = \frac{4}{3} \frac{Q}{F} \sqrt{1 - \left(\frac{y}{r}\right)^2}.$$

Trägt man die Schubspannungen von einer Geraden aus als Strecken auf, so liegen deren Endpunkte auf einer Ellipse (Fig. 79d).

Zu merken:

1. Die größte Schubspannung ist um $^1/_3 = 33^1/_3$% größer als die Schubspannungen, die bei gleichmäßiger Verteilung entstehen würden.

2. In der obersten und der untersten Faser (also da, wo die *größten* Spannungen σ auftreten) sind auch bei diesem Querschnitt die Schubspannungen gleich Null.

c) Für einen beliebigen Querschnitt. Auch für irgendeinen anderen Querschnitt ergibt sich bei den betreffenden Untersuchungen — auf Grund mehr oder minder unzutreffender Annahmen — eine ähnliche Verteilung der Schubspannungen: In den mittleren Flächenstreifen sind die Schubspannungen am größten, und in den äußersten Fasern sind sie gleich Null.

III. Schlußfolgerung.

Bei einem auf Biegung beanspruchten Stabe findet erfahrungsgemäß die Zerstörung entweder in der untersten Faser (durch Einreißen) oder in der obersten Faser (durch Zerquetschen) statt.

Digitized by Google

Gerade in diesen beiden Faserschichten sind aber die Schubspannungen gleich Null! Daraus folgt mit großer Wahrscheinlichkeit, daß die Schubspannungen nur geringen Einfluß auf die Festigkeit eines gebogenen Stabes haben werden. Entscheidend für dessen Festigkeit sind vor allen Dingen die Normalspannungen σ, während die Schubspannungen τ im allgemeinen vernachlässigt werden können.

Dieses ist der Grund, weshalb in Brückenberechnungen usw. fast niemals von den τ die Rede ist. (Ausnahme: s. „Eisenbeton").

§ 42.

Darstellung der Theorie an einem Biegungsversuch.

Bei den bisherigen Untersuchungen der Biegungsfestigkeit sind wir — von einer allgemeinen Betrachtung der Formänderungen und der zu erwartenden Spannungen ausgehend — durch Anwendung der Gleichgewichtsbedingungen und Hinzuziehung von Annahmen und verschiedenen mathematischen Umformungen glücklich zur Bestimmung der inneren Kräfte gelangt. Den naheliegendsten Weg zur Ermittlung dieser Kräfte haben wir aber in echt deutscher Umständlichkeit bisher noch gar nicht beschritten. Dieses wollen wir jetzt nachholen.

Nämlich: Wir wollen die inneren Kräfte kennen lernen, die in einer Querschnittsfläche ab eines Balkens wirken. Nun gut, schneiden wir doch den Balken einfach an dieser Stelle durch und sehen dann mit eigenen Augen nach, was in dieser Querschnittsfläche eigentlich vorgeht!

In Fig. 80a haben wir einen Balken mit rechteckigem Querschnitt auf zwei Stützen A und B. Um auch noch etwas Neues hinzuzulernen, ist der Balken über den einen Stützpunkt hinaus verlängert. Auf diese Weise entsteht ein sogenannter „*überkragender Balken*". Die Stützweite des Balkens ist

$$l = 30{,}0 \text{ cm},$$

die gesamte Länge

$$L = 36{,}0 \text{ cm}.$$

Die Belastung besteht aus den Kräften P_1, P_2 und P_3. Außerdem müssen wir in diesem Falle aber auch das Eigengewicht G des Balkens berücksichtigen, da die anderen Lasten so klein sind, daß es ihnen gegenüber wohl in Betracht kommt. Es wurde durch

Digitized by Google

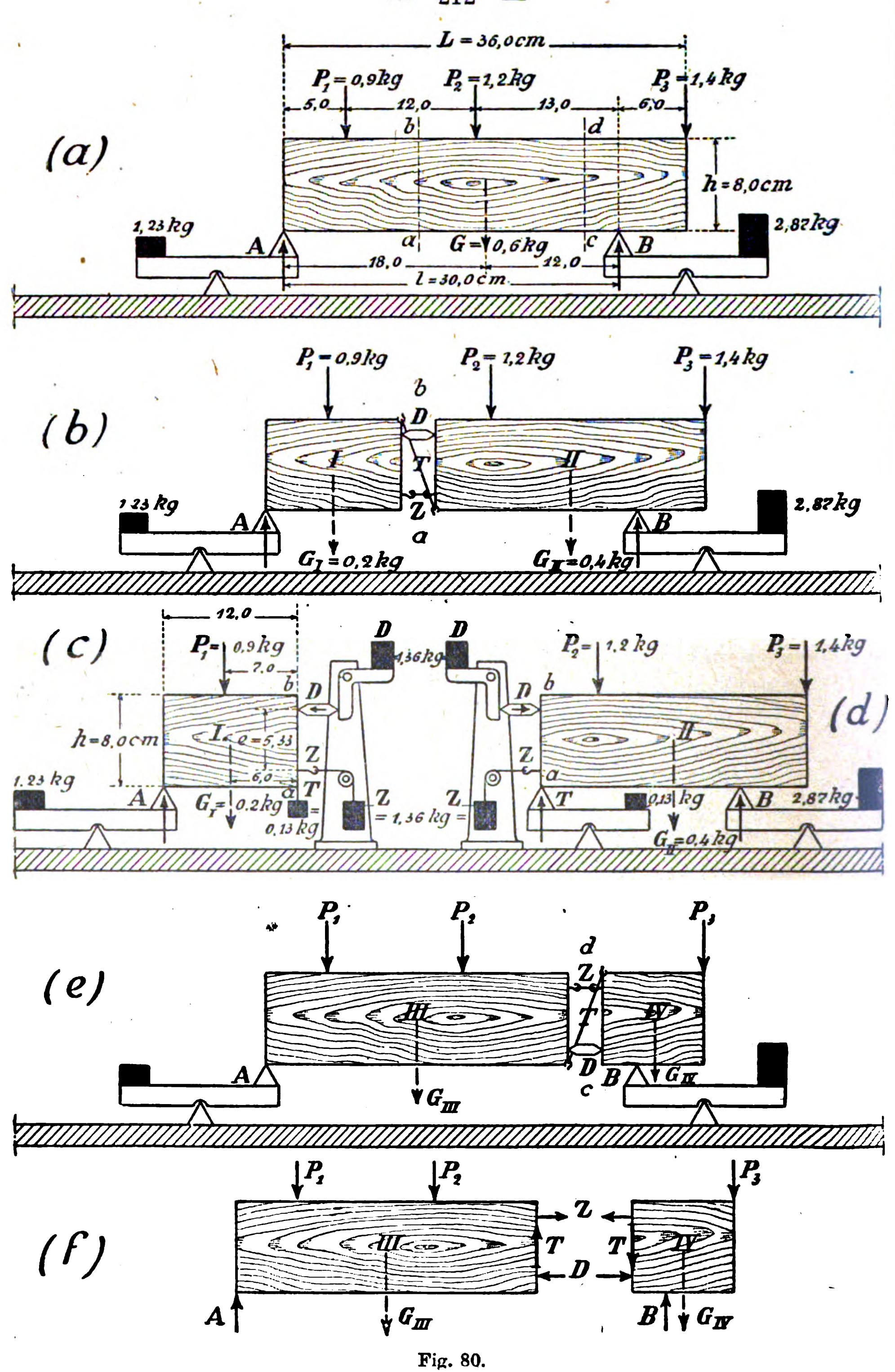


Fig. 80.

Digitized by Google

Wägung zu 0,6 kg bestimmt. Insgesamt haben wir also folgende Belastungen des Balkens:

$P_1 = 0{,}9$ kg; $P_2 = 1{,}2$ kg; $P_3 = 1{,}4$ kg; $G = 0{,}6$ kg.

Diese Belastungen und überhaupt die ganze Versuchsanordnung sind so gewählt, daß jeder Leser den Versuch selber durchführen kann. Hierzu die Anregung zu geben, ist der Hauptzweck dieser Zeilen. Wer einen solchen Versuch *selber* ausführt, wird erstaunt sein, wie einfach und beinahe selbstverständlich ihm vieles erscheint, was einem anderen erhebliches Kopfzerbrechen verursacht. Diese Bemerkung gilt namentlich auch für die später vorzutragenden Untersuchungen.

I. Nachprüfung der Auflagerkräfte.

Zunächst berechnen wir die Auflagerkräfte A und B (s. Abschnitt II, insbesondere § 16). Um A zu bestimmen, stellen wir die Gleichgewichtsbedingung: „Summe der rechtsherum zeigenden Momente gleich Summe der linksherum zeigenden Momente", und zwar von *sämtlichen* an dem Balken angreifenden Kräften, auf. Als Bezugspunkt nehmen wir zweckmäßig Punkt B. Das Eigengewicht ist in Wirklichkeit eine über die Balkenlänge $L = 36{,}0$ cm gleichmäßig verteilte Last. Beim Aufstellen der Momente können wir aber diese unendlich vielen kleinen Kräfte, die zusammen das Gewicht des Balkens bilden, ersetzen durch ihre Resultierende G, die in halber Balkenlänge L einzuzeichnen ist. Somit haben wir zur Bestimmung von A die Gleichung

$$A \cdot 30{,}0 + P_3 \cdot 6{,}0 = P_1 \cdot 25{,}0 + P_2 \cdot 13{,}0 + G \cdot 12{,}0$$

$$A \cdot 30{,}0 = P_1 \cdot 25{,}0 + P_2 \cdot 13{,}0 + G \cdot 12{,}0 - P_3 \cdot 6{,}0$$

$$A = \frac{1}{30{,}0}(0{,}9 \cdot 25{,}0 + 1{,}2 \cdot 13{,}0 + 0{,}6 \cdot 12{,}0 - 1{,}4 \cdot 6{,}0)$$

$$= \frac{1}{30{,}0} \cdot 36{,}9$$

$$A = 1{,}23 \text{ kg.}$$

Entsprechend wird B:

$$B \cdot 30{,}0 = P_1 \cdot 5{,}0 + P_2 \cdot 17{,}0 + G \cdot 18{,}0 + P_3 \cdot 36{,}0$$

$$B = \frac{1}{30{,}0}(0{,}9 \cdot 5{,}0 + 1{,}2 \cdot 17{,}0 + 0{,}6 \cdot 18{,}0 + 1{,}4 \cdot 36{,}0)$$

$$= \frac{1}{30{,}0} \cdot 86{,}1$$

$$B = 2{,}87 \text{ kg.}$$

Digitized by Google

Um diese Werte kontrollieren zu können, wurde in Fig. 80a der kleine Holzbalken auf zwei gleicharmige Hebel gesetzt, die ihrerseits auf einer Tischplatte aufruhen. Hierdurch werden die Auflagerdrücke A und B gewissermaßen sichtbar vorgeführt. Bei Ausführung des Versuches zeigt sich, daß auf die Hebel tatsächlich die Lasten 1,23 kg und 2,87 kg aufgebracht werden müssen, um den Balken im Gleichgewicht zu halten. Allerdings bedurfte es eigentlich dieser Prüfung gar nicht; denn die Berechnung der Auflagerkräfte ist ja nichts anderes als die Anwendung der Gleichgewichtsbedingungen, und diese sind — sofern überhaupt die Grundlagen der mechanischen Wissenschaft zutreffen — mathematisch erwiesen. Immerhin ist es lehrreich, die Theorie gewissermaßen greifbar vor Augen zu haben.

II. Nachprüfung der inneren Kräfte.

1. Nun gehen wir zur Betrachtung der im Innern des Balkens wirkenden Kräfte. Wir schneiden ihn also einfach an einer Stelle ab durch (Fig. 80a) und betrachten die hierdurch entstehenden Teile I und II besonders (Fig. 80b). Nach unseren bisherigen Untersuchungen ist dann folgendes zu erwarten: Im oberen Teile müssen Druckkräfte und im unteren Teile müssen Zugkräfte vorhanden sein. Wenn wir auch die auf die einzelnen Flächenstreifen wirkenden inneren Kräfte $\sigma \cdot f$ beim Versuch nicht alle einzeln vorführen können, so können wir aber doch ganz bequem die Resultierenden der Druck- und der Zugkräfte darstellen. Also das in § 40 (Fig. 78) mit D, Z bezeichnete innere Kräftepaar. Um die Kraft D hervorzurufen, klemmen wir in dem oberen Teile zwischen I und II einen kleinen Holzstab ein (Fig. 80b); und um Z darzustellen, verbinden wir in dem unteren Teile die Stücke I und II durch einen zwischen zwei Haken gespannten kleinen Draht. Somit haben wir die Wirkung, die sonst durch die *inneren* Kräfte $\sigma \cdot f$ auf die Teile I und II hervorgerufen wird, durch die Einfügung des Druckstabes D und der kleinen Zugstange Z zur Anschauung gebracht.

Außer den Normalspannungen σ haben wir aber in dem Querschnitte noch die Schubspannungen τ. Deren Resultierende hatten wir mit T bezeichnet (Fig. 76c). Natürlich müssen wir auch noch diese an unseren Balkenteilen I und II in Fig. 80b anbringen, um sie im Gleichgewicht zu halten. Die Kraft T wirkt innerhalb der Querschnittsebene, parallel den äußeren Kräften. Um sie zur Darstellung zu bringen, verbinden wir die Teile I und II

Digitized by Google

durch einen Draht T (Fig. 80b). Allerdings verläuft dieser Draht nicht genau in Richtung des Schnittes ab, sondern etwas schräg. Die Abweichung kann aber so gering gemacht werden — namentlich, wenn man den Versuch in etwas größerem Maßstabe ausführt —, daß die Schrägstellung von T keinen wesentlichen Einfluß auf die Größen der beiden anderen Kräfte D und Z haben kann. Auf jeden Fall genügt aber auch schon die Versuchsanordnung von Fig. 80b, um zu zeigen: daß sich die in einem Schnitte ab wirkenden inneren Kräfte zurückführen lassen auf zwei horizontal gerichtete Kräfte D und Z, und eine in Richtung des Schnittes wirkende Kraft T. Übrigens kann man es durch Anbringung von Rollen leicht erreichen, daß die Kraft T sowohl bei I als auch bei II genau parallel der Schnittfläche geführt wird.

2. Um nun noch genauer zu sehen, wie diese Kräfte D, Z und T auf jedes der Balkenstücke I und II wirken, ist der Versuch nach Fig. 80c und d weitergeführt. Neben I und II sind kleine, einfache Holzböcke gestellt, die unten eine Rolle und oben einen Winkelhebel tragen. Nun können wir die Kräfte D und Z direkt einzeln ausüben und messen. Ebenso stellen wir die Schubkraft T am Teile I durch ein meßbares Gewicht T dar. Da der Balkenquerschnitt rechteckig gewählt ist, müssen die Kräfte D und Z, wenn sie die wirklich vorhandenen Normalkräfte $\sigma_1 \cdot f_1$, $\sigma_2 \cdot f_2$ usw. ersetzen sollen, in einem Abstande

$$e = \tfrac{2}{3} h = \tfrac{2}{3} 8{,}0 = 5{,}33 \text{ cm}$$

angebracht werden (vgl. Fig. 78c). Hiernach ist in Fig. 80c und d geschehen.

Nun soll sich also nach § 40 und § 41 herausstellen: Die Schubkraft T muß gleich der *Kraftsumme* Q sein, und das Moment des Kräftepaares D, Z muß gleich der *Momentensumme* M der äußeren Kräfte sein. Am Teile I haben wir an äußeren Kräften A, P_1 und das Gewicht G_I des Teiles I. Letzteres ergibt sich aus dem Gesamtgewicht G:

$$G_I = G \cdot \frac{12{,}0}{36{,}0} = 0{,}6 \cdot \frac{12{,}0}{36{,}0} = 0{,}2 \text{ kg},$$

und zwar greift diese Kraft in der Mitte der Länge 12,0 cm an. Somit wird für den Teil I die

$$\begin{aligned} \text{Kraftsumme} \quad Q &= A - P_1 - G_1 \\ &= 1{,}23 - 0{,}90 - 0{,}20 \\ Q &= 0{,}13 \text{ kg}, \end{aligned}$$

Digitized by Google

$$\text{Momentensumme} \quad M = A \cdot 12{,}0 - P_1 \cdot 7{,}0 - G_I \cdot 6{,}0$$
$$= 1{,}23 \cdot 12{,}0 - 0{,}90 \cdot 7{,}0 - 0{,}20 \cdot 6{,}0$$
$$M = 7{,}26 \text{ cmkg.}$$

Andererseits zeigt nun der Versuch: Es muß an inneren Kräften aufgebracht werden:

$$\text{Schubkraft} \quad T = 0{,}13 \text{ kg,}$$

Kräfte D und Z:

$$D = Z = 1{,}36 \text{ kg.}$$

Die Kräfte D und Z stellen sich also als ein Kräftepaar heraus, und zwar hat dieses das Moment

$$M = 1{,}36 \cdot 5{,}33$$
$$= 7{,}26 \text{ cmkg.}$$

Die Gegenüberstellung dieser durch den Versuch gefundenen Werte mit den vorhin berechneten Werten Q und M zeigt, daß in der Tat

$$\text{Schubkraft } T = \text{Kraftsumme } Q\,,$$
$$\text{Moment von } D, Z = \text{Momentensumme } M \text{ der äußeren Kräfte}$$

ist — wie es die Theorie verlangt.

In Fig. 80d ist auch der rechts vom Schnitte gelegene Balkenteil gezeichnet. Auf den müssen natürlich in der Schnittfuge ab dieselben Kräfte D, Z und T ausgeübt werden, um ihn im Gleichgewicht zu halten. Die beiden Kräfte D in Fig. 80c und d sind ja in Wirklichkeit ein und dieselbe Kraft — nämlich die Resultierende der in der Schnittfuge ab vorhandenen Druckkräfte —, nur daß sie in Fig. 80c in ihrer Wirkung auf Teil I und in Fig. 80d in ihrer Wirkung auf Teil II dargestellt ist. Hierdurch kommt es zustande, daß sie in Fig. 80c nach links und in Fig. 80d nach rechts zeigend gezeichnet werden muß. Genau dasselbe ist mit der Kraft Z von Fig. 80b der Fall: Diese zwischen den Teilen I und II wirkende Zugkraft muß, wenn man ihre Wirkungen auf die Teile I und II *getrennt* darstellt, einmal nach rechts und einmal nach links zeigend dargestellt werden. Und schließlich muß die Schubkraft T mit entgegengesetzten Pfeilrichtungen gezeichnet werden, je nachdem man ihre Wirkung auf den Teil I oder den Teil II darstellen will. Da sie sich bei unserem Versuche am Teile I nach unten wirkend ergeben hatte, muß sie am Teile II nach oben wirkend angebracht werden. In der Tat zeigt der Versuch, daß auf den rechten Teil eine nach oben zeigende

Digitized by Google

Kraft T von 0,13 kg ausgeübt werden muß, um Gleichgewicht herzustellen.

Es ist eigentümlich: Daß eine zwischen zwei Körpern I und II bestehende Zugkraft Z auf den einen nach rechts und auf den anderen nach links wirkt, sieht man bald ein. Man braucht hierbei ja nur eine Gummischnur mit den Händen auseinanderzuziehen. Dann merkt wohl jeder, daß die Zugkraft der Gummischnur die linke Hand nach rechts und die rechte Hand nach links zieht. Auch bei einer Druckkraft erkennt man leicht, daß ein und dieselbe Kraft mit entgegengesetzten Richtungen gezeichnet werden muß, je nachdem der eine oder der andere der beiden Körper, zwischen denen diese Kraft wirkt, mit ihr dargestellt wird. Nur bei der Schubkraft T hat dieser Gedankengang für den Anfänger meistens etwas Befremdendes. Trotzdem ist es dasselbe: Man braucht ja nur eine Gummischnur mit den Händen so auseinanderzuziehen, daß diese vertikal übereinander stehen und die Schnur in Richtung der Handflächen läuft. Dann hat man die Verkörperung der Schubkraft (Fig. 80b) und wird wohl dabei merken, daß ein und dieselbe Kraft auf die beiden durch sie verbundenen Körper stets in entgegengesetzten Richtungen wirkt. Diese Eigenschaft braucht also weder bewiesen noch auch nur erklärt zu werden, sie bildet sozusagen das Wesen einer Kraft.

3. Nachdem wir die im Schnitte ab wirkenden inneren Kräfte und ihre Darstellung erledigt haben, wollen wir noch einen anderen Schnitt, cd in Fig. 80a, untersuchen. Im Prinzip kann sich natürlich nichts ändern. Im einzelnen ergibt der Versuch aber folgende Verschiedenheiten (Fig. 80e): Jetzt muß die zugfeste Verbindung Z in dem oberen Teile des Querschnittes angebracht (eingeschraubt) werden, und der kleine Druckstab D muß in dem unteren Teile zwischen die Balkenstücke III und IV geklemmt werden. Die Normalkräfte sind also gegenüber Fig. 80b miteinander vertauscht. Auch die Schubkraft T wirkt jetzt anders. Denn der die Kraft T hervorrufende Verbindungsdraht muß jetzt von links unten nach rechts oben laufen, um zusammen mit D und Z Gleichgewicht zu erzielen. Zeichnet man diese Kräfte D, Z und T von Fig. 80e so auf, wie sie auf jeden der Balkenteile III und IV einzeln wirken, so bekommt man das in Fig. 80f dargestellte Kräftebild. Vergleicht man diese Darstellung mit der Fig. 80c und d, so sieht man, daß im Prinzip dieselben Kräfte auftreten, dagegen die Richtungen der Kräfte gerade entgegengesetzt geworden sind. Im nächsten Paragraphen werden wir nun sehen, wie diese Ver-

Digitized by Google

schiedenheit in den Richtungen in Übereinstimmung gebracht werden kann mit dem Wechsel der Vorzeichen der Kraftsumme Q und der Momentensumme M bei den verschiedenen Querschnitten.

Zusammenfassung.

Der Versuch hat uns dreierlei Beachtenswertes gezeigt:

1. Die in einem Querschnitte ab eines Balkens vorhandenen inneren Kräfte lassen sich tatsächlich auf ein Kräftepaar D, Z und auf eine Schubkraft T zurückführen. Die zur Berechnung dieser Kräfte früher abgeleiteten Aussagen

(I) Schubkraft $T =$ Kraftsumme Q,

(II) Moment von $D, Z =$ Momentensumme M

sind durch den Versuch bestätigt.

2. Es hat sich selbstverständlich auch beim Versuch herausgestellt, daß jede dieser inneren Kräfte in entgegengesetzten Richtungen zeigt, je nachdem sie auf den einen oder auf den anderen Balkenteil wirkend dargestellt wird.

3. Die Normalkräfte treten für die verschiedenen Querschnitte in den beiden möglichen Anordnungen — entweder oben Druck und unten Zug, oder umgekehrt — auf. Auch die Schubkraft T tritt in zweierlei Anordnung auf: Entweder wirkt sie auf den linken Teil nach unten und dann also auf den rechten Teil nach oben, oder aber umgekehrt, ein.

§ 43.

Vorzeichenregeln für Q und M.

I. Vorzeichenregel für die Kraftsumme Q.

Die in einem Querschnitte vorhandene Schubkraft T kann also in zwei verschiedenen Anordnungen auftreten; entweder nach Fig. 80b oder nach Fig. 80e. Nehmen wir nicht die gesamten Resultierenden T, sondern die einzelnen Schubspannungen, so werden diese also entweder nach Fig. 81a oder nach Fig. 81b in den verschiedenen Querschnitten eines Balkens wirksam sein. (Die Normalspannungen sind in Fig. 81 fortgelassen, da es sich jetzt nur um die Schubspannungen handelt.) Um sich eine Vorstellung von dieser Verschiedenheit der Wirkungen zu machen, denke man

Digitized by Google

an zwei unmittelbar nebeneinanderstehende vertikale Flächen (z. B. die Handflächen), zwischen deren einzelnen Punkten verbindende Kräfte wirken. Gleitet nun die linke Fläche etwas nach oben und die rechte nach unten, so werden die Verbindungskräfte auf die beiden Flächen nach Fig. 81a wirken. Verschiebt sich aber die linke Fläche nach unten und die rechte nach oben, so wirken die verbindenden Kräfte auf den linken bzw. rechten Teil so, wie in Fig. 81b angenommen ist.

Um nun diese beiden möglichen Fälle zu unterscheiden, wollen wir Fig. 81a die „positive" und Fig. 81b die „negative Anordnung"

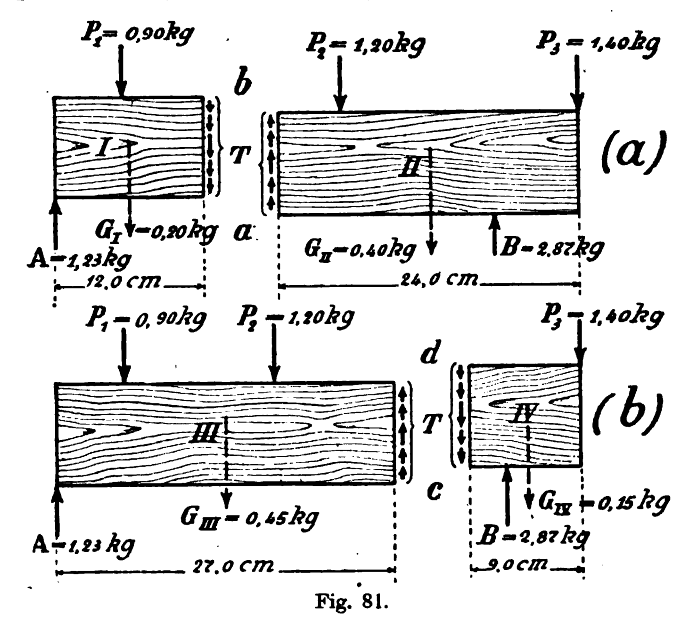


Fig. 81.

der Schubspannungen nennen. Unsere zunächst zu lösende Frage sei nun: Wie können wir bereits an der Kraftsumme Q erkennen, ob die Schubspannungen in dem betreffenden Querschnitt in positiver oder in negativer Anordnung auftreten werden?

Zur Beantwortung dieser Frage muß man sich klar werden, daß die Kraftsumme Q sich aus nach oben zeigenden und aus nach unten zeigenden Kräften zusammensetzt. Dieser Unterschied in den Richtungen der äußeren Kräfte äußert sich natürlich auch in den Schubspannungen. Betrachten wir zunächst das Gleichgewicht des Teiles links vom Schnitte, so zeigt sich hinsichtlich dieser Verschiedenheit folgendes: Eine am linken Teile nach oben gerichtete Kraft (Auflagerdruck A) erfordert zur Erhaltung des

Digitized by Google

Gleichgewichts eine auf diesen Teil nach unten wirkende Schubkraft („Positive Anordnung"). Und umgekehrt: Zu einer am linken Teile nach unten zeigenden Kraft gehört eine aufwärtsgerichtete Schubkraft („Negative Anordnung"). In Wirklichkeit wirken nun an diesem Teile sowohl nach oben als auch nach unten zeigende Kräfte. Innerhalb des Querschnittes kann also eine positive oder eine negative Anordnung der Schubspannungen eintreten, und zwar richtet sich dieses augenscheinlich nach folgender Regel: Überwiegen am linken Teile die nach oben zeigenden Kräfte, so müssen die Schubspannungen in *positiver Anordnung* vorhanden sein; überwiegen aber die nach unten zeigenden Kräfte, so gehört zu den betreffenden Lasten eine *negative Anordnung* der Schubspannungen.

Beim Aufstellen der Kraftsumme Q werden wir also zweckmäßig von vornherein die am linken Teile nach oben zeigenden Kräfte mit positivem und die daselbst nach unten zeigenden Kräfte mit negativem Vorzeichen einführen. Kommt dann für Q etwas *Positives* heraus, so bedeutet dieses, daß die nach oben zeigenden Kräfte überwiegen, und dann treten auch die Schubspannungen in *positiver* Anordnung auf (Fig. 81 a). Kommt aber für Q etwas *Negatives* heraus, so ist dadurch angezeigt, daß die nach unten zeigenden Kräfte überwiegen, und zu diesem Falle gehört auch eine *negative* Anordnung der Schubspannungen (Fig. 81 b). Auf diese Weise gibt das endgültige Vorzeichen der Kraftsumme Q gleichzeitig das Vorzeichen für die *Anordnung* der Schubspannungen an, und unsere eingangs gestellte Aufgabe ist gelöst.

Bisher haben wir die Schubkraft T in einem Querschnitte dadurch bestimmt, daß wir die Kraftsumme für den *links* vom Schnitte befindlichen Trägerteil aufstellten. Natürlich können wir T auch aus dem Gleichgewicht des *rechten* Trägerteiles ableiten. Nur hinsichtlich der Vorzeichen, mit denen die einzelnen Kräfte beim Aufstellen der Kraftsumme Q einzuführen sind, tritt ein Unterschied ein. Jetzt gehört nämlich zu einer nach oben gerichteten Kraft eine „negativ" angeordnete Schubkraft T (Fig. 81 b), und zu einer nach unten gerichteten Kraft gehören „positive" Schubspannungen. Dieser Unterschied kommt eben daher, weil auch die Schubspannungen auf den linken und auf den rechten Teil in entgegengesetzten Richtungen einwirken. Wenn wir also die Kraftsumme Q am *rechten* Teile aufstellen, werden wir die nach oben zeigenden Kräfte mit negativem und die nach unten zeigenden Kräfte mit positivem Vorzeichen einführen. Dann stimmt wieder

Digitized by Google

das endgültige Vorzeichen von Q mit dem Vorzeichen für die Schubkraftanordnung überein, so daß letztere durch das Vorzeichen von Q bereits mitbestimmt ist. Am klarsten wird die Zweckmäßigkeit dieser Vorzeichenregeln beim Durcharbeiten eines

Zahlenbeispiels.

Aufgabe. Bei dem in Fig. 80a gezeichneten Balken sollen die Kraftsummen Q für die Querschnitte ab und cd bestimmt werden!

Zunächst stellen wir die äußeren Kräfte zusammen. Es war

$$P_1 = 0{,}90 \text{ kg}; \quad P_2 = 1{,}20 \text{ kg}; \quad P_3 = 1{,}40 \text{ kg}; \quad G = 0{,}60 \text{ kg}.$$

Ferner hatten wir berechnet

$$A = 1{,}23 \text{ kg}; \quad B = 2{,}87 \text{ kg}.$$

Für das Folgende brauchen wir außerdem die Gewichte G_I, G_{II} usw. der Teile I, II usw. (Fig. 81a und b). Diese Gewichte sind gleich dem Gesamtgewicht G, verkleinert im Verhältnis der Längen. Also

$$G_I = 0{,}60 \cdot \frac{12{,}0}{36{,}0} = 0{,}20 \text{ kg}; \qquad G_{II} = 0{,}60 \cdot \frac{24{,}0}{36{,}0} = 0{,}40 \text{ kg};$$

$$G_{III} = 0{,}60 \cdot \frac{27{,}0}{36{,}0} = 0{,}45 \text{ kg}; \qquad G_{IV} = 0{,}60 \cdot \frac{9{,}0}{36{,}0} = 0{,}15 \text{ kg}.$$

Nun können wir die Kraftsummen Q und die Schubkräfte T berechnen.

a) Für den Querschnitt ab ergibt sich die Kraftsumme, unter Innehaltung der soeben aufgestellten Vorzeichenannahmen:

Am linken Teile abgeleitet:	Am rechten Teile abgeleitet:
$Q = +A - P_1 - G_I$	$Q = -B + P_3 + P_2 + G_{II}$
$= +1{,}23 - 0{,}90 - 0{,}20$	$= -2{,}87 + 1{,}40 + 1{,}20 + 0{,}40$
$= +1{,}23 - 1{,}10$	$= -2{,}87 + 3{,}00$
$= +0{,}13$ kg.	$= +0{,}13$ kg.

Dieses Resultat sagt aus: Für den Querschnitt ab überwiegen am linken Teile die nach oben zeigenden und am rechten Teile die nach unten zeigenden äußeren Kräfte. Innerhalb dieses Querschnittes muß also eine Schubkraft T in „positiver" Anordnung herrschen (Fig. 81a), und zwar hat T die Größe von 0,13 kg.

Die Rechnung hat natürlich denselben Wert Q ergeben, gleichgültig, ob wir die Kraftsumme am linken oder am rechten Teile ableiten. Denn der Balken — als Ganzes betrachtet — ist ebenfalls im Gleichgewicht, und es muß also am linken Teile ein ebenso

Digitized by Google

großer Lastenüberschuß nach oben wirken, wie am rechten Teile nach unten. Oder, in Formeln ausgedrückt, wegen

$$A + B = P_1 + P_2 + P_3 + G_I + G_{II}$$

muß sein

$$A - P_1 - G_I = -B + P_2 + P_3 + G_{II}\,.$$

b) Für den Querschnitt cd ergibt sich die Kraftsumme:

Am linken Teile aufgestellt:	Am rechten Teile aufgestellt:
$Q = +A - P_1 - P_2 - G_{III}$	$Q = -B + P_3 + G_{IV}$
$= +1{,}23 - 0{,}90 - 1{,}20 - 0{,}45$	$= -2{,}87 + 1{,}40 + 0{,}15$
$= +1{,}23 - 2{,}55$	$= -2{,}87 + 1{,}55$
$= -1{,}32$ kg.	$= -1{,}32$ kg.

Dieses Resultat sagt aus: Im Querschnitte cd herrscht eine Schubkraft $T = 1{,}32$ kg, und zwar in negativer Anordnung.

Man sieht, daß unsere Vorzeichenfestsetzung recht zweckmäßig war: Gleichgültig, ob wir die Kraftsumme am rechten oder am linken Teile aufstellen, wir erhalten durch den Wert Q sofort die Schubkraft nach Größe und Anordnung.

II. Vorzeichenregel für die Momentensumme M.

Auch die Normalspannungen σ können in zwei verschiedenen Anordnungen auftreten. Entweder haben wir unten Zug und oben Druck, oder unten Druck und oben Zug. In Fig. 82a und b sind diese beiden Möglichkeiten dargestellt. (Die Schubspannungen τ sind jetzt fortgelassen.) Um eine Vorstellung von diesen beiden verschiedenen Anordnungen zu bekommen, kann man sich zwei nebeneinanderstehende Flächen denken, die durch ein Zwischenmittel verbunden sind. Dreht man die Flächen so gegeneinander, daß sie sich unten entfernen und oben nähern, so wird das Zwischenmittel auf die Flächen Kräfte ausüben, die nach Fig. 82a wirken. Dreht man die Flächen aber so, daß unten ein Zusammendrücken und oben ein Auseinanderziehen stattfindet, so treten Kräfte nach Fig. 82b auf.

Um die beiden Fälle zu unterscheiden, wollen wir den ersten die „positive" und den zweiten die „negative Anordnung" der Normalspannungen nennen. Woran erkennen wir nun, ob in einem Balkenquerschnitte die Normalspannungen in „positiver" oder in „negativer" Anordnung auftreten werden?

Die Normalspannungen sind abgeleitet aus der Momentengleichung für den Punkt N. („Summe der rechtsherum zeigenden

Digitized by Google

Momente gleich Summe der linksherum zeigenden Momente.“) Betrachten wir nun den linken Teil, so folgt: Eine Kraft, die rechtsherum um den Punkt N zeigt, erzeugt eine positive Verteilung der Normalspannungen; und eine Kraft, die linksherum um N zeigt, erzeugt Normalspannungen in negativer Anordnung. Wenn wir also in der Biegungsformel

$$\sigma = \frac{M}{J} \cdot y$$

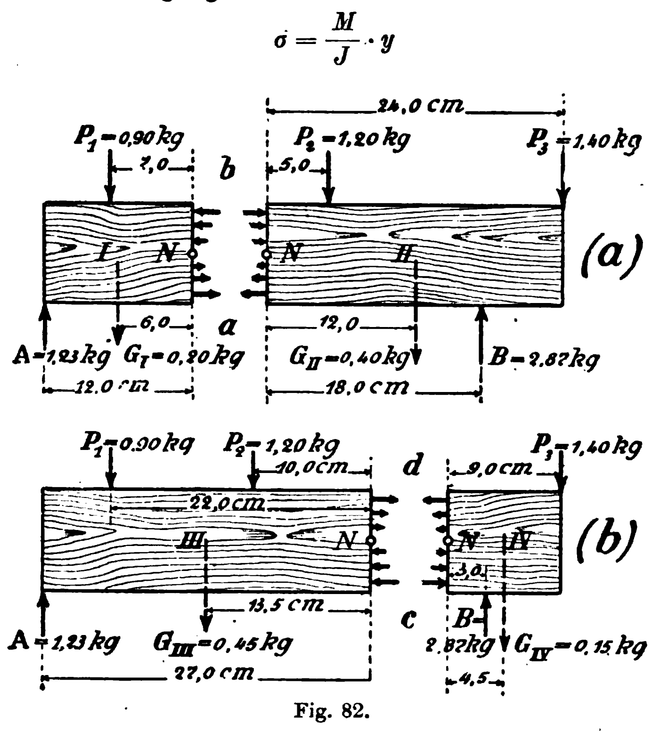


Fig. 82.

die Momentensumme M am linken Teile berechnen, so werden wir die rechtsherum zeigenden Kräfte mit positivem und die linksherum zeigenden Kräfte mit negativem Vorzeichen einführen. Je nachdem dann für M etwas Positives oder etwas Negatives herauskommt, ist die Verteilung der Normalspannungen positiv oder negativ.

Am rechten Teile ist es natürlich umgekehrt: Eine linksherum um N zeigende Kraft erzeugt positiv angeordnete Normalspannungen und muß also beim Aufstellen der Momentensumme M mit positivem Vorzeichen eingeführt werden; zu einer rechtsherum zeigenden Kraft gehört dagegen eine negative Anordnung der Normalspannungen. Am rechten Teile gelten also wieder gerade entgegengesetzte Vorzeichenregeln, wie am linken Teile.

Digitized by Google

Ob wir die Momentensumme am Teile links oder am Teile rechts vom Schnitte aufstellen, ist gleichgültig. Wir bekommen denselben Wert. Denn sämtliche am ganzen Balken angreifenden Kräfte würden doch, da sie den Balken im Gleichgewicht halten, für den Punkt N die Momentensumme Null ergeben. Bezeichnen wir also die Summe aus den Momenten der am linken Teile angreifenden Kräfte mit M_l und die Momentensumme der Kräfte am rechten Teile mit M_r, so ist eigentlich

$$M_l + M_r = 0$$

oder

$$M_l = -M_r .$$

Nun hatten wir aber vorhin den Kräften am rechten Teile entgegengesetzte Vorzeichenregeln gegeben, wie den Momenten von M_l. Es muß also in der obigen Gleichung entweder von M_l oder von M_r das Vorzeichen geändert werden, so daß tatsächlich ist

$$M_l = M_r .$$

Am klarsten wird die Einfachheit und Zweckmäßigkeit dieser Vorzeichenregel wieder durch ein

Zahlenbeispiel.

Aufgabe. Bei dem in Fig. 80a gezeichneten Balken sollen für die Querschnitte ab und cd die Momentensummen M bestimmt werden!

Mit Beachtung der soeben getroffenen Vorzeichenvereinbarung erhalten wir die Momentensummen:

a) Für den Querschnitt *ab* (Fig. 82a).

Am linken Teile aufgestellt:

$$\begin{aligned} M &= +A \cdot 12{,}0 - P_1 \cdot 7{,}0 - G_I \cdot 6{,}0 \\ &= +1{,}23 \cdot 12{,}0 - 0{,}90 \cdot 7{,}0 - 0{,}20 \cdot 6{,}0 \\ &= +14{,}76 - 7{,}50 \\ &= +7{,}26 \text{ cmkg.} \end{aligned}$$

Am rechten Teile aufgestellt:

$$\begin{aligned} M &= +B \cdot 18{,}0 - P_3 \cdot 24{,}0 - P_2 \cdot 5{,}0 - G_{II} \cdot 12{,}0 \\ &= +2{,}87 \cdot 18{,}0 - 1{,}40 \cdot 24{,}0 - 1{,}20 \cdot 5{,}0 - 0{,}40 \cdot 12{,}0 \\ &= +51{,}66 - 44{,}40 \\ &= +7{,}26 \text{ cmkg.} \end{aligned}$$

Aus der Rechnung hat sich ergeben, daß am linken Teile die um den Punkt N rechtsherum und am rechten Teile die linksherum zeigenden Kräfte überwiegen. Daraus folgt, daß innerhalb des Querschnittes *ab* die Normalspannungen in „positiver“ Anordnung auftreten werden. Die Größe irgendeiner Normalspannung bestimmt sich dann mit Hilfe des soeben ausgerechneten Momentes M durch die Formel

$$\sigma = \frac{M}{J} \cdot y .$$

Digitized by Google

b) Für den Querschnitt cd (Fig. 82b).

Am linken Teile aufgestellt:

$$M = +A \cdot 27{,}0 - P_1 \cdot 22{,}0 - P_2 \cdot 10{,}0 - G_{III} \cdot 13{,}5$$
$$= +1{,}23 \cdot 27{,}0 - 0{,}90 \cdot 22{,}0 - 1{,}20 \cdot 10{,}0 - 0{,}45 \cdot 13{,}5$$
$$= +33{,}210 - 37{,}875$$
$$= -4{,}665 \text{ cmkg.}$$

Am rechten Teile aufgestellt:

$$M = +B \cdot 3{,}0 - P_3 \cdot 9{,}0 - G_{IV} \cdot 4{,}5$$
$$= +2{,}87 \cdot 3{,}0 - 1{,}40 \cdot 9{,}0 - 0{,}15 \cdot 4{,}5$$
$$= +8{,}610 - 13{,}275$$
$$= -4{,}665 \text{ cmkg.}$$

Die Rechnung zeigt, daß in dem Querschnitte cd die Normalspannungen in „negativer“ Anordnung auftreten. Man sieht aber auch hier, daß die Vorzeichenfestsetzung der Natur der Aufgabe durchaus entspricht: Wir finden aus dem Vorzeichen von M direkt die Anordnung der Normalspannungen, und zwar sind wir unabhängig davon, ob wir den rechten oder den linken Balkenteil betrachten wollen.

§ 44.

Zusammenfassung zum 7. Vortrag.

I. Zusammenfassung.

Am Schlusse dieses Vortrages wollen wir zunächst einen kurzen Rückblick auf das bisher Durchgenommene werfen. Unsere Aufgabe war die Untersuchung der inneren Kräfte in Querschnitten, die rechtwinklig zur Stabachse stehen. Hierbei beschränkten wir uns aber auf solche Querschnitte, die eine in Richtung der Kräfte liegende *Symmetrieebene* haben. Für diesen Fall sahen wir nun folgendes:

1. Im allgemeinen steht eine Spannung p, die in einem solchen Querschnitte wirkt, *schief* zu dem betreffenden Flächenelement. Um nun eine gewisse Übersicht zu erzielen und überhaupt eine Berechnung zu ermöglichen, haben wir jede Spannung p zerlegt in eine

Normalspannung σ (rechtwinklig zur Querschnittsfläche)

und eine

Schubspannung τ (innerhalb der Querschnittsfläche).

Nach dieser Zerlegung gelang es uns dann tatsächlich, für jede der beiden Spannungen einfache Formeln zu ihrer Berechnung aufzustellen. Will man dann für irgendein Flächenelement die wirklich vorhandene Spannung p haben, so muß man σ und τ zusammensetzen. (Man führe dieses an dem Beispiele von § 39 voll-

Digitized by Google

ständig durch, um die einzelnen Spannungen p zu sehen!) Diese Zusammensetzung wird aber nur selten nötig sein, denn es zeigte sich, daß die Schubspannungen τ gerade in den Fasern eines Querschnittes gleich Null werden, in denen die Normalspannungen σ am größten werden. Ferner wird sich später zeigen, daß in dem sogenannten „gefährlichen" Querschnitt eines Balkens (in dem voraussichtlich der Bruch eintritt) die Schubspannungen im allgemeinen sehr klein sind. Aus diesen Gründen kommen die Schubspannungen im allgemeinen bei der Beurteilung der Bruchgefahr nicht in Betracht. Maßgebend sind die Normalspannungen σ. (Man erkennt, wie sehr diese Zerlegung in σ und τ die ganze Rechnung vereinfacht hat.)

2. Die Formeln nun, die wir zur Berechnung der Spannungen abgeleitet hatten, lauteten:

(I) Schubkraft T = Kraftsumme Q,

(II) Normalspannung σ (in irgendeiner Faserschicht) $= \dfrac{\text{Momentensumme } M}{\text{Trägheitsmoment } J} \cdot$ Abstand y (der betreffenden Schicht bis zur Nullinie).

Bei den Schubspannungen begnügen wir uns also, die Resultierende T anzugeben. Die Normalspannungen σ dagegen bestimmen wir einzeln für jede Faserschicht.

Bei der Ausrechnung der Hilfswerte Q und M hatten wir nun folgende Vorzeichenfestsetzungen zugrunde gelegt:

Kraftsumme Q

am linken Teile:	am rechten Teile:
die nach oben zeigenden Kräfte +	die nach oben zeigenden Kräfte —
„ „ unten „ „ —	„ „ unten „ „ +

Momentensumme M

am linken Teile:	am rechten Teile:
die rechtsherum zeigenden Kräfte +	die linksherum zeigenden Kräfte +
„ linksherum „ „ —	„ rechtsherum „ „ —

Wenn wir nach diesen Regeln verfahren, erhalten wir die gleichen Resultate, unabhängig davon, welchen der beiden Teile wir betrachten. Und das Vorzeichen von Q bzw. M gibt gleichzeitig an, ob die Schubspannungen bzw. die Normalspannungen in dem betreffenden Querschnitt in positiver oder in negativer Anordnung auftreten.

II. Unsere nächsten Arbeiten

werden nun folgende sein: Zunächst wollen wir die Lage der Nullinie, von der aus die Abstände y der einzelnen Faserschichten gerechnet sind [Formel (II)], für die verschiedenen Querschnitts-

Digitized by Google

formen bestimmen. Die in § 38 zur Ermittlung der Lage der Nullinie abgeleitete Bedingung muß noch etwas bequemer abgeändert und dann auf die einzelnen Querschnittsformen (z. B. Dreieck) angewandt werden. (8. Vortrag.)

Dann wollen wir das Trägheitsmoment J für die verschiedenen Querschnittsformen ausrechnen. Für den rechteckigen Querschnitt ist die betreffende Formel schon abgeleitet worden (§ 39). Es müssen nun in derselben Weise für das Dreieck, den Kreis usw. die entsprechenden Formeln für J aufgestellt werden. (9. Vortrag.)

Zum Schlusse müssen wir die Kraftsumme Q und die Momentensumme M für die verschiedenen Belastungsarten aufstellen. Für den einfachsten Fall — Einzellasten — haben wir schon Q und M berechnet. Wir müssen aber auch noch andere Belastungsfälle, z. B. verteilte Belastung, usw., untersuchen. (10.—12. Vortrag.)

Unsere nächsten Arbeiten umfassen also gewissermaßen die Nutzbarmachung der bisherigen — das Prinzip darstellenden — Untersuchungen für die verschiedenen Fälle der Praxis.

---

8. Vortrag:

Die Lage der Nullinie bei den verschiedenen Querschnittsformen. Schwerpunktsbestimmungen.

§ 45.

Allgemeine Methode zur Bestimmung der Lage der Nullinie.

I. Grundprinzip.

Die Nullinie ist also diejenige Stelle des Querschnittes, in der die Normalspannungen σ gleich Null sind. Wir müssen bei jeder Biegungsaufgabe zunächst die Lage der Nullinie bestimmen, weil von ihr aus — gemäß der Ableitung der Biegungsformel $\sigma = \frac{M}{J} \cdot y$ — die Abstände y zu messen sind. Das allgemeine Kennzeichen, das sich bei der Ableitung der Biegungsformel im § 38 zur Bestimmung der Lage der Nullinie ergab, war folgendes: „Zerlegt man den oberhalb und den unterhalb der Nullinie liegenden Querschnittsteil je in eine Anzahl unendlich dünner Flächenstreifen f_1, f_2 usw., so ist die Summe der Produkte $f \cdot y$ von den oberen Flächenstreifen gleich der Summe der Produkte $f \cdot y$ von den unteren Flächenstreifen."

Digitized by Google

Um mit Hilfe dieses Kennzeichens für einen so unregelmäßigen Querschnitt, wie es z. B. Fig. 83 ist, die Nullinie zu bestimmen, würde man also folgendermaßen verfahren: Man nimmt zunächst die Achse $n—n$ nach Gutdünken an, teilt die Querschnittsfläche in die Streifen f_1, f_2 usw. ein, und sieht dann nach, ob die obige Bedingung erfüllt ist. Für Fig. 83 müßte also sein

$$\text{(I)} \qquad f_1 \cdot y_1 + f_2 \cdot y_2 + f_3 \cdot y_3 = f_4 \cdot y_4 + f_5 \cdot y_5 + f_6 \cdot y_6 .$$

(y_3 ist in Fig. 83 gleich Null, jedoch der Vollständigkeit wegen mit aufgeführt. Da sich unendlich dünne Streifen natürlich nicht darstellen lassen, sind in Fig. 83 zur Veranschaulichung nur sechs Streifen gezeichnet.) Ist dieses nicht der Fall, so muß eine neue Achse $n—n$ ausprobiert werden, bis schließlich die richtige gefunden ist.

Dieses wäre also das Verfahren zur Bestimmung der Lage der Nullinie im Prinzip. Für die praktische Ausführung wollen wir es aber noch etwas umändern, damit vor allen Dingen das Herumprobieren fortfällt. Hierbei gehen wir so vor:

II. Praktische Umformung des Grundprinzips.

Da die Lage der Nullinie $n—n$ noch unbekannt ist, berechnen wir die obigen Produkte „Flächenstreifen × Abstand" zunächst für eine *beliebige* Achse. Wir ziehen also an beliebiger Stelle — außerhalb oder innerhalb des Querschnittes, aber parallel der zu bestimmenden Nullinie — eine Achse $x—x$ und führen den Abstand der Nullinie $n—n$ bis zu dieser Achse $x—x$ als unbekannte Größe in die Rechnung ein. Die Abstände der Flächenstreifen f_1, f_2 usw. bis zu der Achse $x—x$ mögen mit

$$z_1 , \; z_2 , \; z_3 \;\; \text{usw.}$$

bezeichnet werden (z_5 ist gleich Null). Der Abstand zwischen den Achsen $x—x$ und $n—n$ werde

$$z$$

genannt. Dieser Abstand ist natürlich unbekannt, denn durch ihn soll ja erst die Lage der Nullinie bestimmt werden.

Zwischen den Abständen y_1, y_2 usw. und den Abständen z_1, z_2 usw. bestehen nun nach Fig. 83 folgende Beziehungen. Es ist

$$\text{(II)} \qquad \begin{cases} y_1 = z_1 - z , & y_4 = z - z_4 , \\ y_2 = z_2 - z , & y_5 = z - z_5 \;\; (z_5 = 0) , \\ y_3 = z_3 - z \;\; (=0) , & y_6 = z + z_6 . \end{cases}$$

Diese Werte wollen wir in unsere ursprüngliche Gleichung (I) einsetzen, um auf diese Weise den unbekannten Abstand z zu be-

Digitized by Google

stimmen. Vorher formen wir aber noch die Gleichung (I) um, indem wir dafür schreiben:

(III) $f_1 \cdot y_1 + f_2 \cdot y_2 + f_3 \cdot y_3 - f_4 \cdot y_4 - f_5 \cdot y_5 - f_6 \cdot y_6 = 0$.

Drücken wir nun in dieser Gleichung die Abstände y_1, y_2 usw. mit Hilfe der Gleichungen (II) durch den Abstand z aus, so erhalten wir

(IV) $f_1(z_1 - z) + f_2(z_2 - z) + f_3(z_3 - z) - f_4(z - z_4) - f_5(z - z_5) - f_6(z + z_6) = 0$.

Hieraus:

(V) $f_1 \cdot z_1 + f_2 \cdot z_2 + f_3 \cdot z_3 + f_4 \cdot z_4 + f_5 \cdot z_5 - f_6 \cdot z_6 - (f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 + f_6) z = 0$.

Nun ist

$$f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 + f_6 = \text{Gesamtfläche } F$$

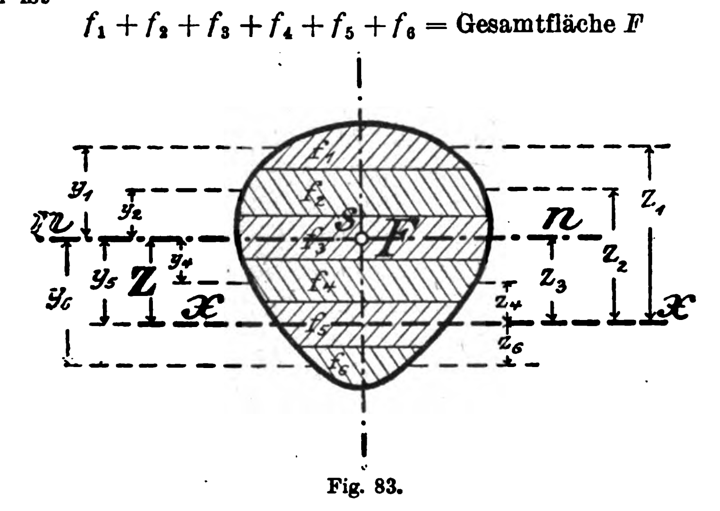


Fig. 83.

des Querschnittes. Wir erhalten also

(VI) $f_1 \cdot z_1 + f_2 \cdot z_2 + f_3 \cdot z_3 + f_4 \cdot z_4 + f_5 \cdot z_5 - f_6 \cdot z_6 - F \cdot z = 0$.

Aus dieser Gleichung folgt zunächst

(VII) $f_1 \cdot z_1 + f_2 \cdot z_2 + f_3 \cdot z_3 + f_4 \cdot z_4 + f_5 \cdot z_5 - f_6 \cdot z_6 = F \cdot z$,

und schließlich der gesuchte Abstand

(VIII) $$z = \frac{f_1 \cdot z_1 + f_2 \cdot z_2 + f_3 \cdot z_3 + f_4 \cdot z_4 + f_5 \cdot z_5 - f_6 \cdot z_6}{F}.$$

Hiermit ist unsere Aufgabe gelöst. Um für einen so unregelmäßigen Querschnitt, wie es Fig. 83 ist, die Nullinie zu bestimmen, können wir also in folgender systematischer Weise vorgehen:

„Wir zeichnen parallel der zu erwartenden Nullinie (d. h. rechtwinklig zu den Lasten) an beliebiger Stelle eine Achse x—x in

Digitized by Google

die Figur ein. Dann zerlegen wir die Querschnittsfläche parallel der Achse $x—x$ in lauter Streifen, berechnen deren Flächeninhalte f_1, f_2 usw. und messen deren Abstände z_1, z_2 usw. bis zur x-Achse ab. Hierauf bilden wir die Produkte $f_1 \cdot z_1$, $f_2 \cdot z_2$ usw., wobei wir die auf entgegengesetzten Seiten der x-Achse liegenden Streifen durch entgegengesetzte Vorzeichen unterscheiden müssen, und dividieren die Summe dieser Produkte durch den gesamten Flächeninhalt F. Die hierdurch gefundene Strecke z gibt dann den Abstand an, in welchem die richtige Nullinie $n—n$ von der Achse $x—x$ aus zu zeichnen ist."

Diese Produkte $f_1 \cdot z_1$, $f_2 \cdot z_2$ usw. nennt man die *„statischen Momente der Flächenstreifen f_1, f_2 usw. in bezug auf die Achse $x—x$"*. **Die Abstände z_1, z_2 usw. sind von der x-Achse aus zu messen. Und zwar versieht man zweckmäßig bereits diese Abstände z mit Plus- oder mit Minuszeichen, je nachdem sie nach der einen oder nach der anderen Seite von der x-Achse aus liegen. Dann erscheinen auch die entsprechenden „statischen Momente" $f \cdot z$ mit verschiedenen Vorzeichen, so, wie es Gleichung (VIII) verlangt. Kommt hierauf bei der Ausrechnung von z ein positiver Wert heraus, so bedeutet dieses, daß die Strecke z nach der *positiven* Seite aus abzutragen ist. Kommt aber aus Gleichung (VIII) etwas Negatives heraus, so muß z nach der Seite aufgetragen werden, nach der die *negativen* Abstände liegen.**

III. Schlußbetrachtung.

Diese Methode führt also stets zum Ziel. Theoretisch muß man die Anzahl der Streifen unendlich groß nehmen, um ein vollständig genaues Resultat zu erhalten. Ist die Umrißlinie eine mathematisch bekannte Kurve (z. B. Kreisbogen, Ellipse, Parabel od. dgl.), so läßt sich die Rechnung auch tatsächlich in dieser Weise durchführen (s. die erste Aufgabe in § 49). Man bekommt dann für jede Querschnittsform eine bestimmte mathematische Formel zur Bestimmung der Nullinie. Ist dagegen die Umrißlinie nicht mathematisch gegeben, so läßt sich die Lage der Nullinie natürlich auch nicht mathematisch genau ermitteln. Dann muß man den Querschnitt maßstäblich aufzeichnen, in eine nicht zu kleine Anzahl Streifen teilen, die statischen Momente $f_1 \cdot z_1$, $f_2 \cdot z_2$ usw. ausrechnen, und bekommt dann stets genügend genau die Nullinie.

Fast immer liegt der Fall in der Praxis aber so: Wenn auch die Umrißlinien des Querschnittes unregelmäßig sind, so läßt sich dieser doch aus regelmäßigen Flächenstücken (Rechtecken, Halb- oder Viertelkreisen od. dgl.) zusammensetzen. Dann aber kann man das Verfahren noch weiter vereinfachen, wie wir sofort sehen werden.

Digitized by Google

§ 46.

Die Bestimmung der Lage der Nullinie bei Querschnitten, die sich aus bekannten Figuren zusammensetzen.

1. Im vorigen Paragraphen waren wir auf eine Gleichung (VII) gekommen, die folgendermaßen lautete:

(I) $$F \cdot z = f_1 \cdot z_1 + f_2 \cdot z_2 + f_3 \cdot z_3 + f_4 \cdot z_4 + f_5 \cdot z_5 - f_6 \cdot z_6 \,.$$

In Worten sagt diese aus: *Teilt man eine Fläche F in eine Anzahl Flächenstreifen f_1, f_2 usw., so ist das „statische Moment“ $F \cdot z$ der Fläche F in bezug auf eine Achse x—x gleich der Summe der statischen*

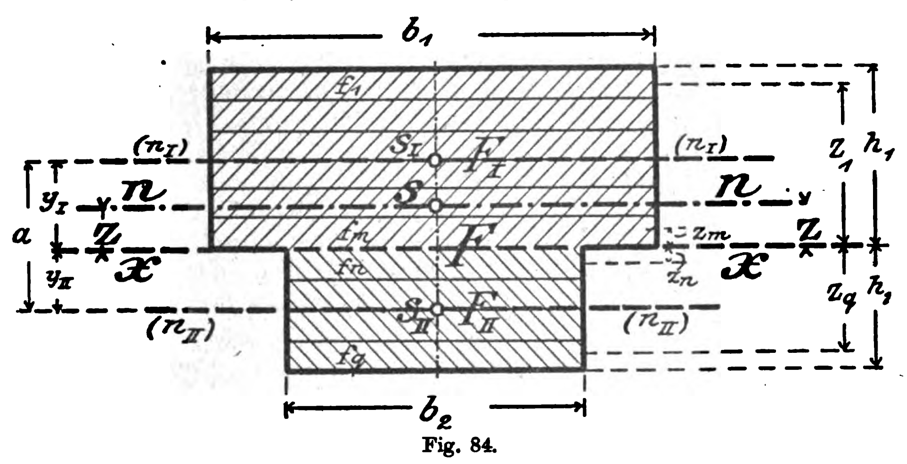


Fig. 84.

Momente der einzelnen Flächenstreifen in bezug auf diese Achse. (Die Abstände z müssen jedoch, wenn sie auf verschiedenen Seiten der Achse liegen, mit verschiedenen Vorzeichen eingeführt werden.)

Durch diesen Hilfssatz läßt sich die Bestimmung der Lage der Nullinie bei vielen Querschnitten vereinfachen; nämlich bei solchen Querschnitten, die sich aus Figuren zusammensetzen, für die die Lage der Nullinie bereits bekannt ist.

2. Als Beispiel wollen wir den in Fig. 84 gezeichneten, aus zwei Rechtecken bestehenden Querschnitt untersuchen. Sein Flächeninhalt sei F. Um für diesen Querschnitt die Lage der Nullinie zu bestimmen, verfahren wir nach dem im vorigen Paragraphen entwickelten allgemeinen Verfahren: Wir nehmen eine Achse x—x an, zerlegen den Querschnitt in Flächenstreifen und erhalten den Abstand z der gesuchten Nullinie:

(II) $$z = \frac{f_1 \cdot z_1 + \ldots + f_m \cdot z_m - f_n \cdot z_n - \ldots - f_q \cdot z_q}{F} \,.$$

Digitized by Google

Wegen des Folgenden schreiben wir diese Gleichung in der Form

$$\text{(III)} \qquad z = \frac{(f_1 \cdot z_1 + \ldots + f_m \cdot z_m) - (f_n \cdot z_n + \ldots + f_q \cdot z_q)}{F}.$$

Nun möge bei dem oberen Rechteck sein Flächeninhalt mit F_I und der Abstand seiner Nullinie mit y_I bezeichnet werden. (Es ist $y_I = \frac{1}{2} h_1$, da beim Rechteck die Nullinie in halber Höhe liegt; vgl. § 39.) Entsprechend seien beim unteren Rechteck der Flächeninhalt gleich F_{II} und sein Nullinienabstand gleich y_{II}. Dann bestehen nach dem 1. Abschnitte dieses Paragraphen folgende Beziehungen: Es ist

$$f_1 \cdot z_1 + \ldots + f_m \cdot z_m = F_I \cdot y_I$$

und

$$f_n \cdot z_n + f_q \cdot z_q = F_{II} \cdot y_{II}.$$

Setzt man diese Werte in Gleichung (III) ein, so erhält man zur Berechnung des Abstandes z den einfachen Ausdruck:

$$\text{(IV)} \qquad z = \frac{F_I \cdot y_I - F_{II} \cdot y_{II}}{F}.$$

Augenscheinlich gilt dieses Verfahren auch dann, wenn der betreffende Querschnitt sich aus mehr als zwei Rechtecken od. dgl. zusammensetzt. Allgemein hat man also folgende Regel:

Setzt sich ein Querschnitt F aus mehreren Figuren zusammen, deren Flächeninhalte F_I, F_{II} usw. und deren Nullinienabstände y_I, y_{II} usw. von einer Achse x—x bereits bekannt sind, so hat die Nullinie des Gesamtquerschnittes F von der Achse den Abstand

$$\text{(V)} \qquad z = \frac{F_I \cdot y_I + F_{II} \cdot y_{II} + \ldots}{F}.$$

Und zwar müssen in dieser Gleichung die Abstände y_I, y_{II} usw. mit verschiedenen Vorzeichen genommen werden, wenn sie zu verschiedenen Seiten der Achse x—x liegen. (Fig. 84.)

Diese Beziehung (V) werden wir zur Bestimmung der Lage der Nullinie bei zusammengesetzten Querschnitten dauernd verwenden.

§ 47.

Wiederholungen und Ergänzungen.

1. Die ursprüngliche Bedingung zur Bestimmung der Lage der Nullinie lautete: Die Nullinie hat eine solche Lage, daß die Gleichung erfüllt ist

$$\text{(I)} \qquad \boxed{f_1 \cdot y_1 + \ldots + f_m \cdot y_m = f_n \cdot y_n + \ldots + f_z \cdot y_z.}$$

Digitized by Google

Hierin bezeichnen $f_1 \ldots f_m$ die Streifen auf der einen Seite und $f_n \ldots f_z$ die Streifen auf der anderen Seite der Nullinie. Entsprechend sind die Bezeichnungen der Abstände y der einzelnen Streifen bis zu der Nullinie.

Dieses ist die ursprüngliche Formel, wie sie sich bei der Ableitung der Biegungsspannungen ergeben hat. Aus ihr folgt übrigens sofort der Satz: *Hat der Querschnitt eine horizontale Symmetrieachse, so fällt die Nullinie mit jener zusammen.* Denn in diesem Falle, d. h., wenn der untere Teil des Querschnittes das Spiegelbild des obigen Teiles ist, kann man ja die beiden Teile einfach miteinander vertauschen, so daß die obige Bedingung (I) direkt erfüllt ist. (Beispiele: Rechteck, Kreis usw.)

2. Bei unregelmäßigen Querschnitten ist diese Bedingung (I) wenig geeignet zur Aufsuchung der Nullinie. Deshalb haben wir sie umgeformt in

$$\text{(II)} \qquad \boxed{z = \frac{f_1 \cdot z_1 + f_2 \cdot z_2 + \cdots}{F}},$$

indem wir den Abstand z der Nullinie von einer anzunehmenden Achse x—x als Unbekannte einführten. Die Produkte $f_1 \cdot z_1$ usw. heißen die „*statischen Momente der Flächenstreifen*" f_1 usw. für (oder „in bezug auf") die Achse x—x. Die Anzahl der Flächenstreifen muß unendlich groß genommen werden, wenn die Nullinie vollständig genau ermittelt werden soll. Diese Form (II) eignet sich besonders, um bei bestimmten Figuren (z. B. Dreieck, Halbkreis usw.) für die Lage der Nullinie mathematische Formeln abzuleiten (§ 49).

3. Hat man auf diese Weise für bestimmte Grundformen die Nullinien ein für allemal ermittelt, so lassen sich auch leicht die Querschnitte untersuchen, die aus mehreren solcher Grundformen zusammengesetzt sind (z. B. aus mehreren Rechtecken, Kreisabschnitten usw.). Für diese Fälle haben wir die Formel abgeleitet:

$$\text{(III)} \qquad \boxed{z = \frac{F_I \cdot y_I + F_{II} \cdot y_{II} + \cdots}{F}}.$$

Hier ist z der Abstand der Nullinie des Gesamtquerschnittes F von einer anzunehmenden Achse x—x. F_I, F_{II} usw. sind die einzelnen Flächen, aus denen sich die Gesamtfläche F zusammensetzt; und y_I, y_{II} usw. sind die Abstände der Nullinien dieser einzelnen Flächen von der Achse x—x. Man betrachtet also hier-

Digitized by Google

bei zunächst jede Teilfläche (Rechteck, Kreis usw.) als eine selbständige Querschnittsfläche, denkt nach Gleichung (I) oder (II) ihre Nullinie ermittelt und gewissermaßen als eine feststehende Hilfslinie in die betreffende Teilfläche eingezeichnet. Die Produkte $F_I \cdot y_I$ usw. (Flächeninhalt $\times$ Nullinienabstand) heißen die „*statischen Momente der Flächen*" F_1 usw. für die Achse $x—x$.

Diese Formel (III) ist die wichtigste für die Praxis, da wir ja alle vorkommenden Querschnitte entweder genau oder wenigstens angenähert in Rechtecke, Halb- oder Viertelkeise usw. auflösen können. Die Lage der Nullinie bei den einzelnen Grundformen wird man z. B. beim Rechteck, Kreis, Dreieck oder Trapez (§ 49) auswendig lernen; bei anderen Formen — namentlich bei den Walzeisen — schlägt man sie in den Tabellen nach.

Zusatz: Die mit den Formeln (II) und (III) in Zusammenhang stehenden Gleichungen

$$(1) \qquad F \cdot z = f_1 \cdot z_1 + f_2 \cdot z_2 + \ldots,$$

$$(2) \qquad F \cdot z = F_I \cdot y_I + F_{II} \cdot y_{II} + \ldots$$

werden wir später auch gelegentlich anderer Untersuchungen verwenden, so daß es gut ist, sie sich zu merken. In Worten sagen sie aus:

(1) ***Das statische Moment einer Fläche F in bezug auf eine Achse x—x ist gleich der Summe der statischen Momente der einzelnen Flächenstreifen in bezug auf diese Achse.***

(2) ***Das statische Moment einer zusammengesetzten Fläche F für eine Achse x—x ist gleich der Summe der statischen Momente der Einzelflächen für diese Achse.***

§ 48.

Der „Schwerpunkt".

In einem gewissen Zusammenhange mit der Aufgabe: „die Lage der Nullinie ist zu bestimmen" steht eine andere Aufgabe aus der allgemeinen Mechanik, nämlich die Bestimmung des sog. „*Schwerpunktes*". Allerdings ist dieser Zusammenhang mehr äußerlich, indem nämlich dieselben Rechenmethoden bei diesen beiden Aufgaben auftreten. An und für sich hat der „Schwerpunkt" nichts mit den Biegungsspannungen zu tun.

I. „Die Schwerachsen".

Auf einen scheibenförmigen Körper (Fig. 85) mögen Kräfte wirken, die untereinander parallel laufen und gleichmäßig über dem Körper verteilt sind. Der Betrag, der von diesen verteilten

Digitized by Google

Kräften auf ein Quadratzentimeter des Körpers entfällt, sei g kg. Denkt man sich den Körper in lauter Flächenelemente von der Größe f eingeteilt, so wirke also auf jedes derselben eine Kraft im Betrage von $g \cdot f$ kg.

In Fig. 85a bis c sind verschiedene Fälle derartiger Kräftegruppen dargestellt. Der Deutlichkeit wegen sind nur einige Flächenelemente f herausgegriffen und die zugehörigen Kräfte

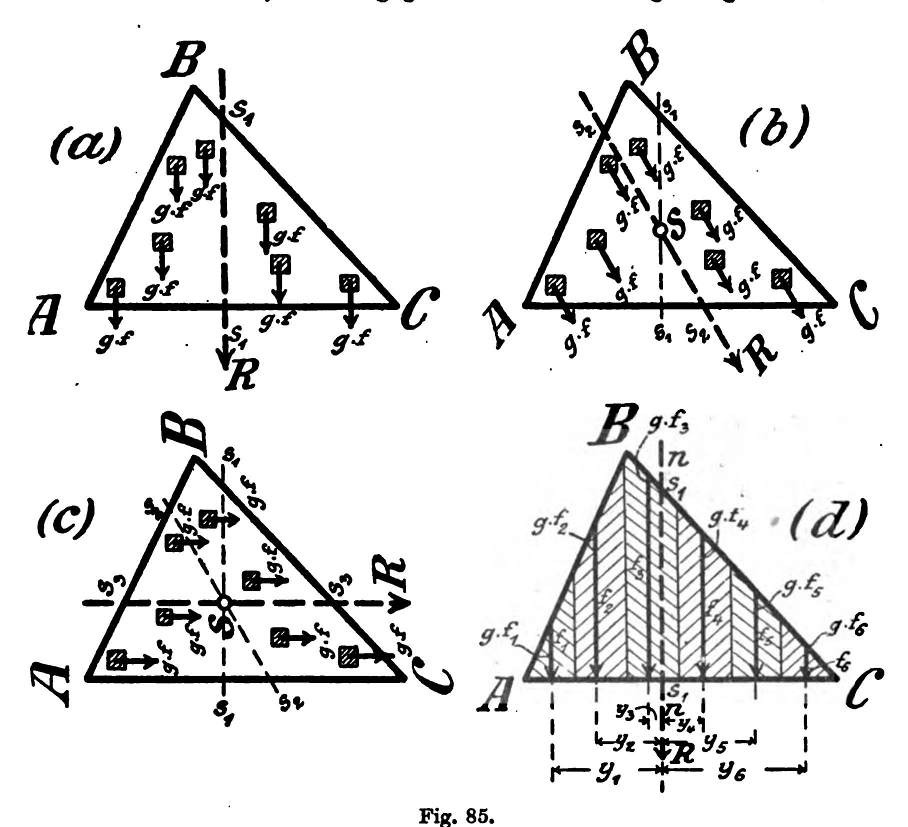


Fig. 85.

$g \cdot f$ eingezeichnet. In Wirklichkeit folgen diese Kräfte natürlich unmittelbar aufeinander. Das wichtigste Beispiel einer solchen Beanspruchung bildet das *Eigengewicht* eines Körpers. Besteht die Scheibe Fig. 85 aus gleichmäßigem Material, so wirkt auf jedes Flächenelement derselben infolge der „*Schwerkraft*" (Erdanziehung) eine Kraft von der Größe $g \cdot f$, worin g das Gewicht eines Quadratzentimeters und f den Flächeninhalt des Elements bedeutet. Wenn man nun den Körper in verschiedene Lagen dreht, wirken diese Kräfte $g \cdot f$ in verschiedenen Richtungen zu dem Körper. Auf

Digitized by Google

diese Weise kommen die in Fig. 85a bis c gezeichneten Kräftegruppen zustande.

Nun wollen wir uns für die verschiedenen Fälle die Resultierenden R der Kräfte eingezeichnet denken. Die Linien $s_1—s_1$, $s_2—s_2$ usw., in denen diese Resultierenden die Scheibe schneiden, nennen wir die **„Schwerlinien“** oder **„Schwerachsen“** des Körpers. Die Bezeichnung kommt natürlich daher, weil die „Schwerkraft“ (Erdanziehung) bei den verschiedenen Stellungen des Körpers innerhalb der Linien $s_1—s_1$ usw. auf ihn einwirkt. Die Bestimmung dieser „Schwerachsen“ sei unsere nächste Aufgabe.

Um die Schwerachse für Fig. 85a zu bestimmen, teilen wir die Scheibe in lauter Streifen parallel der Richtung der Kräfte. Die Inhalte der Streifen seien (Fig. 85d)

$$f_1, \quad f_2, \quad f_3 \quad \text{usw.}$$

Die auf diese Streifen entfallenden Kräfte haben also die Größen

$$g \cdot f_1, \quad g \cdot f_2, \quad g \cdot f_3 \quad \text{usw.}$$

Um diese Kräfte in Fig. 85d einzeichnen zu können, müssen wir die Streifen unendlich schmal machen; dann fallen Kraft und Streifen in eine Linie zusammen, so daß die Lage der Kräfte genau bestimmt ist. Zur Veranschaulichung dieser wirklichen Verhältnisse möge jedoch als Annäherung die in Fig. 85d gewählte Einteilung in sechs Streifen genügen. Die Kräfte $g \cdot f_1$, $g \cdot f_2$ usw. lassen sich durch die Höhen der einzelnen Streifen darstellen, wenn man diese gleich breit macht. Auf diese Weise bekommt man ein anschauliches Bild von den Größen der Kräfte.

Zur Bestimmung der Lage von R denken wir uns die Resultierende eingezeichnet und auf ihr einen Bezugspunkt für die statischen Momente gewählt. Dann besteht nach dem Satze vom statischen Moment der Kräfte (§ 9) die Beziehung:

$$g f_1 \cdot y_1 + g f_2 \cdot y_2 + g f_3 \cdot y_3 - g f_4 \cdot y_4 - g f_5 \cdot y_5 - g f_6 \cdot y_6 = R \cdot 0 .$$

(Der Abstand der Resultierenden vom Bezugspunkte ist gleich Null.) Nun ziehen wir g vor die Klammer, kürzen durch g und erhalten:

$$g\,(f_1 \cdot y_1 + f_2 \cdot y_2 + f_3 \cdot y_3 - f_4 \cdot y_4 - f_5 \cdot y_5 - f_6 \cdot y_6) = 0 ,$$

$$\text{(I)} \qquad f_1 \cdot y_1 + f_2 \cdot y_2 + f_3 \cdot y_3 - f_4 \cdot y_4 - f_5 \cdot y_5 - f_6 \cdot y_6 = 0$$

oder

$$\text{(II)} \qquad f_1 \cdot y_1 + f_2 \cdot y_2 + f_3 \cdot y_3 = f_4 \cdot y_4 + f_5 \cdot y_5 + f_6 \cdot y_6 .$$

Hiermit ist die Lage der Schwerachse $s_1—s_1$ bestimmt: Sie muß so eingezeichnet werden, daß die Summe der „statischen Mo-

Digitized by Google

mente“ der auf der einen Seite liegenden Flächenstreifen ebenso groß ist wie die Summe der „statischen Momente“ der auf der anderen Seite liegenden Flächenstreifen.

II. Nullinie und Schwerachse sind dieselbe Linie.

Vergleicht man die obige, zur Bestimmung der Schwerachse dienende Aussage mit der Lösung der in § 46 und § 47 behandelten Aufgabe der Bestimmung der Nullinie, so erkennt man, daß die Lösungen miteinander übereinstimmen. Die beiden Aufgaben haben an und für sich nichts Gemeinsames; sie führen aber zu denselben Lösungen. Hat man also für die Fläche Fig. 85d die Lage der Nullinien $n—n$ bestimmt und braucht zufällig — für irgendeine andere Untersuchung — die Lage der Resultierenden R (Schwerachse $s_1—s_1$), so kann man ohne weiteres die Lage von $n—n$ verwenden. Meistens ist es aber umgekehrt: Die Schwerachsen sind für die verschiedenen Flächen bereits seit langem bestimmt, da sie für viele Untersuchungen, namentlich in der Lehre von den Bewegungen der Körper, gebraucht werden. Dieses machen wir uns natürlich zunutze, wenn wir für derartige Querschnittsformen die Lage der Nullinie brauchen. Außerdem sei darauf hingewiesen, daß man die Lagen der Schwerachsen auch durch einen Versuch bestimmen kann. Zu diesem Zwecke schneiden wir den Körper zum Beispiel in Pappe aus und hängen ihn so auf, daß er im Ruhezustand bleibt. Der Aufhängepunkt muß dann auf der Resultierenden R liegen, und wir brauchen also nur noch durch ihn eine Linie in der Kraftrichtung (Vertikalrichtung) zu ziehen, um die Lage der Schwerlinie $s_1—s_1$ und somit auch der Nullinie $n—n$ zu haben.

III. Der Schwerpunkt.

Zeichnet man für alle möglichen Kraftrichtungen die Schwerachsen $s_1—s_1$, $s_2—s_2$ usw. (Fig. 85a bis c) ein, so zeigt sich, daß sämtliche Schwerachsen sich in *einem* Punkte schneiden. *Dieser Punkt, durch den sämtliche Schwerachsen hindurchgehen, heißt der Schwerpunkt* S.

Der Beweis dafür, daß sämtliche Schwerachsen einen Punkt gemeinsam haben, braucht an dieser Stelle nicht geführt zu werden. (Er ist übrigens sehr einfach aus der Bestimmung der Schwerachsen zu folgern.) Es möge nur auf die daraus folgende besondere Eigenschaft des „Schwerpunktes“ hingewiesen werden: Unterstützt man den Körper im Schwerpunkte, so bleibt er in jeder Stellung

Digitized by Google

im Gleichgewicht. Denn bei einer solchen Unterstützung geht ja die Resultierende aus den Anziehungskräften der Erde stets durch den Aufhängepunkt, so daß keine Bewegung eintreten kann.

Für die Festigkeitslehre hat der Schwerpunkt folgenden Nutzen. Da die Nullinie stets mit einer Schwerachse $s-s$ zusammenfällt, gilt der Satz:

Die Nullinie geht durch den Schwerpunkt des Querschnittes.

Die Lage des Schwerpunktes ist wegen der vielen anderen Untersuchungen, zu denen er in der allgemeinen Mechanik gebraucht wird, bereits für alle öfters vorkommenden Figuren bestimmt. Von diesen Angaben macht man dann natürlich bei der Aufsuchung der Nullinien Gebrauch. Auch wenn wir für Formel (III) in § 47 die Abstände y_I, y_{II} usw. brauchen, die die Nullinien der einzelnen Querschnittsteile F_I, F_{II} von der anzunehmenden Achse $x-x$ haben, werden wir von der Übereinstimmung der Nullinien mit den Schwerachsen Gebrauch machen: Wir zeichnen die Schwerpunkte S_I, S_{II} usw. der Querschnittsteile F_I, F_{II} usw. ein, und deren Abstände von der Achse $x-x$ sind dann auch die gesuchten Abstände y_I, y_{II} usw.

Allgemein gilt also jeder für die Nullinien abgeleitete Satz auch für die Schwerlinien und umgekehrt. Unter „statisches Moment einer Fläche bzw. eines Flächenstreifens" können wir also auch das Produkt aus dieser Fläche bzw. dieses Flächenstreifens mal dem Abstand des *Schwerpunktes* verstehen. Wegen des Folgenden wollen wir noch die in § 47 am Schlusse angeführten Sätze (1) und (2) auch für den Schwerpunkt zusammenstellen:

$$(1) \qquad F \cdot z = f_1 \cdot z_1 + f_2 \cdot z_2 + \dots,$$

$$(2) \qquad F \cdot z = F_I \cdot y_I + F_{II} \cdot y_{II} + \dots$$

Hierin sind z, y_I, y_{II} usw. die Abstände der Schwerpunkte der Flächen F, F_I, F_{II} usw. von einer Achse $x-x$ und z_1, z_2 usw. die Abstände der einzelnen (unendlich schmalen) Flächenstreifen von dieser Achse.

§ 49.

Beispiele.

Erste Aufgabe.

Für den dreieckigen Querschnitt ist die horizontale Schwerachse zu bestimmen!

Die Bestimmung der Achse $n-n$ ist nach § 47, Absatz 2 durchgeführt. Die Achse $x-x$ geht durch die Spitze B. Be-

Digitized by Google

zeichnen wir den Abstand des Schwerpunktes bis zur Achse $x—x$ mit z, so ist mit den in Fig. 86 eingeschriebenen Bezeichnungen:

$$\text{(I)} \qquad z = \frac{f_1 \cdot y_1' + f_2 \cdot y_2' + \dots + f_n \cdot y_n'}{F}.$$

Die Inhalte der Flächenstreifen f_1, f_2 usw. und deren Abstände y_1', y_2' usw. bis zur x-Achse ergeben sich leicht aus folgender Zwischenrechnung: Die Höhe des gesamten Dreieckes sei h; die Höhe der einzelnen Schichten nehmen wir der Einfachheit wegen

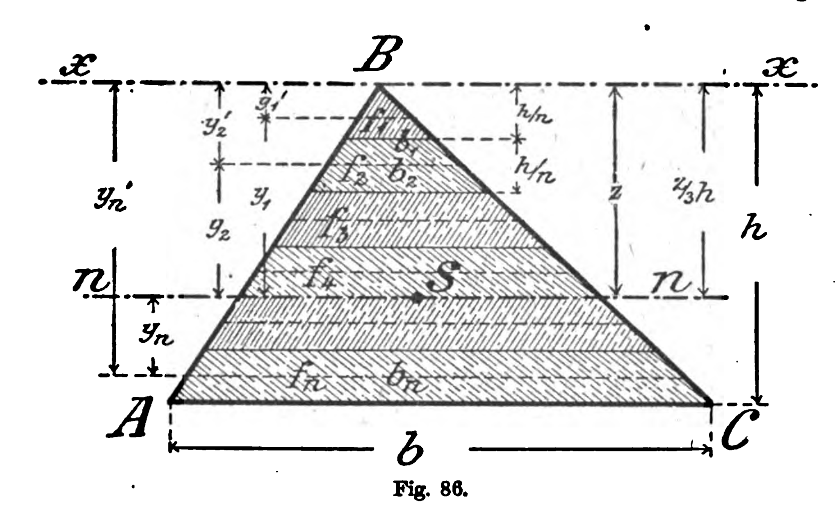


Fig. 86.

einander gleich. Haben wir also n Flächenstreifen, so hat jeder eine Höhe gleich $\frac{h}{n}$. Bezeichne ich noch die Grundlinie von f_1 mit b_1, so ist der Inhalt des ersten Streifens:

$$f_1 = \frac{1}{2} \cdot b_1 \cdot \frac{h}{n}.$$

Nun verhält sich aber im Dreiecke ABC

$$b_1 : \frac{h}{n} = b : h,$$

folglich ist

$$b_1 = \frac{b}{h} \cdot \frac{h}{n} = \frac{b}{n},$$

und der für f_1 aufgestellte Ausdruck erhält die einfache Form:

$$f_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{b}{n} \cdot \frac{h}{n} = \frac{b\,h}{2\,n^2}.$$

Digitized by Google

In derselben Weise bestimmen wir den Flächeninhalt von f_2. Die *Mittellinie* dieses Trapezes ist mit b_2 bezeichnet; dann ist

$$f_2 = b_2 \cdot \frac{h}{n}.$$

Nun hat b_2 von der Spitze B den Abstand $\left(\frac{h}{n} + \frac{1}{2} \cdot \frac{h}{n}\right) = \frac{3}{2} \cdot \frac{h}{n}$; folglich verhält sich

$$b_2 : \frac{3}{2} \cdot \frac{h}{n} = b : h,$$

so daß sich

$$b_2 = \frac{b}{h} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{h}{n} = \frac{3}{2} \frac{b}{n}$$

ergibt. Nach Einsetzung dieses Wertes erhält man:

$$f_2 = \frac{3}{2} \cdot \frac{b}{n} \cdot \frac{h}{n} = \frac{3\,b\,h}{2\,n^2}.$$

Wenn wir nun in derselben Weise die Flächeninhalte der übrigen Streifen, f_3 bis f_n, bestimmen, bekommen wir

$$f_3 = \frac{5\,b\,h}{2\,n^2},$$

$$f_4 = \frac{7\,b\,h}{2\,n^2} \quad \text{usw.}$$

In derselben einfachen Weise lassen sich die Abstände y_1', y_2' usw. ausdrücken:

Für den Streifen f_1 ist der Abstand $y_1' = \frac{1}{2} \frac{h}{n}$

" " " f_2 " " " $y_2' = \frac{3}{2} \frac{h}{n}$

" " " f_3 " " " $y_3' = \frac{5}{2} \frac{h}{n}$

" " " f_4 " " " $y_4' = \frac{7}{2} \frac{h}{n}$

usw.

(Wir rechnen die Abstände der unendlich schmalen Streifen stets bis Mitte Höhe des Streifens.)

Nun haben wir alle Hilfswerte beisammen und können den Abstand z von Gleichung (I) ausrechnen:

$$z = \frac{\frac{b\,h}{2\,n^2} \cdot \frac{h}{2\,n} + \frac{3\,b\,h}{2\,n^2} \cdot \frac{3\,h}{2\,n} + \frac{5\,b\,h}{2\,n^2} \cdot \frac{5\,h}{2\,n} + \cdots}{\frac{1}{2}\,b\,h}$$

Digitized by Google

$$= \frac{\frac{b\,h^2}{4\,n^3}(1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots)}{\frac{1}{2}\,b\,h}$$

$$\text{(II)} \qquad z = \frac{h}{2\,n^3}(1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots)\,.$$

In der Klammer stehen n Glieder, da zu jedem Flächenstreifen ein Glied gehört. Nun haben wir schon in § 39 gesehen, daß die Summe der Quadrate der ersten n ungeraden Zahlen sich schreiben läßt:

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots = \tfrac{4}{3}\,n^3 - \tfrac{1}{3}\,n\,.$$

Diese Abkürzung für den Klammerausdruck in Gleichung (II) eingesetzt, ergibt

$$z = \frac{h}{2\,n^3}\left(\tfrac{4}{3}\,n^3 - \tfrac{1}{3}\,n\right)$$

$$= h\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{6\,n^2}\right).$$

Um ein mathematisch genaues Resultat für den Abstand z zu erhalten, müssen wir in dieser Formel die Anzahl n der Flächenstreifen unendlich groß nehmen. Für diesen Fall wird die Formel noch einfacher, da

$$\frac{1}{6\,n^2} = \frac{1}{\infty} = 0$$

ist. Für z ergibt sich also der absolut genaue Wert:

$$z = \tfrac{2}{3}\,h\,.$$

Zusatz: In derselben Weise, wie beim Dreieck, kann man nun für andere Figuren die mathematischen Formeln zur Bestimmung der Schwerachsen bzw. der Nullinien ableiten. Die betreffenden Resultate sind im § 55 zusammengestellt.

Zweite Aufgabe.

Für den in Fig. 84 gezeichneten Querschnitt ist die horizontale Schwerachse zu bestimmen!

Die Abmessungen sind:

$$b_1 = 6{,}0 \text{ cm}, \qquad h_1 = 2{,}4 \text{ cm};$$
$$b_2 = 4{,}0 \text{ cm}, \qquad h_2 = 1{,}6 \text{ cm}.$$

Digitized by Google

Wir wenden natürlich Formel (III) aus § 47 an, da ja der Querschnitt aus bekannten Figuren (Rechtecken) zusammengesetzt ist. Die Inhalte der Einzelflächen und des Gesamtquerschnittes sind:

$$F_I = b_1 \cdot h_1 = 6{,}0 \cdot 2{,}4 = 14{,}4 \text{ qcm},$$
$$F_{II} = b_2 \cdot h_2 = 4{,}0 \cdot 1{,}6 = 6{,}4 \text{ qcm},$$
$$F = F_I + F_{II} = 14{,}4 + 6{,}4 = 20{,}8 \text{ qcm}.$$

Ihre Schwerpunktsabstände bis zu der in Fig. 84 angenommenen x-Achse betragen

$$y_I = \tfrac{1}{2} h_1 = 1{,}2 \text{ cm},$$
$$y_{II} = \tfrac{1}{2} h_2 = 0{,}8 \text{ cm}.$$

Somit wird der Abstand des Schwerpunktes des gesamten Querschnittes:

$$z = \frac{+14{,}4 \text{ cm}^2 \cdot 1{,}2 \text{ cm} - 6{,}4 \text{ cm}^2 \cdot 0{,}8 \text{ cm}}{20{,}8 \text{ cm}^2}$$
$$= \frac{+17{,}3 \text{ cm}^3 - 5{,}1 \text{ cm}^3}{20{,}8 \text{ cm}^2} = \frac{+12{,}2 \text{ cm}^3}{20{,}8 \text{ cm}^2}$$
$$= +0{,}59 \text{ cm}.$$

Bei den Abständen y_I und y_{II} haben wir den oberhalb der x-Achse liegenden mit *positivem* und den unterhalb der x-Achse liegenden mit negativem Zeichen eingeführt. Da nun für z ein *positiver* Wert herausgekommen ist, liegt es oberhalb der x-Achse.

Zusatz: Es empfiehlt sich stets, derartige Schwerpunkts- bzw. Nullinienbestimmungen in Form von Tabellen durchzuführen. Dadurch wird die Rechnung viel übersichtlicher und namentlich auch geschützter vor Rechenfehlern. Für die obige Aufgabe erscheint dann die Ausrechnung in folgender Form:

Querschnittsteil	Flächeninhalt F (cm²)	Schwerpunktsabstand y bis Achse x—x (cm)	Statisches Moment $F \cdot y$ (cm³)
Oberes Rechteck	$6{,}0 \cdot 2{,}4 = 14{,}4$	$+1{,}2$	$+14{,}4 \cdot 1{,}2 = +17{,}3$
Unteres Rechteck	$4{,}0 \cdot 1{,}6 = 6{,}4$	$-0{,}8$	$-6{,}4 \cdot 0{,}8 = -5{,}1$
	Gesamt 20,8		Gesamt $+12{,}2$

Abstand des Gesamtschwerpunktes:

$$z = \frac{+12{,}2}{20{,}8} = +0{,}59 \text{ cm (oberhalb } x-x).$$

Digitized by Google

Dritte Aufgabe.

Man bestimme die Nullinie von Fig. 84 zur Kontrolle noch einmal, und zwar dadurch, daß man die x-Achse durch den Schwerpunkt S_I des oberen Rechteckes nimmt!

Dann wird die Berechnung etwas einfacher, da das statische Moment des oberen Rechteckes für diese x-Achse gleich Null ist.

Vierte Aufgabe.

Der Obergurt eines Kranträgers besteht aus 2 [N. P. 22 und darauf genieteter Kranschiene Rote Erde Nr. 2 (Aachener Hütten-Aktien-Verein). Der Schwerpunkt ist zu bestimmen!

(Man zeichne den Querschnitt selber auf!)

Die Flächeninhalte der Querschnittsteile und die Lage des Schwerpunktes bei der Kranschiene entnehmen wir aus den Profiltabellen. Die x-Achse ist durch den Schwerpunkt der [-Eisen gelegt.

Querschnittsteil	Flächeninhalt F (cm²)	Schwerpunktsabstand y bis Achse $x-x$ (cm)	Statisches Moment $F \cdot y$ (cm³)
2 [N. P. 22	$2 \cdot 37{,}4 = 74{,}80$	0,0	0
1 Kranschiene R. E. Nr. 2	41,01	$11{,}0 + 2{,}68 = 13{,}68$	$41{,}01 \cdot 13{,}68 = 561$
	Gesamt 115,81		Gesamt 561

Abstand des Gesamtschwerpunktes:

$$s = \frac{561}{115{,}81} = 4{,}84 \text{ cm (oberhalb } x-x).$$

Fünfte Aufgabe.

Ein I N. P. 30 *ist im unteren Flansch durch zwei Nietlöcher von 2,0 cm ∅ geschwächt. Der Schwerpunkt dieses Querschnittes ist zu bestimmen!*

(Man führe die Zeichnung selber aus!)

Als Fläche F_I nehmen wir den *vollen* Querschnitt des I-Eisens, als Fläche F_{II} die Nietlöcher. Da letztere abzuziehen sind, muß F_{II} mit *negativem* Vorzeichen in die Rechnung eingeführt werden. Im übrigen ist natürlich der Rechnungsgang derselbe. Die x-Achse ist durch den Schwerpunkt des I-Eisens gezogen, und die Abstände *nach unten positiv*, nach oben negativ genommen.

Digitized by Google

Querschnittsteil	Flächeninhalt F (cm²)	Schwerpunktsabstand y bis Achse $x-x$ (cm)	Statisches Moment $F \cdot y$ (cm³)
1 I N. P. 30	69,0	0,0	0,0
2 Nietlöcher 2,0 ∅	$-2 \cdot 2{,}0 \cdot 1{,}62 = -6{,}5$	$15{,}0 - 0{,}8 = +14{,}2$	$-6{,}5 \cdot +14{,}2 = -92{,}3$
	Gesamt 62,5		Gesamt −92,3

Abstand des Gesamtschwerpunktes:

$$z = \frac{-92{,}3}{62{,}5} = -1{,}48 \text{ cm (oberhalb } x-x).$$

Sechste Aufgabe.

Ein Querschnitt bestehe aus

1 Stehblech . . . . 200 · 10 ,
2 ∢-Eisen . . . . 80 · 80 · 10 ,
1 obere Lamelle . . . . 190 · 12 ,
2 Nietlöcher von je 20 cm ∅ .

Die horizontale Schwerachse dieses Querschnittes ist zu bestimmen! (Man zeichne den Querschnitt selber auf! Die Nietlöcher gehen durch die Lamelle und die horizontalen Winkelschenkel.) Die x-Achse ist durch die obere Kante des Stehbleches genommen. Die Richtung *nach oben* ist *negativ*, die Richtung nach unten positiv genommen.

Querschnittsteil	Flächeninhalt F (cm²)	Schwerpunktsabstand y bis Achse $x-x$ (cm)	Statisches Moment $F \cdot y$ (cm³)
1 Stehblech 200 · 10	$20{,}0 \cdot 1{,}0 = 20{,}0$	+10,0	$+20{,}0 \cdot 10{,}0 = +200{,}0$
2 ∢ 80 · 80 · 10	$2 \cdot 15{,}1 = 30{,}2$	+2,34	$+30{,}2 \cdot 2{,}34 = +70{,}7$
1 Lamelle 190 · 12	$19{,}0 \cdot 1{,}2 = 22{,}8$	−0,6	$-22{,}8 \cdot 0{,}6 = -13{,}7$
2 Nietlöcher 2,0 ∅	$-2 \cdot 2{,}0 \cdot 2{,}2 = -8{,}8$	−0,1	$-8{,}8 \cdot (-0{,}1) = +0{,}9$
	Gesamt 64,2		Gesamt +257,9

Abstand des Gesamtschwerpunktes:

$$z = \frac{+257{,}9}{64{,}2} = +4{,}0 \text{ cm (unterhalb } x-x).$$

Digitized by Google

§ 49a.

Zusammenfassung zum 8. Vortrag.

In diesem Vortrage ist das Verfahren zur Bestimmung der Lage der Nullinie erläutert. Das **Grundprinzip** hatte sich ja direkt bei der Ableitung der Biegungsspannungen (§ 38) ergeben: **Die Nullinie hat die Eigenschaft, den Querschnitt so zu zerlegen, daß** (I) $f_1 \cdot y_1 + \ldots = f_n \cdot y_n + \ldots$ ist. Da aber die direkte Anwendung dieses Grundprinzips schließlich auf ein Probieren hinausläuft, haben wir es noch etwas methodischer umgestaltet: Wir nehmen irgendwo eine Achse x—x an und bestimmen die Lage der Nullinie n—n dadurch, daß wir den Abstand z von n—n bis x—x ausrechnen nach den Formeln:

(II) $$z = \frac{f_1 \cdot z_1 + f_2 \cdot z_2 + \ldots}{F}$$ (zur Aufstellung mathematischer Ausdrücke; z. B. $z = \frac{2}{3} h$ beim Dreieck),

(III) $$z = \frac{F_I \cdot y_I + F_{II} \cdot y_{II} + \ldots}{F}$$ (zur praktischen Ausrechnung bei zusammengesetzten Flächen).

Schließlich hatte sich noch eine interessante Heranziehung eines ganz anderen Gebietes der Mechanik ergeben: Die Nullinie geht durch einen besonderen Punkt hindurch, der aber an und für sich nichts mit der Festigkeitslehre zu tun hat, nämlich durch den Schwerpunkt des Querschnittes. Hierdurch häufig Erleichterung beim Aufsuchen der Nullinie.

Bemerkung: Die Schwerachse (Nullinie) kann man auch graphisch finden; z. B. in Fig. 85d, indem man zu den Kräften $g f_1$, $g f_2$ usw. ein Seilpolygon zeichnet und hierdurch die Lage von R bestimmt. (Hierbei ist für g irgendeine Zahl, z. B. 1, einzusetzen; die Flächeninhalte f_1, f_2 usw. können bei gleich breiten Streifen durch die Höhen dargestellt werden.) Das analytische Verfahren ist aber so einfach, übersichtlich und bequem, daß wirklich kein Grund vorliegt, hier noch Zeichenarbeit hineinzubringen.

---

9. Vortrag:

Bestimmung des Trägheitsmomentes für die verschiedenen Querschnittsformen. Das Widerstandsmoment.

§ 50.

Allgemeine Methode zur Bestimmung des Trägheitsmomentes.

I. Grundprinzip.

Die Bezeichnung „*Trägheitsmoment J*“ haben wir der Summe

$$f_1 \cdot y_1^2 + f_2 \cdot y_2^2 + f_3 \cdot y_3^2 + \ldots$$

gegeben. Hierin bedeuten f_1, f_2 usw. die parallel der Nullinie eingezeichneten Flächenstreifen und y_1, y_2 usw. deren Abstände

Digitized by Google

bis zur Nullinie. Diese Summe kommt im Nenner der Biegungsgleichung

$$\sigma = \frac{M}{J} \cdot y$$

vor und muß also zur Ermittlung der Normalspannungen σ für die verschiedenen Querschnitte ebenfalls berechnet werden.

Um eine kurze Bezeichnung zu haben, wollen wir im folgenden das Produkt aus einem Flächenstreifen f mal dem Quadrate seines Abstandes y von einer Achse das „*quadratische Moment*“ dieses Flächenstreifens für die betreffende Achse nennen. Entsprechend bezeichnen wir das Produkt aus einer Fläche F mal dem Quadrate ihres *Schwerpunktsabstandes* von einer Achse als das „*quadratische Moment*“ dieser Fläche für die betreffende Achse. Von den „statischen“ Momenten unterscheiden sich die „quadratischen“ mithin dadurch, daß die Abstände y nicht in der ersten, sondern in der zweiten Potenz zu nehmen sind.

Das Trägheitsmoment ist also die Summe der quadratischen Momente der Flächenstreifen, wobei sämtliche Glieder stets mit positiven Vorzeichen einzuführen sind. Augenscheinlich haben Trägheitsmoment und statisches Moment eine gewisse Ähnlichkeit miteinander. Man bezeichnet sie beide als „Flächenmomente“.

Um nun für einen so unregelmäßigen Querschnitt wie Fig. 83 (in § 45) das Trägheitsmoment J zu ermitteln, bleibt nichts anderes übrig, als einfach jeden Flächenstreifen mit dem Quadrate seines Abstandes von der Nullinie $n—n$ zu multiplizieren. (Letztere muß natürlich vorher bestimmt sein.). Die Flächenstreifen müssen unendlich schmal genommen werden, damit die Abstände y genau angegeben werden können. In der Tat haben wir ja auch bereits in dieser Weise — unter Annahme unendlich dünner Schichten — für das Rechteck den genauen Wert des Trägheitsmomentes bestimmt (§ 39). Für einige andere Querschnitte werden die betreffenden Berechnungen im § 53 durchgeführt werden. Ähnlich wie bei Bestimmung der Nullinie eignet sich diese allgemeine Methode besonders dazu, um für bestimmte Grundformen (Rechteck, Dreieck, Kreis usw.) mathematische Formeln für die Trägheitsmomente aufzustellen.

II. Einführung eines Hilfsbegriffes (Trägheitsmoment J_x).

Mitunter ist es bequemer, die quadratischen Momente der Flächenstreifen nicht direkt für die Nullinie $n—n$, sondern zunächst für irgendeine andere, zu $n—n$ parallele Achse $x—x$ auszurechnen (Fig. 83). Wir multiplizieren dann also jeden Flächen-

Digitized by Google

streifen mit dem Quadrate seines Abstandes von der x-Achse und bilden schließlich die Summe dieser Produkte. Diese Summe möge das „*Trägheitsmoment des Querschnittes für* (oder ‚in bezug auf‘) *die x-Achse*“ heißen und mit J_x bezeichnet werden. Mit J_n dagegen wollen wir das Trägheitsmoment für die Nullinie bezeichnen. Letzteres ist also gewissermaßen das eigentliche Trägheitsmoment J, das in die Biegungsgleichung eingesetzt werden muß, um die Normalspannungen σ zu bestimmen. Der Wert J_x ist dagegen nur ein Hilfswert, der aber — wie wir bald sehen werden — öfters zur Vereinfachung der Rechenarbeit beiträgt.

III. Die Beziehung zwischen J_n und J_x.

Vorher wollen wir aber noch feststellen, in welcher mathematischen Beziehung diese beiden Werte J_n und J_x zueinander stehen. Für Fig. 83 ist das eigentliche Trägheitsmoment

$$\text{(I)} \qquad J_n = f_1 \cdot y_1^2 + f_2 \cdot y_2^2 + f_3 \cdot y_3^2 + f_4 \cdot y_4^2 + f_5 \cdot y_5^2 + f_6 \cdot y_6^2$$

und der Hilfswert

$$\text{(II)} \qquad J_x = f_1 \cdot z_1^2 + f_2 \cdot z_2^2 + f_3 \cdot z_3^2 + f_4 \cdot z_4^2 + f_5 \cdot z_5^2 + f_6 \cdot z_6^2 .$$

Nun bestehen aber zwischen den Abständen y und z die Beziehungen (Fig. 83; vgl. auch § 45):

$$\begin{aligned} y_1 &= z_1 - z\,, & y_4 &= z - z_4\,, \\ y_2 &= z_2 - z\,, & y_5 &= z - z_5 \quad (z_5 = 0)\,, \\ y_3 &= z_3 - z \quad (=0)\,, & y_6 &= z + z_6\,. \end{aligned}$$

(z ist der Abstand zwischen der Nullinie und der x-Achse.) Setzen wir diese Werte in Gleichung (I) ein, so wird

$$\begin{aligned} J_n &= f_1(z_1 - z)^2 + f_2(z_2 - z)^2 + f_3(z_3 - z)^2 + f_4(z - z_4)^2 + f_5(z - z_5)^2 + f_6(z + z_6)^2 \\ &= f_1(z_1^2 - 2 z_1 z + z^2) + \ldots + f_5(z_5^2 - 2 z_5 z + z^2) + f_6(z_6^2 + 2 z_6 z + z^2)\,. \end{aligned}$$

Nun multiplizieren wir die Klammern aus und erhalten drei Gruppen von Gliedern:

$$\begin{aligned} J_n = {} & f_1 \cdot z_1^2 + f_2 \cdot z_2^2 + f_3 \cdot z_3^2 + f_4 \cdot z_4^2 + f_5 \cdot z_5^2 + f_6 \cdot z_6^2 \\ & -2z(f_1 \cdot z_1 + f_2 \cdot z_2 + f_3 \cdot z_3 + f_4 \cdot z_4 + f_5 \cdot z_5 - f_6 \cdot z_6) \\ & +z^2(f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 + f_6)\,. \end{aligned}$$

Hieraus ergeben sich folgende Vereinfachungen:

a) In der ersten Zeile steht die Summe der quadratischen Momente der Flächenstreifen in bezug auf die x-Achse. Diese Summe haben wir das „*Trägheitsmoment des Querschnittes für die x-Achse*“ genannt und mit J_x bezeichnet. (Hilfswert J_x.)

Digitized by Google

b) In der zweiten Zeile steht in der Klammer die Summe der statischen Momente der Flächenstreifen in bezug auf die x-Achse. Diese Summe ist aber gleich dem Produkt aus der ganzen Fläche F und dem Abstande z der Nullinie (Schwerachse) bis zur x-Achse [vgl. Gleichung (1) in § 47]. Die zweite Zeile ergibt also

$$-2z \cdot Fz = -2F \cdot z^2 .$$

c) In der dritten Zeile steht in der Klammer die Summe aller Flächenstreifen, also die gesamte Fläche F.

Insgesamt erhalten wir also für J_n den Wert:

$$J_n = J_x - 2F \cdot z^2 + z^2 \cdot F ,$$

und hieraus folgt:

$$\text{(III)} \qquad \boxed{J_n = J_x - F \cdot z^2 .}$$

In Worten: *Das Trägheitsmoment für die Schwerachse (Nullinie) ist gleich dem Trägheitsmoment für eine beliebige, zu der Schwerachse parallele Achse, vermindert um das Produkt aus der Fläche mal dem Quadrat des Abstandes der beiden Achsen.*

Mit Hilfe dieser Formel (III) können wir J_n bestimmen, sobald J_x bekannt ist. Umgekehrt ergibt sich

$$\text{(IV)} \qquad \boxed{J_x = J_n + F \cdot z^2 .}$$

In Worten: ***Das Trägheitsmoment für eine zur Schwerachse parallele Achse ist gleich dem Trägheitsmoment für die eigene Schwerachse, vermehrt um das quadratische Moment der Fläche für die neue Achse.***

Aus dem Vergleich von J_x und J_n folgt: ***Das Trägheitsmoment für die Nullinie ist kleiner als das für irgendeine andere zu n—n parallele Achse.***

IV. Anwendung.

Wie bereits gesagt, erleichtert dieser Hilfsbegriff J_x öfters die Berechnung des eigentlichen Trägheitsmomentes J_n. Zum Beispiel dann, wenn man bei einem Querschnitte Nullinie und Trägheitsmoment gemeinsam bestimmen will. Dann kann man nämlich dieselben Abstände z, die man bei der Nullinie brauchte, auch beim Trägheitsmoment verwenden.

Eine solche Berechnung werde an dem Querschnitte Fig. 83 als Beispiel durchgeführt. Um hierfür zunächst die Nullinie zu er-

Digitized by Google

mitteln, nehmen wir eine Achse $x—x$ an und berechnen dann für diese Achse die Produkte $f_1 \cdot z_1$, $f_2 \cdot z_2$ usw. Da wir also diese Produkte sowieso ausrechnen müssen, ist es bequem, im Anschluß daran sogleich die Produkte $f_1 \cdot z_1^2$, $f_2 \cdot z_2^2$ usw. zu bestimmen, d. h. zunächst das Trägheitsmoment J_x für die Achse $x—x$ aufzustellen. Sobald dieses dann berechnet ist, haben wir mit Hilfe der oben entwickelten Formel

$$J_n = J_x - F \cdot z^2$$

auch sofort unser eigentliches, in die Biegungsformel einzusetzendes Trägheitsmoment J_n. Die gesamte Ausrechnung geschieht also nach folgendem Schema:

Streifen	Flächen-inhalt f	Abstand z (bis Achse $x—x$)	Statisches Moment $f \cdot z$ (für Achse $x—x$)	Quadratisches Moment $f \cdot z^2$ (für Achse $x—x$)
f_1	...	$\pm$...	$\pm$...	...
f_2	...	$\pm$...	$\pm$...	...
usw.				
	Gesamt $F=$...		Gesamt $S=\pm$...	Gesamt $J_x=$...
Abstand des Schwerpunktes von der x-Achse: $z = \frac{S}{F} = \pm \cdots$				
Trägheitsmoment für die Schwerachse: $J_n = J_x - F \cdot z^2 = \ldots$				

Zusammenfassung.

Die Ausgangsformel, wie sie sich bei der Ableitung der Biegungsspannung ergeben hatte, lautet: (I) $J = f_1 \cdot y_1^2 + f_2 \cdot y_2^2 + \ldots$ Diese Formel ist auch bereits sehr gut zu verwenden, hauptsächlich:

a) um für gewisse Grundformen mathematische Ausdrücke für J aufzustellen (z. B. Rechteck, § 39; Kreis, § 53);

b) für ganz unregelmäßige Querschnitte (z. B. Schienenprofil; je dünner die Streifen, desto genauer J).

In manchen Fällen (z. B. wenn man Nullinie und Trägheitsmoment gemeinsam bestimmen will) empfiehlt sich eine Abänderung: Man nimmt eine beliebige Achse $x—x$ an, mißt von dieser aus die Abstände z_1, z_2 usw. und berechnet zunächst den Hilfswert (II) $J_x = f_1 \cdot z_1^2 + f_2 \cdot z_2^2$ usw. (Sog. Trägheitsmoment für die x-Achse; hat aber keine besondere Bedeutung.) Von diesem schließt man dann zurück auf das eigentliche Trägheitsmoment: (III) $J_n = J_x - F \cdot z^2$.

Zusatz: Für solche Querschnitte, die sich aus bekannten Grundformen zusammensetzen, werden wir in § 51 noch weitere Vereinfachungen zur Berechnung von J ableiten.

Digitized by Google

§ 51.

Das Trägheitsmoment von Querschnitten, die aus bekannten Figuren gebildet werden.

Durch folgende Sätze können wir das Trägheitsmoment einer zusammengesetzten Fläche durch die Trägheitsmomente ihrer einzelnen Bestandteile ausdrücken.

I. Satz.

Besteht ein Querschnitt aus der Summe (bzw. Differenz) mehrerer Flächen, deren Nullinien zusammenfallen, so ist sein Trägheitsmoment J_n gleich der Summe (bzw. Differenz) der Trägheitsmomente der einzelnen Flächen, und seine Nullinie fällt mit der gemeinsamen Nullinie der Flächen zusammen.

[Der Gesamtquerschnitt hat nur *eine* Nullinie und *ein* Trägheitsmoment für diese. Aber auch zu jeder Teilfläche — *für sich betrachtet* — gehört eine eigene Nullinie und ein eigenes Trägheitsmoment, die gewissermaßen als feststehende Eigenschaften der betreffenden Fläche aufzufassen sind und bei Berechnung des eigentlichen Trägheitsmomentes (für den Gesamtquerschnitt) als Hilfsgrößen verwendet werden.]

In Formeln lautet der obige Satz:

$$\text{(I)} \qquad \boxed{J = J_I + J_{II} + J_{III} + \ldots}$$

Der Beweis dieses Satzes folgt unmittelbar aus der Erklärung des Trägheitsmomentes. Legen wir zum Beispiel Fig. 87a zugrunde, so ist zunächst:

$$\text{(I)} \qquad J = f_1 \cdot y_1^2 + f_2 \cdot y_2^2 + f_3 \cdot y_3^2 + f_4 \cdot y_4^2 + \cdots + f_{10} \cdot y_{10}^2 .$$

Hierin ist $f_1 = f_2 = f_9 = f_{10} = b \cdot x$. Die mittleren Streifen bestehen jeder aus zwei Teilen, so daß $f_3 = f_4 = \ldots = f_8 = 2 \cdot d \cdot x$ ist. Nun läßt sich aber der Flächenstreifen f_3 darstellen als die Differenz *zweier* Streifen mit der Höhe x, von denen sich der eine über die ganze Breite b und der andere über die innere Breite b_1 erstreckt. Den ersteren wollen wir mit f_3' bezeichnen; er hat den Flächeninhalt $b \cdot x$. Der zweite ist in der Figur mit f_3'' bezeichnet; er ist gleich $b_1 \cdot x$. Wir haben also

$$f_3 = f_3' - f_3''.$$

Digitized by Google

In entsprechender Weise ersetzen wir nun auch die folgenden Streifen $f_4 \ldots f_8$ durch die Differenz zweier Streifen und erhalten dann die obige Summe in der Form

$$J = f_1 \cdot y_1^2 + f_2 \cdot y_2^2 + (f_3' - f_3'') \cdot y_3^2 + (f_4' - f_4'') \cdot y_4^2 + \ldots + f_{10} \cdot y_{10}^2 .$$

$$\text{(II)} \left\{ \begin{aligned} J = (&f_1 \cdot y_1^2 + f_2 \cdot y_2^2 + f_3' \cdot y_3^2 + f_4' \cdot y_4^2 + \ldots + f_8' \cdot y_8^2 + f_9 \cdot y_9^2 + f_{10} \cdot y_{10}^2) \\ &- (f_3'' \cdot y_3^2 + f_4'' \cdot y_4^2 + f_5'' \cdot y_5^2 + f_6'' \cdot y_6^2 + f_7'' \cdot y_7^2 + f_8'' \cdot y_8^2) . \end{aligned} \right.$$

Nun sehen wir folgendes: In der ersten Klammer dieser Gleichung stehen die einzelnen Flächenstreifen, $f_1, f_2, f_3', f_4' \ldots f_{10}$, des Rechteckes $b \cdot h$, multipliziert mit dem Quadrate ihres Abstandes von der Nullinie. Der Ausdruck in dieser Klammer ist

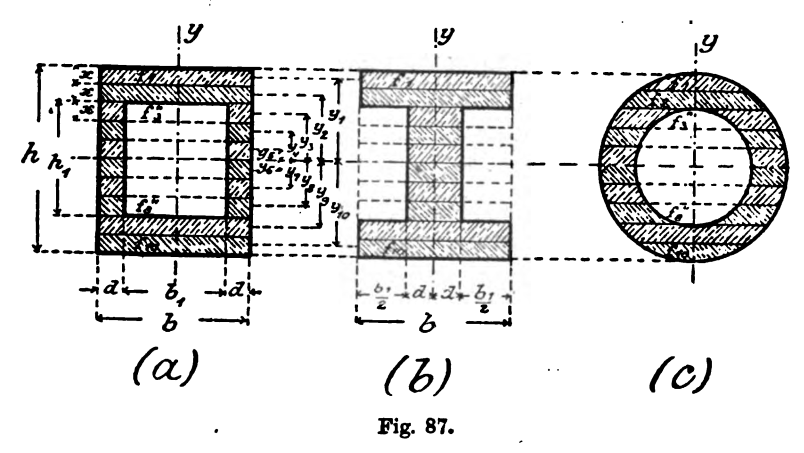


Fig. 87.

also nichts anderes als das Trägheitsmoment des Rechteckes $b \cdot h$. Entsprechend stellt der in der zweiten Klammer stehende Summenausdruck das Trägheitsmoment des inneren Rechteckes $b_1 \cdot h_1$ dar. Bezeichnen wir diese beiden Trägheitsmomente mit J_I und J_{II}, so geht also die Gleichung (II) über in

$$\text{(III)} \qquad J = J_I - J_{II} .$$

Somit ist für diesen Fall der oben ausgesprochene Satz bewiesen.

Natürlich gilt der Satz auch dann, wenn der Querschnitt nicht aus Rechtecken, sondern aus beliebigen Flächen zusammengesetzt ist. Immer können wir in der Summe

$$J = f_1 \cdot y_1^2 + f_2 \cdot y_2^2 + f_3 \cdot y_3^2 + \ldots$$

die einzelnen Streifen f_1, f_2 usw. in ihre Teilstreifen f', f'' usw. zerlegen, so daß schließlich herauskommt

$$J = J_I \pm J_{II} \pm J_{III} \pm \ldots$$

Digitized by Google

Bedingung ist nur, daß die Abstände y_1, y_2 usw. von ein und derselben Achse aus zu zählen sind, d. h. daß alle Flächenteile eine gemeinsame Nullinie haben.

II. Satz.

Besteht ein Querschnitt aus der Summe (bzw. Differenz) mehrerer beliebiger Flächen, so ist sein Trägheitsmoment J_x für irgendeine Achse x—x gleich der Summe (bzw. Differenz) der Trägheitsmomente der Einzelflächen für diese Achse x—x.

[Jedes der letzteren Trägheitsmomente ist bekanntlich (nach § 50) gleich dem Trägheitsmomente der betreffenden Einzelfläche für ihre eigene Schwerachse vermehrt um das quadratische Moment der Einzelfläche in bezug auf die Achse x—x.]

In Formeln:

$$\text{(II)} \qquad \boxed{\begin{aligned} J_x &= J_{I,x} + J_{II,x} + \dots \\ &= (J_I + F_I \cdot y_I^2) + (J_{II} + F_{II} \cdot y_{II}^2) + \dots \end{aligned}}$$

In dieser Formel ist also J_x das Trägheitsmoment des zu untersuchenden Querschnittes für irgendeine x-Achse. F_I, F_{II} usw. sind die einzelnen Flächen, aus denen sich der Gesamtquerschnitt zusammensetzt. J_I, J_{II} usw. sind die Trägheitsmomente dieser Flächen für ihre *eigenen* Nullinien, und y_I, y_{II} usw. sind die Schwerpunktsabstände der einzelnen Flächen von der x-Achse. (Das Produkt aus einer Fläche mal dem Quadrat ihres Schwerpunktsabstandes von einer Achse haben wir das „quadratische Moment" dieser Fläche für die betreffende Achse genannt.)

Man sieht übrigens, daß der vorhin aufgestellte Satz I in dem obigen Satze II bereits als Spezialfall enthalten ist. Nur seiner Einfachheit wegen wurde er als besonderer Satz vorangestellt.

Um nun den Satz II zu beweisen, greifen wir auf Fig. 84 (in § 46) zurück. Für den daselbst gezeichneten Querschnitt ist das Trägheitsmoment für die x-Achse:

$$J_x = (f_1 \cdot z_1^2 + \dots + f_m \cdot z_m^2) + (f_n \cdot z_n^2 + \dots + f_q \cdot z_q^2) .$$

Der Ausdruck ist bereits so geschrieben, daß die zu den Flächen F_I und F_{II} gehörigen Flächenstreifen getrennt erscheinen. Nun stellt mit unseren früheren Bezeichnungen die Summe

$$J_{I,x} = f_1 \cdot z_1^2 + \dots + f_m \cdot z_m^2$$

Digitized by Google

das Trägheitsmoment der Fläche F_I in bezug auf die Achse $x-x$ dar. Und

$$J_{II,x} = f_n \cdot z_n^2 + \ldots + f_q \cdot z_q^2$$

ist das Trägheitsmoment der Fläche F_{II} für die Achse $x-x$. Zunächst erhalten wir also für das Trägheitsmoment J_x des Gesamtquerschnittes die Beziehung

$$\text{(III)} \qquad J_x = J_{I,x} + J_{II,x}.$$

Nun besteht aber zwischen dem Trägheitsmomente J_n einer Fläche F für ihre eigene Schwerachse und dem Trägheitsmomente J_x dieser Fläche für eine x-Achse die Beziehung (§ 50, III)

$$J_x = J_n + F \cdot z^2,$$

worin z der Abstand zwischen Schwerachse und x-Achse ist. Wenden wir diese Formel auf die Trägheitsmomente $J_{I,x}$ und $J_{II,x}$ an, so wird

$$J_{I,x} = J_I + F_I \cdot y_I^2,$$
$$J_{II,x} = J_{II} + F_{II} \cdot y_{II}^2$$

(J_I ist das Trägheitsmoment von F_I für die eigene Schwerachse n_1-n_1; y_I ist der Abstand zwischen dieser Achse n_1-n_1 und der Achse $x-x$. Entsprechend ist es bei F_{II}.) Und schließlich erhalten wir für J_x den Ausdruck

$$\text{(IV)} \qquad J_x = (J_I + F_I \cdot y_I^2) + (J_{II} + F_{II} \cdot y_{II}^2).$$

Hiermit ist der Satz II bewiesen.

Spezialfall: Besteht ein zusammengesetzter Querschnitt nur aus zwei Einzelflächen (z. B. Fig. 84), so läßt sich sein Trägheitsmoment J_n auch nach der Formel ausrechnen

$$\text{(IVa)} \qquad J_n = J_I + J_{II} + \frac{F_I \cdot F_{II} \cdot a^2}{F_I + F_{II}}.$$

In dieser Formel ist a der Abstand der Schwerpunkte der beiden Einzelflächen voneinander (Fig. 84); die übrigen Bezeichnungen sind dieselben wie vorher. Die Formel (IVa) ergibt sich leicht aus der Formel (IV), indem man y_I und y_{II} durch den Abstand a und die Flächen F_I und F_{II} ausdrückt. Sie gilt aber nur bei zwei Einzelflächen, und auch nur zur Berechnung des Trägheitsmomentes für die Nullinie (J_n) und nicht für jede beliebige Achse. (Vgl. auch die vierte Aufgabe von § 54.)

Digitized by Google

III. Satz.

Verschiebt man die einzelnen Flächenstreifen einer Figur innerhalb ihrer Richtungen, so bleibt das Trägheitsmoment des Querschnittes unverändert.

Durch diesen Satz werden die Trägheitsmomente verschiedener Figuren zueinander in Beziehung gebracht, so daß er hier, zusammen mit den Sätzen I und II, erwähnt werden möge.

Vergleichen wir in Fig. 88 die Trägheitsmomente des Rechtecks und des Parallelogramms, so erhalten wir zunächst für das Rechteck:

$$J = f_1 y_1^2 + f_2 y_2^2 + \dots + f_6 y_6^2 .$$

Dieselbe Formel gilt aber auch für das Parallelogramm. Denn bei gleicher Höhe und Breite beider Figuren sind sowohl die Inhalte

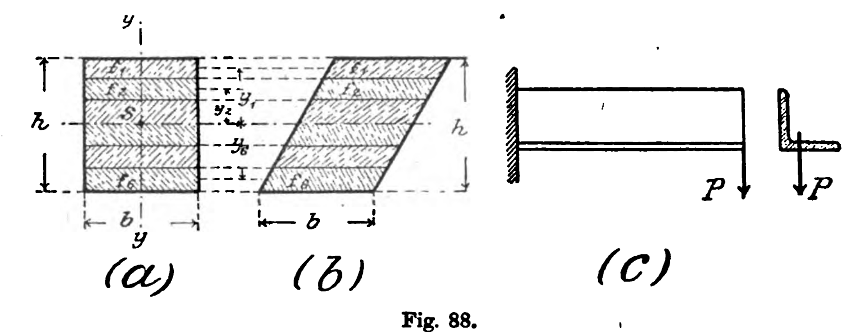


Fig. 88.

der Flächenstreifen f_1, f_2 usw. als auch deren Abstände y_1, y_2 usw. beim Rechteck ebenso groß wie beim Parallelogramm. Allgemein kann man also sagen:

Wenn eine Figur F_2 (das Parallelogramm) aus einer Figur F_1 (dem Rechteck) dadurch entstanden ist, daß die Flächenteile derselben parallel zueinander verschoben sind, so sind die Trägheitsmomente dieser beiden Figuren einander gleich.

Zusatz: Vorläufig hat allerdings das Trägheitsmoment des Parallelogramms für uns keinen Wert. Bei der Ableitung der Biegungsformel

$$\sigma = \frac{M}{J} \cdot y$$

wurde ausdrücklich vorausgesetzt, daß der Querschnitt eine vertikale Symmetrieebene besitze. Nur in diesem Falle konnten wir annehmen, daß die einzelnen horizontalen Schichten, in die der Balken im unbelasteten Zustande geteilt war, auch nach der

Digitized by Google

Durchbiegung horizontal bleiben. Auf diese Weise konnten wir dann die Dehnungen und Spannungen der einzelnen Schichten miteinander in Beziehung bringen. Ist der Balken nicht symmetrisch zur Vertikalebene, oder, allgemein gesagt, nicht symmetrisch zu der Ebene, in der die Kräfte wirken, so wird sich bei der Belastung der Träger nicht nur in Richtung der Kräfte durchbiegen, sondern er wird auch seitlich ausweichen. Dieses kann man sehr gut wahrnehmen, wenn man ein an einem Ende eingemauertes Winkeleisen durch eine vertikale Kraft P belastet (Fig. 88c). Hier zeigt sich dann, daß der Träger nach unten und gleichzeitig seitlich ausweicht. Die einzelnen Schichten des Eisens erfahren hierbei natürlich ganz andere Beanspruchungen, als die obige Formel angibt. Wir werden uns später genauer mit diesen Untersuchungen beschäftigen (17. Vortrag).

Zusammenfassung.

Ist ein Querschnitt F aus bekannten Teilflächen F_I usw. zusammengesetzt, so berechnen wir sein Trägheitsmoment (für seine Nullinie $n—n$ oder auch für irgendeine andere Achse $x—x$), indem wir von jeder Teilfläche das Trägheitsmoment für die betreffende Achse ($n—n$ oder $x—x$) aufstellen und schließlich alle diese Beiträge zusammenzählen. Hierbei ist jeder dieser Beiträge nach Formel (IV) von § 50 zu bestimmen: Trägheitsmoment der betreffenden Teilfläche F_I für ihre eigene Schwerachse $n_I—n_I$, vermehrt um das Produkt $F_I \cdot y_I^2$, wobei y_I der Abstand von $n_I—n_I$ bis $n—n$, bzw. $x—x$ ist. In Formel: $J = (J_I + F_I \cdot y_I^2) + (J_{II} + F_{II} \cdot y_{II}^2) + \ldots$. [Man beachte, daß außer den Produkten $F_I \cdot y_I^2$ usw. auch noch die Trägheitsmomente J_I usw. einzuführen sind; Gegensatz der obigen Formel zu Formel III in § 49a.] Beispiele zu § 51 s. § 54.

§ 52.

Das Widerstandsmoment.

I. Die „Maximalspannungen" σ_1 und σ_2 eines Querschnittes.

1. Aus der Biegungsformel

$$\sigma = \frac{M}{J} \cdot y$$

folgt, daß die größte Normalspannung eines Querschnittes in dem Streifen auftritt, der den größten Abstand y von der Nullinie hat. Diese Aussage ist ja auch direkt mit der *Navier*schen Hypothese verknüpft, wie namentlich aus deren graphischer Darstellung (Fig. 78a) deutlich hervorgeht.

Im allgemeinen müssen wir aber bei einem auf Biegung beanspruchten Balken *zwei* größte Normalspannungen berücksichtigen. Nämlich die größte Zug- und die größte Druckspannung. Die eine tritt in der obersten und die andere in der untersten Faserschicht auf. Die obige Aussage werden wir deshalb in der Form

Digitized by Google

aussprechen: **Die größten Normalspannungen treten in den „äußersten" Faserschichten auf.**

2. Die Abstände dieser „äußersten" Streifen eines Querschnittes werden wir im folgenden stets mit

$$e_1 \quad \text{und} \quad e_2$$

bezeichnen (Fig. 89). Die dazugehörigen Spannungen nennen wir die „*Maximalspannungen*"

$$\sigma_1 \quad \text{und} \quad \sigma_2 .$$

Eine von ihnen ist also die größte Zug- und die andere die größte Druckspannung, die in dem betreffenden Querschnitt überhaupt

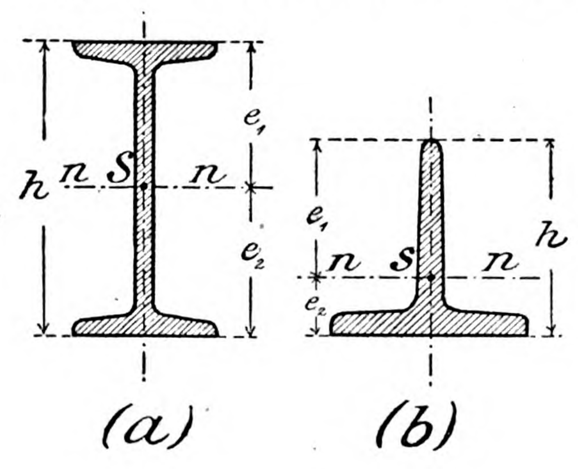


Fig. 89.

auftritt. Setzen wir für die Abstände die Bezeichnungen e_1 und e_2 in die Biegungsformel ein, so ergibt sich die Größe der

(I) Maximalspannungen:

$$\sigma_1 = \frac{M}{J} \cdot e_1 ; \qquad \sigma_2 = \frac{M}{J} \cdot e_2 .$$

Da es nun hauptsächlich nur auf diese beiden Spannungen σ_1 und σ_2 ankommt, wollen wir ihre Berechnung noch etwas vereinfachen.

II. Das Widerstandsmoment.

Sobald das Trägheitsmoment J des betreffenden Querschnittes ermittelt ist, dividieren wir es sofort durch die Abstände e_1 und e_2 der äußersten Schichten. Wir berechnen also die Brüche

$$\text{(II)} \qquad W_1 = \frac{J}{e_1} ; \qquad W_2 = \frac{J}{e_2} .$$

Digitized by Google

Diese Werte W_1 und W_2 heißen die „Widerstandsmomente" des Querschnittes.

Wenn wir dann die Spannungen σ_1 und σ_2 zu berechnen haben, so ist direkt

$$\text{(III)} \qquad \boxed{\sigma_1 = \frac{M}{W_1}; \qquad \sigma_2 = \frac{M}{W_2}.}$$

Denn aus der Ableitung des Widerstandsmomentes folgt, daß tatsächlich

$$\frac{M}{W_1} = \frac{M}{J/e_1} = \frac{M}{J} \cdot e_1 = \sigma_1$$

ist, und ebenso ist

$$\frac{M}{W_2} = \frac{M}{J/e_2} = \frac{M}{J} \cdot e_2 = \sigma_2 .$$

Mit den Formeln (III) arbeitet es sich bequemer als mit den ursprünglichen Formeln (I). Deshalb werden in der Praxis die größten Spannungen σ_1 und σ_2 eines Querschnittes stets mit Hilfe des Widerstandsmomentes bestimmt. Diese Art der Berechnung ist besonders deshalb so bequem, weil in den Tabellen neben den Trägheitsmomenten auch sofort die Widerstandsmomente angegeben sind. Dann braucht man sich gar nicht mehr um die Abstände e_1 und e_2 zu kümmern, da diese ja bereits in dem Widerstandsmomente enthalten sind. Auch die mathematischen Formeln der Trägheitsmomente entwickelt man — durch Division mit e_1 und e_2 — so, daß sich die Widerstandsmomente ergeben.

Zusatz: Ist der Querschnitt symmetrisch in bezug auf die Nullinie (Fig. 89a), so ist

$$e_1 = e_2 = \frac{h}{2},$$

und es wird

$$W_1 = W_2 = \frac{J}{h/2} = \frac{2J}{h}.$$

Für symmetrische Querschnitte braucht also nur ein Widerstandsmoment

$$W = \frac{J}{h/2} = \frac{2J}{h}$$

angegeben zu werden. Dieses gilt dann sowohl für die oberste wie auch für die unterste Faser.

Digitized by Google

III. Die Bestimmung des erforderlichen Widerstandsmomentes.

Bisher sind wir stets von der Aufgabe ausgegangen, daß der Querschnitt des Balkens gegeben sei und die in diesem Querschnitte auftretenden Spannungen ermittelt werden sollten. Nun wollen wir den umgekehrten Fall betrachten: Vorgeschrieben sei die größte Normalspannung, die nicht überschritten werden darf; gesucht ist der erforderliche Querschnitt.

Diese erlaubte größte Spannung heißt die

„zulässige Biegungsspannung“ k (oder k_b).

Sie wird gewöhnlich gleich der zulässigen Spannung für Zug, bzw. Druck genommen (§ 33). Ist das betreffende Material gegen Zug und gegen Druck verschieden widerstandsfähig (z. B. Gußeisen), so muß eine besondere zulässige Spannung für die gedrückten und für die gezogenen Fasern eingeführt werden.

Um nun auf Grund dieser zulässigen Spannung die erforderliche Querschnittsfläche des Balkens zu bestimmen, setzen wir in der Gleichung

$$\text{Maximalspannung} = \frac{\text{Momentensumme}}{\text{Widerstandsmoment}}$$

für die Maximalspannung die zulässige Biegungsspannung ein und erhalten durch Umformung:

$$\text{erforderl. Widerstandsmoment} = \frac{\text{Momentensumme}}{\text{zulässige Spannung}}.$$

In Formeln:

$$\text{(IV)} \qquad \boxed{\text{erforderliches } W = \frac{M}{k}.}$$

Sobald hiermit das erforderliche Widerstandsmoment berechnet ist, schlagen wir zum Beispiel bei den Walzprofilen direkt in den Tabellen denjenigen Querschnitt auf, der dieses erforderliche Widerstandsmoment besitzt. Handelt es sich jedoch um eine Querschnittsform, deren Widerstandsmomente nicht in Tabellen enthalten sind, so muß man die Abmessungen des Querschnittes zunächst annehmen und sein vorhandenes Widerstandsmoment berechnen. Dann sieht man mit Hilfe der obigen Formeln nach, ob die Maximalspannungen nicht die zulässige Spannung überschreiten, bzw. ob das vorhandene Widerstandsmoment mindestens ebenso groß ist wie das erforderliche.

Digitized by Google

Zusammenfassung:

Bei einem auf Biegung beanspruchten Träger treten die größten Normalspannungen in der obersten und in der untersten Schicht auf. Diese Maximalspannungen eines Querschnittes berechnen sich nach der Formel:

$$\text{(I)} \qquad \text{Maximalspannung } \sigma_{max} = \frac{\text{Momentensumme } M}{\text{Widerstandsmoment } W}.$$

Hierin ist das „Widerstandsmoment" W ein aus dem Trägheitsmoment abzuleitender Wert. Er entsteht, indem man das Trägheitsmoment durch die Abstände e_1 und e_2 der äußersten Fasern dividiert. Bei unsymmetrischen Querschnitten gehören zu der obersten und zu der untersten Faser je ein besonderes Widerstandsmoment. Bei symmetrischen Querschnitten haben beide Fasern das gleiche Widerstandsmoment. Je kleiner der Wert W ist, um so größer ist die Spannung σ_{max}.

Ist die größte Spannung vorgeschrieben, so berechnet sich aus der obigen Formel das erforderliche Widerstandsmoment:

$$\text{(II)} \qquad \text{Widerstandsmoment } W_{erf.} = \frac{\text{Momentensumme } M}{\text{zulässige Spannung } k}.$$

Da das Widerstandsmoment aus dem Trägheitsmoment (cm⁴) mittels Division durch eine Länge (cm) entstanden ist, geben wir ihm die Bezeichnung cm^3 (bisweilen auch dcm^3 oder m^3).

§ 53.

Beispiele zu § 50: Trägheits- und Widerstandsmomente für die einfachen Grundformen.

I. Das Rechteck (Breite b, Höhe h).

Für das Trägheitsmoment des Rechteckes haben wir bereits in § 39 die Formel abgeleitet

$$J = \frac{b\,h^3}{12}.$$

Hieraus ergibt sich für das Widerstandsmoment

$$W = \frac{b\,h^3}{12 \cdot h/2} = \frac{b\,h^3 \cdot 2}{12\,h},$$

$$W = \frac{b\,h^2}{6}.$$

Digitized by Google

II. Das Parallelogramm (Grundlinie b, Höhe h).

Wie in § 51, III gezeigt wurde, haben Rechteck und Parallelogramm gleiche Werte für das Trägheitsmoment. Es ist also auch für das Parallelogramm

$$J = \frac{b\,h^3}{12},$$

$$W = \frac{b\,h^2}{6}.$$

[Man beachte jedoch die Schlußbemerkung von § 51. Das Trägheits- und Widerstandsmoment des Parallelogrammes ist hier nur für spätere Zwecke mit aufgeführt.]

III. Das Quadrat (Seitenlänge a).

Setzt man in die obigen Formeln $b = h = a$ ein, so wird

$$J = \frac{a^4}{12},$$

$$W = \frac{a^3}{6}.$$

IV. Das Dreieck (Grundlinie b, Höhe h).

Die Formel für das Trägheitsmoment werde an Hand von Fig. 86 abgeleitet (diese Figur ist aus § 49 hierher übernommen). Das Dreieck ist schiefwinklig angenommen, damit die Untersuchung auch für den allgemeinen Fall gültig sei. Man beachte jedoch, daß die Gültigkeit der bisher aufgestellten Biegungsformel sich nur auf Dreiecke mit vertikaler Symmetrieachse, d. h. auf gleichschenklige Dreiecke, erstreckt.

Die Lage der Nullinie ist bereits in § 49 bestimmt. Sie liegt in der Entfernung $\frac{2}{3}h$ von der Spitze. Wenn wir nun für diese Nullinie das Trägheitsmoment

$$J_n = f_1 \cdot y_1^2 + f_2 \cdot y_2^2 + \ldots$$

bestimmen wollen, so wird die Ausrechnung dadurch etwas unübersichtlich, daß die Abstände der einzelnen Streifen von f_1 aus zunächst kleiner werden und dann wieder anwachsen. Bequemer bestimmt sich das Trägheitsmoment für die Achse x—x, weil sich für diese Achse die Abstände y_1', y_2' usw. übersichtlich anschreiben lassen. (Die früher mit z_1, z_2 usw. bezeichneten Abstände sind in Fig. 86 y_1', y_2' genannt.) Wir werden also im Interesse einer ein-

Digitized by Google

fachen Ausrechnung zunächst das Trägheitsmoment J_x für die x-Achse bestimmen und dann, mittels der Formel

$$J_n = J_x - F \cdot z^2$$
$$= J_x - \frac{b\,h}{2} \cdot (\tfrac{2}{3}\,h)^2 ,$$
$$J_n = J_x - \tfrac{2}{9}\,b\,h^3 ,$$

auf das eigentliche Trägheitsmoment J_n zurückkommen.

Um nun J_x zu berechnen, stellen wir zunächst die Flächenstreifen und ihre Abstände von der x-Achse zusammen. Wie be-

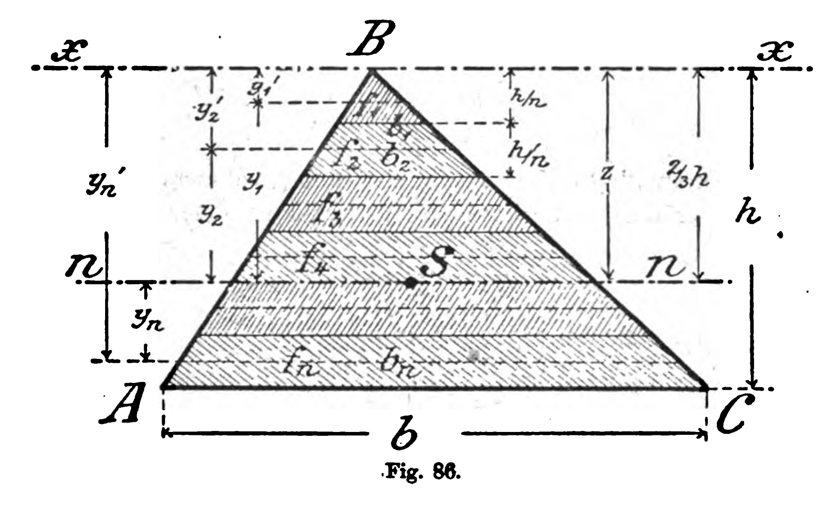


Fig. 86.

reits in § 49, erste Aufgabe ermittelt ist, ergeben sich folgende Werte:

$$f_1 = \frac{1\,b\,h}{2\,n^2}; \qquad y_1' = \frac{1\,h}{2\,n},$$
$$f_2 = \frac{3\,b\,h}{2\,n^2}; \qquad y_2' = \frac{3\,h}{2\,n},$$
$$f_3 = \frac{5\,b\,h}{2\,n^2}; \qquad y_3' = \frac{5\,h}{2\,n} \quad \text{usw.}$$

(Wir rechnen die Abstände der unendlich schmalen Streifen stets bis Mitte Höhe des Streifens.) Also wird

$$J_x = \frac{1\,b\,h}{2\,n^2}\left(\frac{1\,h}{2\,n}\right)^2 + \frac{3\,b\,h}{2\,n^2}\left(\frac{3\,h}{2\,n}\right)^2 + \frac{5\,b\,h}{2\,n^2}\left(\frac{5\,h}{2\,n}\right)^2 + \ldots$$
$$= \frac{b\,h^3}{8\,n^4} \cdot 1^3 + \frac{b\,h^3}{8\,n^4} \cdot 3^3 + \frac{b\,h^3}{8\,n^4} \cdot 5^3 + \ldots$$
$$= \frac{b\,h^3}{8\,n^4}(1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots).$$

Digitized by Google

In der Klammer steht die Summe der dritten Potenzen der ungeraden Zahlen. Die Anzahl der Glieder ist n, da wir das ganze Dreieck in n Streifen geteilt haben. Nun läßt sich mit Hilfe der Theorie der algebraischen Reihen leicht zeigen, daß die Summe der dritten Potenzen der ersten n ungeraden Zahlen

$$1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots = 2n^4 - n^2$$

ist. [Z. B. bei der Reihe $1^3 + 3^3 + 5^3 + 7^3 + 9^3$ ist $n = 5$; folglich ist die Summe dieser Reihe gleich $2 \cdot 5^4 - 5^2 = 1225$.] Setzen wir nun für die obige Klammer den Wert $2n^4 - n^2$ ein, so wird

$$J_x = \frac{bh^3}{8n^4}(2n^4 - n^2)$$
$$= \frac{bh^3}{8}\left(2 - \frac{1}{n^2}\right).$$

Wenn wir nun die Streifen unendlich schmal nehmen, so daß die Anzahl n der Glieder unendlich groß ist, so wird der Bruch

$$\frac{1}{n^2} = \frac{1}{\infty} = 0,$$

und es ergibt sich das Schlußresultat

$$J_x = \frac{bh^3}{8} \cdot 2$$
$$= \frac{bh^3}{4}.$$

Dieses ist also das Trägheitsmoment für die Achse $x—x$. Für die Nullinie folgt hieraus das (eigentliche) Trägheitsmoment, wie eingangs abgeleitet:

$$J_n = J_x - \tfrac{2}{9} b h^3$$
$$= \tfrac{1}{4} b h^3 - \tfrac{2}{9} b h^3,$$
$$J_n = \frac{bh^3}{36}.$$

Aus dem Trägheitsmomente ergeben sich die Widerstandsmomente

$$W_1 = \frac{bh^3}{36 \cdot \frac{2}{3}h} = \frac{bh^2}{24} \quad \text{(für die oberste Faser)},$$

$$W_2 = \frac{bh^3}{36 \cdot \frac{1}{3}h} = \frac{bh^2}{12} \quad \text{(für die unterste Faser)}.$$

Man sieht, daß auch beim Dreieck der Wert J leicht zu bestimmen ist. Die einzige Schwierigkeit liegt wohl darin, daß die Formel für die Summe $1^3 + 3^3 + 5^3 + 7^3 + \ldots$ ziemlich unbekannt

Digitized by Google

sein wird. Man muß aber beachten, daß dieses eine rein mathematische Angelegenheit ist, die mit dem Wesen der Theorie der Trägheitsmomente nichts zu tun hat. Das Prinzip der Untersuchung dürfte aber durch den oben eingeschlagenen Weg am klarsten zur Geltung kommen. Man kann ja die Trägheitsmomente auf verschiedene andere Weisen, z. B. durch räumliche Darstellungen, ableiten. Aber gerade diese Methoden haben es verschuldet, daß für viele Ingenieure das „Trägheitsmoment“ ein in der vierten Dimension umherirrender Begriff ist.

V. Der Kreis (Durchmesser d, Halbmesser r).

Zunächst zerlegen wir den Querschnitt in eine Anzahl Streifen parallel der Achse n—n. In Fig. 90a wurde der obere *Halbkreis* in $n = 6$ Flächenstreifen geteilt, und zwar so, daß die Bögen $\widehat{ab}$, $\widehat{bc}$, $\widehat{cd}$, $\widehat{de}$, $\widehat{ef}$, $\widehat{fg}$ einander gleich werden. Wenn wir dann von diesen sechs Streifen die Summe der quadratischen Momente bilden, bekommen wir also die *Hälfte* des Trägheitsmomentes vom ganzen Kreisquerschnitt:

$$\frac{J}{2} = f_1 \cdot y_1^2 + f_2 \cdot y_2^2 + f_3 \cdot y_3^2 + \cdots$$

Um die Inhalte der Streifen f_1, f_2 usw. zu berechnen, wurde folgendermaßen verfahren: Da die Streifen in Wirklichkeit unendlich dünn sind, kann man ihre Flächeninhalte wie die kleiner Trapeze von der gleichen Höhe ermitteln. Ziehen wir also beispielsweise bei dem Flächenstreifen f_3 in halber Streifenhöhe die Linie lm (Mittellinie), so ist zunächst

$$f_3 = \overline{lm} \cdot h_3 .$$

Um nun $\overline{lm}$ zu bestimmen, verbinden wir den Punkt m mit dem Mittelpunkte M durch den Radius r (dessen Winkel gegen die Horizontale mit α_3 bezeichnet ist) und ziehen durch m die Vertikale mm'. Dann ist die Strecke

$$Mm' = r \cdot \cos\alpha_3 ,$$

folglich ist

$$\overline{lm} = 2r \cdot \cos\alpha_3 .$$

Um ferner die Höhe h_3 auszurechnen, beachten wir, daß der Kreisbogen $\widehat{cd}$ gleich $\frac{1}{n}$ des Viertelkreises $\widehat{ag}$ ist, also

$$\widehat{cd} = \frac{1}{n} \cdot \frac{r\pi}{2} .$$

Digitized by Google

Da nun die Streifen in Wirklichkeit unendlich schmal zu nehmen sind, können wir die Strecke dm als eine gerade Linie betrachten. Die Figur $dd'm$ ist also ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse $md = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{r\pi}{2}$. Der Winkel dmd' ist gleich dem Winkel α_3, folglich ist die Kathete

$$md' = md \cdot \cos\alpha_3$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{r\pi}{2} \cdot \cos\alpha_3 .$$

Nun ist $h_3 = 2 \cdot md'$, also folgt schließlich

$$h_3 = \frac{1}{n} \cdot \frac{r\pi}{2} \cdot \cos\alpha_3 .$$

Setzen wir diese Werte für $\overline{lm}$ und h_3 ein, so wird

$$f_3 = 2r \cdot \cos\alpha_3 \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{r\pi}{2} \cdot \cos\alpha_3 ,$$

$$f_3 = \frac{1}{n} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot \cos^2\alpha_3 .$$

Hiermit ist der Inhalt des Streifens f_3 ermittelt.

Nun wollen wir sogleich den Abstand y_3 dieses Flächenstreifens von der Nullinie bestimmen. Dieser ist (aus dem Dreieck Mmm')

$$y_3 = r \cdot \sin\alpha_3 .$$

Somit ergibt sich für das Produkt $f_3 \cdot y_3^2$ der Wert:

$$f_3 \cdot y_3^2 = \frac{1}{n} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot \cos^2\alpha_3 \cdot (r \cdot \sin\alpha_3)^2$$
$$= \frac{1}{n} \cdot r^4 \cdot \pi \cdot \cos^2\alpha_3 \cdot \sin^2\alpha_3 .$$

Um diesen Ausdruck noch weiter zu vereinfachen, wollen wir Zähler und Nenner mit 4 multiplizieren:

$$f_3 \cdot y_3^2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{n} \cdot r^4 \cdot \pi \cdot 4 \cdot \cos^2\alpha_3 \cdot \sin^2\alpha_3$$
$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{n} \cdot r^4 \cdot \pi (2 \sin\alpha_3 \cos\alpha_3)^2 ,$$
$$f_3 \cdot y_3^2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{n} \cdot r^4 \cdot \pi \cdot \sin^2 2\,\alpha_3 .$$

(denn es ist bekanntlich $\sin 2\alpha = 2 \sin\alpha \cdot \cos\alpha$).

Digitized by Google

Wir haben also für das Produkt $f_3 \cdot y_3^2$ eine sehr einfache Formel abgeleitet. Man sieht nun ohne weiteres ein, daß sich die Produkte für die anderen Streifen, z. B. f_1, aus der obigen Formel ergeben, indem man statt α_3 den entsprechenden Neigungswinkel, α_1, einsetzt, da die übrigen in dem Ausdrucke vorkommenden Werte für alle Streifen dieselben sind. Wir können also für alle quadratischen Momente die betreffenden Ausdrücke einsetzen und erhalten für das halbe Trägheitsmoment:

$$\frac{J}{2} = \frac{1}{4}\,\frac{1}{n}\,r^4\pi \cdot \sin^2 2\,\alpha_1 + \frac{1}{4}\,\frac{1}{n}\,r^4\pi \cdot \sin^2 2\,\alpha_2 + \frac{1}{4}\,\frac{1}{n}\,r^4\pi \cdot \sin^2 2\,\alpha_3 + \ldots$$

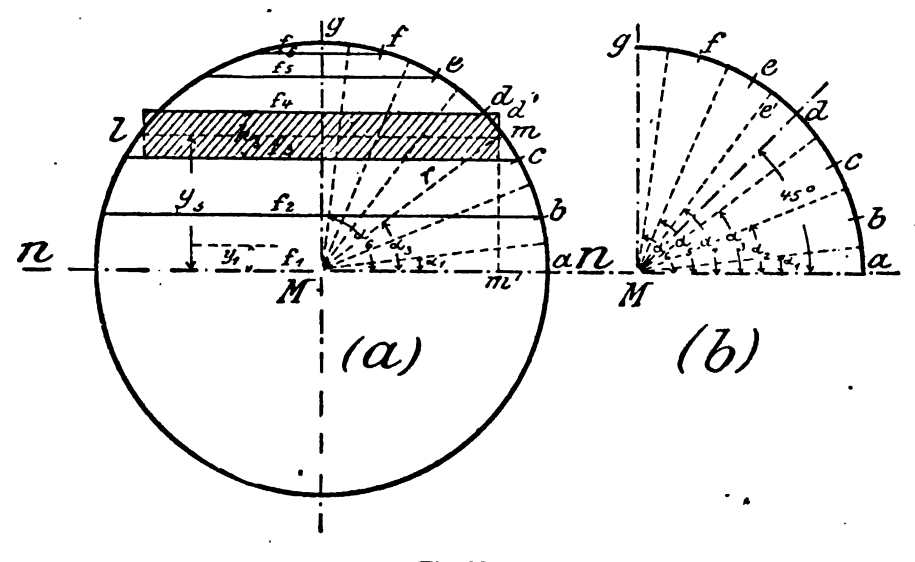


Fig. 90.

Im vorliegenden Falle hatten wir $n = 6$ Streifen angenommen. Wir wollen zunächst für diese Zahl die Rechnung durchführen und sie dann später für $n = \infty$ verallgemeinern. Ziehen wir noch

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{n} \cdot r^4 \cdot \pi$$

vor die Klammer, so wird

$$\frac{J}{2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} \cdot r^4 \cdot \pi \cdot (\sin^2 2\,\alpha_1 + \sin^2 2\,\alpha_2 + \sin^2 2\,\alpha_3 + \sin^2 2\,\alpha_4 + \sin^2 2\,\alpha_5 + \sin^2 2\,\alpha_6).$$

Hierin bedeuten also α_1, α_2, α_3 usw. die Neigungswinkel der Radien, die nach der Mitte der Kreisbögen $\widehat{ab}$, $\widehat{bc}$, $\widehat{cd}$ usw. gezogen sind. Die in der Klammer stehende Summe läßt sich nun

Digitized by Google

sehr einfach bestimmen. Ziehen wir nämlich durch Punkt M in Fig. 90b (die den oberen, rechten Quadranten der Deutlichkeit wegen noch einmal darstellt) unter 45° die strichpunktierte Linie, so ist

$$\sphericalangle \alpha_4 = \sphericalangle \alpha_1 + 45^\circ,$$

wie man ohne weiteres aus der Figur ablesen kann. Daraus folgt

$$2\,\alpha_4 = 2\,\alpha_1 + 90^\circ,$$

also

$$\sin 2\,\alpha_4 = \sin(90 + 2\,\alpha_1)\,.$$

Nun besteht bekanntlich für jeden beliebigen Winkel φ die Gleichung $\sin(90 + \varphi) = \cos\varphi$. Dementsprechend bekommen wir aus der obigen Gleichung

$$\sin 2\,\alpha_4 = \cos 2\,\alpha_1\,.$$

In derselben Weise vergleichen wir die Winkel α_2 und α_5. Wir finden, daß

$$\alpha_5 = \alpha_2 + 45^\circ,$$

also

$$2\,\alpha_5 = 2\,\alpha_2 + 90^\circ$$

ist. Daraus folgt dann weiter

$$\sin 2\,\alpha_5 = \sin(90 + 2\,\alpha_2) = \cos 2\,\alpha_2\,.$$

Zuletzt stellen wir α_3 und α_6 nebeneinander und finden

$$\sin 2\,\alpha_6 = \sin(90 + 2\,\alpha_3) = \cos 2\,\alpha_3\,.$$

Diese Werte für $\sin 2\,\alpha_4$, $\sin 2\,\alpha_5$ und $\sin 2\,\alpha_6$ setzen wir nun in den Ausdruck für $J/2$ ein und erhalten:

$$\frac{J}{2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} \cdot r^4 \cdot \pi \cdot (\sin^2 2\,\alpha_1 + \sin^2 2\,\alpha_2 + \sin^2 2\,\alpha_3 + \cos^2 2\,\alpha_1 + \cos^2 2\,\alpha_2 + \cos^2 2\,\alpha_3)$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} \cdot r^4 \cdot \pi \cdot [(\sin^2 2\,\alpha_1 + \cos^2 2\,\alpha_1) + (\sin^2 2\,\alpha_2 + \cos^2 2\,\alpha_2) + (\sin^2 2\,\alpha_3 + \cos^2 2\,\alpha_3)]\,.$$

Da nun aber für jeden beliebigen Winkel φ die Beziehung besteht:

$$\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1\,,$$

so ergibt sich als Schlußresultat:

$$\frac{J}{2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6}\, r^4 \cdot \pi \cdot 3$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot r^4 \cdot \pi\,.$$

Digitized by Google

Dieses ist also die Summe aus den Produkten:

Flächenstreifen der einen Kreishälfte mal den Quadraten der Abstände von $n-n$.

Um die Summe, die den Flächenstreifen des gesamten Querschnittes entspricht, zu erhalten, müssen wir den obigen Ausdruck verdoppeln und finden somit das Trägheitsmoment des Kreises

$$J = \frac{1}{4} \cdot r^4 \pi \,.$$

Man sieht nun leicht ein, daß sich dasselbe Resultat ergibt, wenn die Anzahl n der Streifen eine beliebige Zahl ist. Dann ist die Anzahl der in der Klammer enthaltenen Glieder nicht 6, sondern n. Man bringt aber wieder das 1. Glied am Anfang der Klammer mit dem 1. Glied hinter der Mitte zusammen usw. (z. B. bei $n = 30$ das 1. Glied mit dem 16., das 2. mit dem 17. usw.) und erhält als Inhalt der Klammer den Wert $\frac{n}{2}$. Da jetzt vor der Klammer im Nenner statt „6“ die Zahl n steht, so hebt sich n gegen n, und es erscheint das vorige Resultat. Auch wenn $n = \infty$ ist, bekommen wir also für die Summe $f \cdot y^2$ den Ausdruck

$$J = \frac{1}{4} \cdot r^4 \pi \,.$$

Will man hierin noch den Radius durch den Durchmesser ausdrücken, so ist

$$r = \frac{d}{2}\,,$$

$$r^4 = \frac{d^4}{16}\,,$$

also

$$J = \frac{1}{64} \cdot d^4 \pi \,.$$

Aus dem Trägheitsmoment ergibt sich das Widerstandsmoment

$$W = \frac{1}{4} \frac{r^4 \pi}{r}$$

$$= \frac{1}{4} \cdot r^3 \pi$$

bzw.

$$W = \frac{1}{32} \cdot d^3 \pi \,.$$

Digitized by Google

Somit sind für den Kreisquerschnitt Trägheits- und Widerstandsmoment ermittelt. Für einige weitere Flächen sind Trägheits- und Widerstandsmomente in § 55 zusammengestellt.

§ 54.

Beispiele zu § 51: Trägheits- und Widerstandsmomente von zusammengesetzten Querschnitten.

Erste Aufgabe.

Für den in Fig. 87a (in § 51) gezeichneten Querschnitt sind Trägheits- und Widerstandsmoment zu bestimmen!

Die Abmessungen seien:

$$b = 20{,}0 \text{ cm}; \qquad h = 25{,}0 \text{ cm},$$
$$b_1 = 14{,}0 \text{ cm}; \qquad h_1 = 15{,}0 \text{ cm}.$$

Da der Querschnitt aus der Differenz zweier Figuren besteht, deren Trägheitsmomente bekannt sind, berechnen wir ihn nach den in § 51 entwickelten Methoden. Die beiden Einzelflächen (Rechtecke) haben eine *gemeinsame* horizontale Schwerlinie. Folglich können wir den I. Satz von § 51 anwenden und erhalten für das Trägheitsmoment den Ausdruck:

$$J = J_I - J_{II}\,.$$

Das Trägheitsmoment des ersten (größeren) Rechteckes ergibt sich nach der für Rechtecke aufgestellten Formel:

$$J_I = \frac{1}{12} b\, h^3 = \frac{1}{12} 20{,}0 \cdot 25{,}0^3.$$

Für das zweite (innere) Rechteck ergibt sich entsprechend:

$$J_{II} = \frac{1}{12} b_1 \cdot h_1^3 = \frac{1}{12} 14{,}0 \cdot 15{,}0^3.$$

Somit wird für den Gesamtquerschnitt das Trägheitsmoment

$$\begin{aligned} J &= J_I - J_{II} \\ &= \frac{1}{12} 20{,}0 \cdot 25{,}0^3 - \frac{1}{12} 14{,}0 \cdot 15{,}0^3 \\ &= \frac{1}{12} (20{,}0 \cdot 25{,}0^3 - 14{,}0 \cdot 15{,}0^3) \\ &= \frac{1}{12} (312500 - 47250) \\ &= \frac{1}{12} 265250\,, \\ J &= 22104 \text{ cm}^4. \end{aligned}$$

Aus dem Trägheitsmoment J ergibt sich das Widerstandsmoment W, indem wir J durch den Abstand der äußersten Fasern,

$$e = \frac{h}{2} = 12{,}5 \text{ cm},$$

dividieren. Somit wird

$$W = \frac{J}{e}$$
$$= \frac{22104}{12{,}5} = 1768 \text{ cm}^3.$$

Zusatz 1: In vielen Tabellenwerken sind die Trägheitsmomente für Rechtecke von den verschiedenartigsten Abmessungen bereits ausgerechnet. So findet man angegeben: Für ein Rechteck

von 20,0 cm Breite und 25,0 cm Höhe ist $J = 26042$ cm^4,
„ 14,0 „ „ „ 15,0 „ „ „ $J = 3938$ „ .

Mit Benutzung dieser Werte wird

$$J = J_I - J_{II}$$
$$= 26042 - 3938$$
$$= 22104 \text{ cm}^4,$$

wie sich auch oben ergeben hatte.

Zusatz 2: Aus dem Ausdrucke für das Widerstandsmoment,

$$W = \frac{J}{e},$$

folgt nach Einsetzung der Werte für J:

$$W = \frac{J_I - J_{II}}{e}$$
$$= \frac{J_I}{e} - \frac{J_{II}}{e}$$
$$= \frac{J_I}{h/2} - \frac{J_{II}}{h/2}.$$

Man kann also das Widerstandsmoment W bei solchen zusammengesetzten Querschnitten auch dadurch bestimmen, daß man sofort jedes der Trägheitsmomente J_I, J_{II} usw. durch den Abstand e der äußersten Faser des Gesamtquerschnittes dividiert und dann diese Brüche addiert bzw. subtrahiert. Man beachte aber wohl,

Digitized by Google

daß beispielsweise der in dem obigen Ausdrucke vorkommende Bruch

$$\frac{J_{II}}{e} = \frac{J_{II}}{h/2} = \frac{J_{II} \cdot 2}{h}$$

nicht etwa das Widerstandsmoment des inneren Rechteckes darstellt! Denn dessen Widerstandsmoment wäre

$$W_{II} = \frac{J_{II}}{h_1/2} = \frac{J_{II} \cdot 2}{h_1},$$

so daß der obige Bruch $\frac{J_{II}}{e}$ im Verhältnis $h : h_1$ kleiner ist als das Widerstandsmoment W_{II}. Man hüte sich also vor dem Fehler, das Widerstandsmoment einer zusammengesetzten Figur einfach gleich der Summe (bzw. Differenz) der Widerstandsmomente W_I, W_{II} usw. der Einzelflächen zu setzen!

Zweite Aufgabe.

Für den in Fig. 91 gezeichneten Querschnitt ist das Widerstandsmoment zu berechnen!

Die Bestandteile dieses genieteten Querschnittes sind

1 Stehblech	800 · 10
2 obere Gurtwinkel . .	100 · 100 · 10
2 untere Gurtwinkel . .	100 · 100 · 10
2 obere Lamellen	250 · 10
2 untere Lamellen	250 · 10
4 Niete von je 23 mm ∅	

Die Nullinie kann man sofort angeben: Da die Fläche eine horizontale Symmetrieachse hat, liegt die Nullinie in halber Trägerhöhe.

Für diesen Fall können wir dann zur Berechnung des Trägheits- und Widerstandsmomentes verschiedene Wege einschlagen:

Erste Methode: Wir zerlegen den Querschnitt in lauter Rechtecke mit gemeinsamer Nullinie. Die Abrundungen bei den Winkeleisen (Fig. 91 b) lassen wir hierbei unberücksichtigt. Dann ergeben sich folgende Einzelflächen (Fig. 91 a):

I. Ein großes Rechteck von der Höhe 84,0 cm und der Breite 25,0 cm. Von dieser Fläche wollen wir aber sogleich die beiden Streifen 84,0 · 2,3 cm, in denen die Nietlöcher liegen, abziehen. Dann bleibt also von dem großen Rechteck eine Fläche 84,0 (25,0 — 2 · 2,3) = 84,0 · 20,4 übrig.

II. Die beiden äußeren schmalen Rechtecke von je 80,0 cm Höhe und 2,0 cm Breite.

III. Die beiden Rechtecke zwischen den horizontalen Winkelschenkeln, von je 78,0 cm Höhe und $9,0 - 2,3 = 6,7$ cm Breite. (Die 2,3 cm breiten Streifen, in denen die Nietlöcher liegen, sind bereits bei dem großen Rechtecke berücksichtigt.)

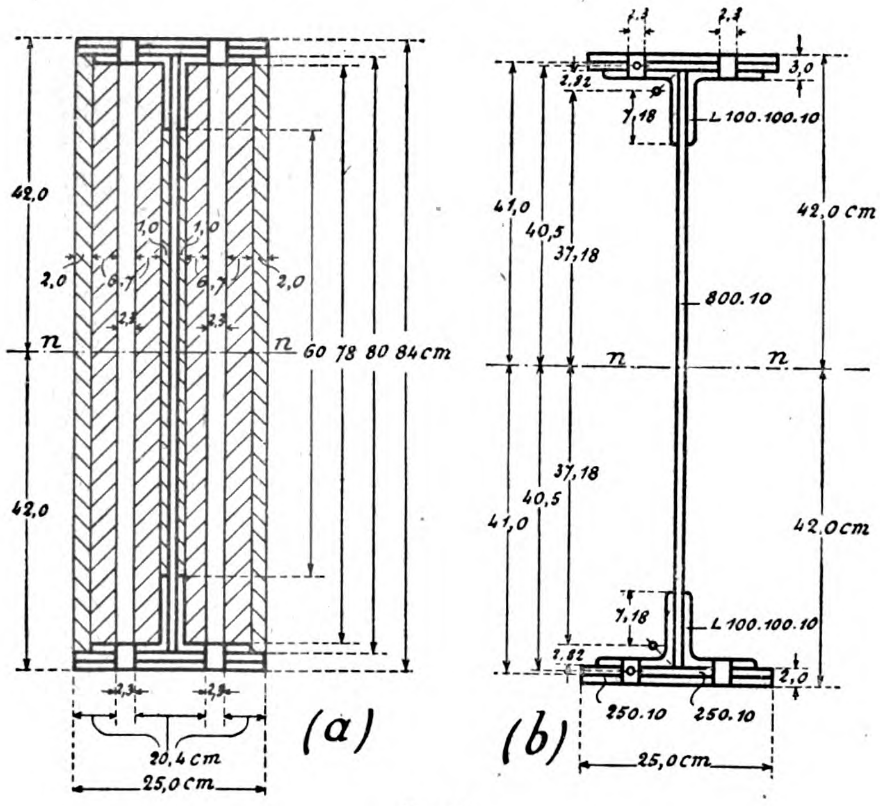


Fig. 91.

IV. Die beiden schmalen Rechtecke zwischen den vertikalen Winkelschenkeln, von je 60,0 cm Höhe und 1,0 cm Breite.

Man ersieht aus Fig. 91a, daß der Gesamtquerschnitt gleich dem Rechtecke I, vermindert um die Rechtecke II, III und IV ist. Da diese Flächen eine gemeinsame horizontale Schwerachse haben, so ist also das Gesamtträgheitsmoment

$$J = J_I - J_{II} - J_{III} - J_{IV}$$

$$= \frac{1}{12} 20{,}4 \cdot 84{,}0^3 - 2 \cdot \frac{1}{12} 2{,}0 \cdot 80{,}0^3 - 2 \cdot \frac{1}{12} 6{,}7 \cdot 78{,}0^3 - 2 \cdot \frac{1}{12} 1{,}0 \cdot 60{,}0^3.$$

Digitized by Google

Diesen Ausdruck schreiben wir in der Form:

$$J = \frac{1}{12}[20{,}4 \cdot 84{,}0^3 - 2(2{,}0 \cdot 80{,}0^3 + 6{,}7 \cdot 78{,}0^3 + 1{,}0 \cdot 60{,}0^3)],$$

und erhalten

$$J = \frac{1}{12}[12091160 - 2(1024000 + 3179500 + 216000)]$$

$$= \frac{1}{12}[12091160 - 8839000]$$

$$= \frac{1}{12} \cdot 3252160$$

$$= 271013 \text{ cm}^4.$$

Hieraus folgt das Widerstandsmoment

$$W = \frac{271013}{42{,}0} = 6453 \text{ cm}^3.$$

Zweite Methode: Wir zerlegen die Querschnittsfläche in die einzelnen Profile (Stehblech, Winkeleisen, Lamellen), aus denen sie aufgebaut ist (Fig. 91b). Da die horizontalen Schwerachsen dieser Einzelflächen nicht in eine gemeinsame Linie fallen, müssen wir das Gesamtträgheitsmoment nach Satz II in § 51 berechnen:

$$J = J_I + F_I \cdot y_I^2 + J_{II} + F_{II} \cdot y_{II}^2 + J_{III} + F_{III} \cdot y_{III}^2 + \ldots$$

Bei der Ausrechnung dieser Summe wird man diejenigen Flächen, die den gleichen Abstand y bis zur Nullinie haben, zusammenfassen. Auf die Lage des Abstandes — ob oberhalb oder unterhalb der Nullachse — kommt es hierbei nicht an, da das Quadrat einer Zahl stets positiv ist.

Die Lamellen im Ober- und im Untergurt kann man zu Rechtecken $25{,}0 \cdot 2{,}0$ vereinen, da man deren Schwerpunkte auch sofort angeben kann. Bei den Winkeleisen müssen Flächeninhalt, Lage der Schwerachse und Trägheitsmoment für diese Achse natürlich aus den Profiltabellen entnommen werden.

Die Ausrechnung geschieht am übersichtlichsten in Form einer Tabelle. In diese wird jeder Querschnittsteil, ferner sein Flächeninhalt F, der Abstand y seines Schwerpunktes bis zur Nullinie des Gesamtquerschnittes und schließlich sein Beitrag zum Gesamtträgheitsmoment J eingetragen. Dieser Beitrag setzt sich zusammen aus dem Trägheitsmoment für die eigene Schwerachse des betreffenden Querschnittsteiles, vermehrt um das Produkt $F \cdot y^2$. Deshalb sind in der folgenden Tabelle unter „Trägheitsmoment“ zwei Vertikal-

Digitized by Google

reihen eingerichtet: Die erste enthält die Werte J_I, J_{II} usw., die zweite die Produkte $F_I \cdot y_I^2$, $F_{II} \cdot y_{II}^2$ usw.

Zum Schlusse bilden wir die Summe $(J_I + J_{II} + \ldots)$ und $(F_I \cdot y_I^2 + F_{II} \cdot y_{II}^2 + \ldots)$ und erhalten

$$J = (J_I + J_{II} + \ldots) + (F_I \cdot y_I^2 + F_{II} \cdot y_{II}^2 + \ldots)\,.$$

Querschnittsteil	Flächeninhalt F (cm²)	Schwerpunktsabstand y (bis zur Nullinie) (cm)	Trägheitsmoment (für die Nullinie) (cm⁴)	
1 Stehblech 800 · 10	$80{,}0 \cdot 1{,}0 = 80{,}0$	0,00	$\frac{1{,}0 \cdot 80{,}0^3}{12} = 42670$	
4 ∟100 · 100 · 10	$4 \cdot 19{,}2 = 76{,}8$	37,18	$4 \cdot 177 = 710$	$4 \cdot 19{,}2 \cdot 37{,}18^2 = 106160$
2 · 2 Lamellen $= 2 \cdot 25{,}0 \cdot 2{,}0$	$2 \cdot 50{,}0 = 100{,}0$	41,00	$2\frac{25{,}0 \cdot 2{,}0^3}{12} = 30$	$2 \cdot 50{,}0 \cdot 41{,}00^2 = 168100$
4 Nietlöcher $= 4 \cdot 2{,}3 \cdot 3{,}0$	$-4 \cdot 6{,}9 = -27{,}6$	40,50	$-4\frac{2{,}3 \cdot 3{,}0^3}{12} = -20$	$-4 \cdot 6{,}9 \cdot 40{,}50^2 = -45270$
			Gesamt: 43390	228990
Trägheitsmoment $J = 43390 + 228990 = 272380$ cm⁴.				
Widerstandsmoment $W = \frac{272380}{42{,}0} = 6485$ cm³.				

Die Ausrechnung in solchen Tabellen hat den Vorteil, daß jede Zahl, die zur Bestimmung des Trägheitsmomentes gebraucht wird, deutlich vor Augen steht. Auf diese Weise wird namentlich die Kontrolle sehr erleichtert. Außerdem sind in dieser Berechnung auch die Abrundungen der Ecken der Winkeleisen berücksichtigt, so daß man die genauen Werte für Trägheits- und Widerstandsmoment erhält. Die geringen Trägheitsmomente der Lamellen und Nietlöcher für ihre eigenen Schwerachsen (30 cm⁴ und —20 cm⁴ in der obigen Tabelle) schreibt man meistens gar nicht hin, da sie gegenüber den anderen Beträgen nichts ausmachen.

Dritte Aufgabe.

Für den in Fig. 84 (in § 46) dargestellten Querschnitt sind J und W zu berechnen!

Die Abmessungen seien

$$b_1 = 6{,}0 \text{ cm}, \qquad h_1 = 2{,}4 \text{ cm},$$
$$b_2 = 4{,}0 \text{ ,, }, \qquad h_2 = 1{,}6 \text{ ,, }.$$

[Hiernach zeichne man die Figur auf!]

Die Lage der Nullinie für diesen Querschnitt ist bereits in § 49 ermittelt. Sie ergab sich

$$z = 0{,}59 \text{ cm}$$


Digitized by Google

oberhalb der Achse $x—x$. Nun berechnen wir das Trägheitsmoment für die Nullinie nach der Formel

$$J = J_I + F_I \cdot y_I^2 + J_{II} + F_{II} \cdot y_{II}^2 + \dots,$$

und zwar der Übersichtlichkeit wegen wiederum in Form einer Tabelle:

Querschnittsteil	Flächeninhalt F (cm²)	Schwerpunktsabstand y (bis zur Nullinie) (cm)	Trägheitsmoment (für die Nullinie) (cm⁴)	
Oberes Rechteck	$6{,}0 \cdot 2{,}4 = 14{,}4$	$1{,}20 - 0{,}59 = 0{,}61$	$\frac{6{,}0 \cdot 2{,}4^3}{12} = 6{,}9$	$14{,}4 \cdot 0{,}61^2 = 5{,}3$
Unteres Rechteck	$4{,}0 \cdot 1{,}6 = 6{,}4$	$0{,}80 + 0{,}59 = 1{,}39$	$\frac{4{,}0 \cdot 1{,}6^3}{12} = 1{,}4$	$6{,}4 \cdot 1{,}39^2 = 12{,}4$
			Gesamt: 8,3	17,7
Trägheitsmoment $J = 8{,}3 + 17{,}7 = 26{,}0$ cm⁴.				
Widerstandsmomente: $W_1 = \frac{26{,}0}{2{,}40 - 0{,}59} = 14{,}4$ cm³; $W_2 = \frac{26{,}0}{1{,}60 + 0{,}59} = 11{,}9$ cm³.				

Zusatz: Für derartige Querschnitte, deren Nullinie man nicht ohne weiteres angeben kann, wird man zweckmäßig die Ermittlung der Nullinie und die Berechnung des Trägheitsmomentes in einer gemeinsamen Tabelle durchführen. Zur Bestimmung der Lage der Nullinie müssen wir die statischen Momente für eine anzunehmende x-Achse aufstellen. Deshalb empfiehlt es sich — um dieselben Abstände benutzen zu können — auch das Trägheitsmoment zunächst für diese Achse auszurechnen und erst am Schlusse der Berechnung mittels der Formel $J_n = J_x - F \cdot z^2$ auf das eigentliche Trägheitsmoment J_n zurückzukommen. (Will man direkt J_n berechnen, so muß man nach Ermittlung der Lage der Nullinie die Abstände der Einzelflächen bis zur Nullinie bestimmen und mit diesen Abständen weiterrechnen; so, wie es in der obigen Tabelle geschehen ist.)

In der folgenden Tabelle ist deshalb das Trägheitsmoment zunächst für die x-Achse ausgerechnet. Dann konnten die Abstände y_I und y_{II} (Fig. 84), die bereits zur Bestimmung der Nulllinie gebraucht wurden, wieder verwandt werden. Hierbei ergibt sich noch eine kleine Rechenvereinfachung: Da das Produkt $F \cdot y^2$ auch in der Form $Fy \cdot y$ geschrieben werden kann, braucht man nur die Zahlen der vierten Vertikalreihe — d. s. die Produkte $F \cdot y$ — noch einmal mit y zu multiplizieren, und erhält hierdurch sofort die Produkte $F \cdot y^2$ der letzten Reihe. Auch beim Ausrechnen des

Digitized by Google

Produktes $F \cdot z^2$ kann man eine Multiplikation ersparen, da das Produkt $F \cdot z$ bereits durch die Summe der statischen Momente — in der vierten Reihe — gegeben. Diese kleinen Kunstgriffe, auf die man beim praktischen Rechnen ja von selber kommt, sind in Klammern [] angedeutet.

Querschnittsteil	Flächeninhalt F (cm²)	Schwerpunktsabstand y bis zur x-Achse (cm)	Statisches Moment $F \cdot y$ für die x-Achse (cm³)	Trägheitsmoment für die x-Achse (cm⁴)	
Oberes Rechteck	$6{,}0 \cdot 2{,}4 = 14{,}4$	$+1{,}2$	$+14{,}4 \cdot 1{,}2 = +17{,}3$	$\frac{6{,}0 \cdot 2{,}4^3}{12} = 6{,}9$	$14{,}4 \cdot 1{,}2^2 = 20{,}8$ $[= +17{,}3 \cdot 1{,}2]$
Unteres Rechteck	$4{,}0 \cdot 1{,}6 = 6{,}4$	$-0{,}8$	$-6{,}4 \cdot 0{,}8 = -5{,}1$	$\frac{4{,}0 \cdot 1{,}6^3}{12} = 1{,}4$	$6{,}4(-0{,}8)^2 = 4{,}1$ $[= -5{,}1 \cdot (-0{,}8)]$
Gesamtwert:	20,8		+12,2	8,3	24,9

Schwerpunktsabstand $z = \frac{+12{,}2}{20{,}8} = +0{,}59$ cm (oberhalb der x-Achse).

Trägheitsmoment für die x-Achse:

$$J_x = 8{,}3 + 24{,}9 = 33{,}2 \text{ cm}^4.$$

Trägheitsmoment für die Nullinie:

$$J_n = J_x - F \cdot z^2 = 33{,}2 - 20{,}8 \cdot 0{,}59^2 = 33{,}2 - 7{,}2 = 26{,}0 \text{ cm}^4$$

$$[= J_x - Fz \cdot z = 33{,}2 - 12{,}2 \cdot 0{,}59 = 33{,}2 - 7{,}2 = 26{,}0 \text{ cm}^4].$$

Widerstandsmomente:

$$W_1 = \frac{26{,}0}{2{,}40 - 0{,}59} = 14{,}4 \text{ cm}^3; \qquad W_2 = \frac{26{,}0}{1{,}60 + 0{,}59} = 11{,}9 \text{ cm}^3.$$

Vierte Aufgabe.

Der Obergurt eines Kranträgers bestehe aus zwei [*N. P. 22 und einer Kranschiene Rote Erde Nr. 2. Die Widerstandsmomente dieses Querschnittes sind zu bestimmen!*

(Vgl. vierte Aufgabe von § 49. Die Figur zeichne man selber auf!)

Wir wollen wiederum Nullinie und Trägheitsmoment durch eine gemeinsame Tabelle ermitteln. Die x-Achse ist durch den Schwerpunkt der Schiene genommen. Von den in der letzten Aufgabe erwähnten Rechenvereinfachungen, $F \cdot y^2 = Fy \cdot y$ und $F \cdot z^2 = Fz \cdot z$, ist jetzt bereits Gebrauch gemacht. Außerdem sind die beiden letzten Vertikalreihen von vorhin zu einer Reihe zusammengezogen.

Zusatz 1: Will man bei einer solchen Berechnung eine sichere Kontrolle haben, so führt man die Untersuchung für zwei verschiedene x-Achsen durch und sieht nach, ob man bei beiden Achsen zu demselben Wert J_n gelangt.

Zusatz 2: Wenn der Querschnitt — wie es hier der Fall ist — sich nur aus *zwei* Teilflächen zusammensetzen läßt, kann man die

Digitized by Google

Querschnittsteil	Flächeninhalt F (cm²)	Schwerpunktsabstand y bis zur x-Achse (cm)	Statisches Moment $F \cdot y$ für die x-Achse (cm³)	Trägheitsmoment für die x-Achse (cm⁴)
1 Kranschiene R. E. Nr. 2	41,01	0,00	0	180
2 [N. P. 22	74,80	13,68	$74{,}80 \cdot 13{,}68 = 1023$	$2 \cdot 2690 = 5380$ $1023 \cdot 13{,}68 = 14000$
Gesamt:	115,81		1023	$J_x = 19560$

Schwerpunktsabstand $z = \frac{1023}{115{,}81} = 8{,}84$ cm (unterhalb der x-Achse).

Trägheitsmoment $J_n = 19560 - 1023 \cdot 8{,}84 = 19560 - 9043 = 10517$ cm⁴.

Widerstandsmomente:

$$W_1 = \frac{10517}{3{,}82 + 8{,}84} = 831 \text{ cm}^3; \qquad W_2 = \frac{10517}{24{,}68 - 8{,}84} = 664 \text{ cm}^3.$$

Rechnung wohl auch etwas abgekürzt hinschreiben, ohne daß sie sogleich unübersichtlich wird. Zunächst hat man den Schwerpunktsabstand von der angenommenen x-Achse:

$$z = \frac{74{,}80 \cdot 13{,}68}{(74{,}80 + 41{,}01)} = 8{,}84 \text{ cm}.$$

Ferner läßt sich bei *zwei* Teilflächen das Trägheitsmoment J_n durch die Formel bestimmen:

$$J_n = J_I + J_{II} + \frac{F_I \cdot F_{II} \cdot a^2}{F_I + F_{II}}$$

(s. § 51, II. Satz, Spezialfall). Für die vorliegende Aufgabe ergibt sich hiernach

$$\begin{aligned} J_n &= 180 + 5380 + \frac{41{,}01 \cdot 74{,}80 \cdot 13{,}68^2}{41{,}01 + 74{,}80} \\ &= 5560 + 4957 \\ &= 10517 \text{ cm}^4. \end{aligned}$$

Fünfte Aufgabe.

Der Querbalken bei einer schweren Werkzeugmaschine war ein Hohlgußkörper von rechteckigem Querschnitt mit folgenden Abmessungen:

Außen . . . . . . 50,0 cm breit, 80,0 cm hoch,
Innenraum . . . . 44,0 „ „ , 72,5 „ „ .

Digitized by Google

Unterfläche 4,5 cm stark; oben und seitlich je 3,0 cm stark. Außerdem trug die untere Fläche zwei in den Hohlraum hineinragende Verstärkungsrippen von je 4,5 · 20,0 cm (hochkant stehend).

Die Widerstandsmomente sind zu berechnen!

(Die Figur zeichne man selber auf!) Da Gußeisen auf Zug ungefähr nur halb soviel aushält wie auf Druck, bildet man einen gußeisernen Querschnitt zweckmäßig so aus, daß das Widerstandsmoment für die Zugseite bedeutend größer ist als für die Druckseite. Dann ist die auftretende größte Zugspannung entsprechend kleiner als die größte Druckspannung, so daß das Material seiner Festigkeitseigenschaft gemäß ausgenutzt ist.

Für die Ausrechnung der Trägheits- und Widerstandsmomente ist der Querschnitt in folgende Teilflächen zerlegt:

zwei seitliche Rechtecke je 3,0 · 80,0,
zwei die Rippen enthaltende Rechtecke je 4,5 (20,0 + 4,5),
den Rest der Unterfläche 4,5 (44,0 — 2 · 4,5),
das obere Rechteck 3,0 · 44,0.

Querschnittsteil	Flächeninhalt F (cm²)	Schwerpunktsabstand y bis zur x-Achse (cm)	Statisches Moment $F \cdot y$ für die x-Achse (cm³)	Trägheitsmoment für die x-Achse (cm⁴)
Seitliche Rechtecke $2 \cdot 80{,}0 \cdot 3{,}0$	480,0	40,00	19200	$2 \cdot \frac{1}{3} 3{,}0 \cdot 80{,}0^3 = 1024000$
Rippen $2 \cdot 24{,}5 \cdot 4{,}5$	220,5	12,25	2700	$2 \cdot \frac{1}{3} 4{,}5 \cdot 24{,}5^3 = 44100$
Unterfläche $35{,}0 \cdot 4{,}5$	157,5	2,25	350	$\frac{1}{3} 35{,}0 \cdot 4{,}5^3 = 1100$
Deckfläche $44{,}0 \cdot 3{,}0$	132,0	78,50	10360	$\frac{1}{12} \cdot 44{,}0 \cdot 3{,}0^3 = 100$ $10360 \cdot 78{,}5 = 813300$
Gesamt:	990,0		32610	$J_x = 1882600$

Schwerpunktsabstand $z = \frac{32610}{990{,}0} = 32{,}94$ cm (oberhalb der x-Achse.

Trägheitsmoment:

$$J_n = 1882600 - 32610 \cdot 32{,}94 = 1882600 - 1074200 = 808400 \text{ cm}^4.$$

Widerstandsmomente:

$$W_1 = \frac{808400}{80{,}0 - 32{,}94} = 17200 \text{ cm}^3; \qquad W_2 = \frac{808400}{32{,}94} = 24600 \text{ cm}^3.$$

Digitized by Google

Die x-Achse wollen wir durch die Grundlinie des Querschnittes legen. Das Trägheitsmoment eines Rechteckes von der Breite b und der Höhe h in bezug auf seine Grundlinie ist:

$$\begin{aligned} J_x &= J_n + F \cdot y^2 \\ &= \frac{1}{12} b h^3 + b h \cdot \left(\frac{h}{2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{12} b h^3 + \frac{b h^3}{4} \\ &= \frac{1}{3} b h^3. \end{aligned}$$

Nach dieser Formel kann man den Beitrag eines Rechteckes, dessen Grundlinie mit der angenommenen x-Achse zusammenfällt, direkt hinschreiben.

Sechste Aufgabe.

Für den in § 49, sechste Aufgabe angegebenen Querschnitt sind die Widerstandsmomente zu berechnen!

Wir ermitteln gemeinsam Nullinie und Trägheitsmoment. Die x-Achse wollen wir wieder in die untere Kante der Lamelle legen. (Die Figur zeichne man selber auf!)

Das Trägheitsmoment der Winkeleisen für die x-Achse kann direkt aus den Profiltabellen entnommen werden, da in diesen die betreffenden Trägheitsmomente — gewöhnlich mit J_b bezeichnet — bereits enthalten sind. Das Trägheitsmoment eines Rechteckes für eine durch seine Grundlinie gehende x-Achse ist (vgl. fünfte Aufgabe):

$$J_x = \tfrac{1}{3} b h^3.$$

Nach dieser Formel sind in der folgenden Tabelle die Beiträge der Rechtecke, falls deren Grundlinien in die angenommene x-Achse fallen, ermittelt.

Schlußbemerkung.

Auch zur Bestimmung von Trägheitsmomenten hat man zeichnerische Verfahren ausgearbeitet, ähnlich denjenigen, die zur Ermittlung der Nullinie dienen. Einen praktischen Wert kann ich auf Grund vielfacher Erfahrungen diesen zeichnerischen Methoden nicht zubilligen. Sie sind niemals genauer und stets langwieriger als das rechnerische Verfahren. Sie haben wohl einen historischen Wert. Da dieser aber nicht maßgebend sein kann — denn es

Digitized by Google

gibt noch sehr viele andere schöne, aber der Vergangenheit an gehörige Untersuchungen —, so kann auf die Wiedergabe dieser graphischen Methoden verzichtet werden.

Querschnittsteil	Flächeninhalt F (cm²)	Schwerpunktsabstand y bis zur x-Achse (cm)	Statisches Moment $F \cdot y$ für die x-Achse (cm³)	Trägheitsmoment für die x-Achse (cm⁴)
1 Stehblech 200 · 10	20,0	+10,00	+200,0	$\frac{1}{3} 1{,}0 \cdot 20{,}0^3 = 2670$
2 ∢ 80 · 80 · 10	30,2	+2,34	+ 70,7	$2 \cdot 170 = 340$
1 Lamelle 190 · 12	22,8	−0,60	− 13,7	$\frac{1}{3} 19{,}0 \cdot 1{,}2^3 = 10$
2 Nietlöcher 20 ∅	− 8,8	−0,10	+ 0,9	$0{,}9 \cdot 0{,}1 = 0$
Gesamt:	64,2		+257,9	$J_x = 3020$

Schwerpunktsabstand $s = \frac{+257{,}9}{64{,}2} = +4{,}0$ cm (unterhalb der x-Achse).

Trägheitsmoment $J_n = 3020 - 257{,}9 \cdot 4{,}0 = 1989$ cm⁴.

Widerstandsmomente:

$$W_1 = \frac{1989}{1{,}2 + 4{,}0} = 384 \text{ cm}^3; \qquad W_2 = \frac{1989}{20{,}0 - 4{,}0} = 124 \text{ cm}^3.$$

§ 55.

Zusammenfassung zum 9. Vortrag und Formeln für Flächeninhalte, Schwerpunkte und Trägheitsmomente.

I. Zusammenfassung.

In diesem Vortrage haben wir uns mit der Bestimmung von Trägheitsmomenten beschäftigt. Das **Grundprinzip** zur Berechnung eines Trägheitsmomentes ist: jeden Flächenstreifen mit dem Quadrate seines Abstandes von der Nullinie multiplizieren und dann alle diese Produkte summieren. Für die Praxis ergaben sich hiernach folgende Regeln:

a) Um für die **Grundformen** (Rechteck, Kreis usw.) mathematische Ausdrücke für J aufzustellen, haben wir direkt die Ausgangsformel benutzt. Mitunter (z. B. beim Dreieck) ist es allerdings bequemer, zunächst einen Hilfswert J_x zu berechnen und dann erst zu J_n zu gelangen.

b) Für **zusammengesetzte Querschnitte** ergibt sich die Zerlegung in einzelne Grundformen. Zum Schlusse hatten wir noch das „Widerstandsmoment W" abgeleitet, das gebraucht wird, um die Maximalspannungen eines Querschnittes direkt hinschreiben zu können.

II. Erläuterung zu den folgenden Tabellen.

1. Zunächst mögen einige rein mathematische Angaben über die für die Statik wichtigsten Kurven, den Kreis und die Parabel,

Digitized by Google

gemacht werden: Schneidet man einen Kegel mit kreisförmiger Basis parallel der Grundfläche, also horizontal, so ist die Schnittfigur bekanntlich ein Kreis. Schneidet man ihn aber parallel einer Mantellinie, so nennt man die entstehende Schnittfigur eine Parabel. Dieses ist die gemeinsame Entstehung von Kreis und Parabel. Jede dieser beiden Figuren hat nun eine Reihe bemerkenswerter mathematischer Eigenschaften. Beim *Kreis* besteht z. B. zwischen der Horizontalentfernung x und dem Vertikalabstand y irgendeines Kreispunktes P die Beziehung (s. Fig. V der Tabelle)

$$x^2 + y^2 = r^2$$

oder

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}\,.$$

Aus dieser Gleichung kann man dann auch für den Kreisbogen (Fig. VI) leicht die entsprechende Formel

$$y = \sqrt{r^2 - m^2} - f$$

ableiten, nach der die Höhen y der einzelnen Bogenpunkte über der Basis zu berechnen sind. Bei der *Parabel* (Fig. IX der Tabelle) ist eine der wichtigsten Beziehungen folgende:

$$l^2 : m^2 = f : g\,.$$

In Worten: Die Quadrate zweier rechtwinklig zur Symmetrieachse stehenden Sehnen l und m verhalten sich wie deren Abstände f und g vom Scheitelpunkte A. Aus dieser Beziehung folgt dann die weitere:

$$y = \frac{4f}{l^2}x(l - x)\,,$$

die namentlich gebraucht wird, um aus den Horizontalentfernungen x der einzelnen Parabelpunkte deren Höhenordinaten y zu berechnen. Diese Gleichung wird später so häufig benutzt werden, daß man gut tut, sie auswendig zu merken.

2. In der dritten Vertikalreihe befinden sich die zur Schwerpunktsbestimmung dienenden Angaben. Bei der Schwerpunktsbestimmung zusammengesetzter Figuren wird häufig der Satz gute Dienste leisten: ***Haben zwei Flächen F_I und F_{II} die Schwerpunkte S_I und S_{II}, so liegt der Schwerpunkt S der Gesamtfigur $(F_I + F_{II})$ auf der Verbindungslinie von S_I und S_{II}, und die Abstände von S bis S_I und S_{II} verhalten sich umgekehrt wie die Flächeninhalte von F_I***

Digitized by Google

und F_{II}. (Der Schwerpunkt S liegt zunächst der größeren der beiden Flächen F_I und F_{II}.) Hier, in der Festigkeitslehre, möge dieser Satz ohne Beweis gegeben werden. Letzteren kann man sich ja aus der Entstehung des „Schwerpunktes" auch leicht selber ableiten. Sobald wir dann den Schwerpunkt S kennen, haben wir den Punkt des Querschnittes, durch den die Nullinie hindurchgehen muß.

3. In der letzten Vertikalreihe sind die Trägheits- und Widerstandsmomente zusammengestellt. Wenn hier z. B. beim Dreieck das Trägheitsmoment J_z für eine beliebig eingezeichnete z-Achse angegeben ist, so bedeutet dieses nach der Erklärung des „Trägheitsmomentes" also folgendes: Teilt man die Dreieckfläche F parallel der z-Achse in eine Anzahl unendlich schmaler Flächenstreifen, multipliziert dann jeden derselben mit dem Quadrate seines Abstandes von der z-Achse und addiert schließlich alle diese Produkte, so kommt der angegebene Wert $J_z = \ldots$ heraus. Auf diese Weise kann man für jede beliebige Achse das zugehörige Trägheitsmoment der betreffenden Figur ermitteln. Hat man dann einen Querschnitt, der sich aus mehreren Teilflächen zusammensetzt, so ist sein Trägheitsmoment für irgendeine Achse gleich der Summe der Trägheitsmomente der Teilflächen für diese Achse. Die letzteren Trägheitsmomente muß man ja im allgemeinen nach der Formel $J_x = J_n + F \cdot z^2$ bestimmen. Häufig wird man aber auch die bereits ausgerechneten Werte der folgenden Tabellen benutzen können. (Namentlich die Formel $J_x = \frac{1}{3} b h^3$ für das Rechteck, wenn die x-Achse durch die Grundlinie b geht.) Zum Schlusse muß man stets auf das Trägheitsmoment für die Nullinie kommen, da von dieser aus die Abstände der äußersten Fasern und hierauf die Widerstandsmomente aufgestellt werden. Letztere beziehen sich also stets auf die Nullinie und haben für eine andere Achse gar keinen Sinn.

Nach diesen Erläuterungen dürften die folgenden Tabellen verständlich sein. Wer sich zum „flotten Statiker" ausbilden will, wird nicht umhin können, außer den bereits bekannten geometrischen Formeln auch die wichtigsten Ausdrücke zur Bestimmung von S, J und W auswendig zu lernen.

Digitized by Google

Tabelle A.

Figur	Geometrische Angaben (F = Flächeninhalt)	Zur Schwerpunktsbestimmung:	Trägheits- und Widerstandsmoment
I.	**Dreieck:** $F = \frac{1}{2} b h$ ($1'$, $2'$, $3'$ Mittelpunkte der Seiten; $1-1'$, $2-2'$, $3-3'$ Mittellinien).	S = Schnittpunkt der Mittellinien (letztere werden durch S gedrittelt). **Vertikalabstände** von Spitze und Grundlinie: $e_1 = \frac{2}{3} h$, $e_2 = \frac{1}{3} h$. Abstand von irgendeiner anderen Achse $z-z$ zu bestimmen durch: $r = \frac{1}{3}(u + v + w)$. [Also z. B. $e = \frac{1}{3}(d + b)$.] Vorzeichen v. u, v, w s. J_z.	$J_n = \frac{1}{36} b h^3$, $J_x = \frac{1}{4} b h^3$, $J_y = \frac{1}{12} b h^3$, $J_z = \frac{F}{6}[(u + v + w)^2 - (uv + uw + vw)]$. Hierin, falls z-Achse das Dreieck schneidet, entgegengesetzt liegende Abstände mit entgegengesetzten Vorzeichen einführen. $W_1 = \frac{1}{24} b h^2$ (f. obere Faser), $W_2 = \frac{1}{12} b h^2$ (f. unt. Faser).
II.	**Parallelogramm:** $F = b \cdot h$ $= a \cdot h'$. **Rechteck:** $F = b \cdot h$. **Quadrat** (Seite a): $F = a^2$.	S = Schnittpunkt der Diagonalen. S = Schnittpunkt der Mittellinien. Abstände $e = \frac{h}{2}$, $\left(e' = \frac{h'}{2}\right)$. **Für Quadrat:** $e = \frac{a}{2}$.	$J_n = \frac{1}{12} b h^3$, $J_x = \frac{1}{3} b h^3$, $W = \frac{1}{6} b h^2$. **Für Quadrat setze** $h = b = a$.
III. (a) (b) (c)	**Trapez:** $F = \frac{h}{2}(a + b)$. (m und n Mittelpunkte der Seiten a und b; Linie mn „Transversale".) Fig. a und b schiefwinklige, Fig. c rechtwinkliges Trapez.	S liegt auf der Transversalen mn, außerdem auf Linie xy bzw. $x'y'$ und auf Linie $S_1 S_2$. [xy und $x'y'$ nach Fig. (a), $S_1 S_2$ nach Fig. (b) zu finden. S_1 und S_2 sind die Schwerpunkte der Dreiecke $1, 2, 3$ und $2, 3, 4$.] Hierdurch S zeichnerisch zu finden. **Vertikalabstände** $e_1 = \frac{h}{3} \frac{2a + b}{a + b}$, $e_2 = \frac{h}{3} \frac{a + 2b}{a + b}$. Abstand $e' = \frac{a^2 + ab + b^2}{3(a + b)}$.	Durch Zerlegung in die beiden Dreiecke $1, 2, 3$ und $2, 3, 4$: $J_x = \frac{1}{12} a h^3 + \frac{1}{4} b h^3$ $= \frac{h^3}{12}(a + 3b)$ $J_n = J_x - F \cdot e_2^2$. Für das rechtwinklige Trapez ist das Trägheitsmoment für die Achse $z-z$: $J_z = \frac{h}{12}(a + b)(a^2 + b^2)$ $= \frac{F}{6}(a^2 + b^2)$.
IV.	**Beliebiges Vieleck:** Nach Zerlegung in Dreiecke ergibt sich $F = F_1 + F_2 + F_3$. ($F_1 \ldots$ Flächeninhalte der einzelnen Dreiecke.) Oder nach Fällen von Loten auf beliebige z-Achse F als Summe bzw. Differenz von rechtwinkligen Trapezen darstellen.	Zunächst die Schwerpunkte S_1, S_2, S_3 der Dreiecke bestimmen. Dann Schwerpunkt $S_{1,2}$ von $(F_1 + F_2)$ durch $u_1 = u \frac{F_2}{F_1 + F_2}$, $u_2 = u \frac{F_1}{F_1 + F_2}$. Schließlich Gesamtschwerpunkt S: $v_{1,2} = v \frac{F_3}{(F_1 + F_2) + F_3}$; $v_3 = v \frac{(F_1 + F_2)}{(F_1 + F_2) + F_3}$. Oder Abstand von S bis z-Achse durch Zerlegung in Trapeze bestimmen (wie bei J).	Trägheitsmomente für beliebige z-Achse: J_z = Summe der Trägheitsmomente $J_{1,z}$, $J_{2,z}$ usw. der Dreiecke F_1, F_2 usw. für die z-Achse. Oder: Von den Ecken auf die z-Achse Lote fällen. Dann ist J_z gleich Summe bzw. Differenz der Trägheitsmomente $J_{I,z}$, $J_{II,z}$ usw. der entstandenen rechtwinkligen Trapeze.

Digitized by Google

Tabelle B.

Figur	Geometrische Angaben (F = Flächeninhalt)	Zur Schwerpunktsbestimmung:	Trägheits- und Widerstandsmoment
V	**Kreis:** $F = \frac{d^2\pi}{4} = r^2\pi$. **Kreisring:** $F = (D^2 - d^2)\frac{\pi}{4} = (R^2 - r^2)\pi$ $= d_m \cdot \pi \cdot \delta$. ($\delta$ = Wandstärke, d_m = mittl. Durchm.)	Kreis: Schwerpunkt S im Mittelpunkt M. Kreisring: Schwerpunkt S im Mittelpunkt M.	Kreis: $J = \frac{1}{64}d^4\pi = \frac{1}{4}r^4\pi$, $W = \frac{1}{32}d^3\pi = \frac{1}{4}r^3\pi$. Kreisring: $J = \frac{1}{64}(D^4 - d^4)\pi = \frac{1}{4}(R^4 - r^4)\pi$ $W = \frac{1}{32}(D^4 - d^4)\frac{\pi}{D} = \frac{1}{4}(R^4 - r^4)\frac{\pi}{R}$
VI	**Kreisabschnitt:** $F = \frac{1}{2}r^2\left(\frac{\alpha^0}{90^0}\pi - \sin 2\alpha\right)$ $= \frac{r(b - l) + l \cdot f}{2}$.	Abstand des Schwerpunktes: $v = \frac{l^3}{12F} = \frac{4}{3}\frac{r\sin^3\alpha}{\frac{\alpha^0}{90^0}\pi - \sin 2\alpha}$.	$J_x = \frac{r^4}{16}\left(\frac{\alpha^0}{45^0}\pi - \sin 4\alpha\right)$, $J_y = \frac{r^4}{48}\left(\frac{\alpha^0}{15^0}\pi - 8\sin 2\alpha + \sin 4\alpha\right)$.
	Zur geometrischen Bestimmung eines Kreisbogens: 1. Gegeben Länge l; Pfeilhöhe f. Dann ist: Radius $r = \frac{l^2}{8f} + \frac{f}{2}$; $\sin\alpha = \frac{l}{2 \cdot r}$, $\alpha = \ldots$, $2\alpha = \ldots$; Bogenlänge $b = r\frac{\alpha^0}{90^0}\pi$; Abschnitt $f' = r - f$; Ordinate $y = \sqrt{r^2 - m^2} - f'$. (Durch die Ordinaten y alle Punkte des Bogens rechnerisch zu bestimmen.) 2. Gegeben Radius r; Zentriwinkel 2α. Dann ist: $l = 2 \cdot r\sin\alpha$; $f' = r\cos\alpha$; $f = r - f'$; usw. 3. Gegeben Radius r; Länge l. Dann ist: $\sin\alpha = \frac{l}{2 \cdot r}$ usw. 4. Gegeben Radius r; Pfeilhöhe f. Dann ist: $l = 2\sqrt{f(2r - f)}$; usw.		
VII	**Kreisausschnitt:** $F = r^2\pi\frac{\alpha}{180} = \frac{1}{2}br$. **Halbkreis:** $F = \frac{1}{2}r^2\pi$. **Viertelkreis:** $F = \frac{1}{4}r^2\pi$. **Quadrat weniger Viertelkreis:** $F = r^2(1 - \frac{1}{4}\pi)$.	Kreisausschnitt: $v_1 = \frac{2}{3}r\frac{l}{b} = \frac{2}{3}r\sin\alpha\frac{180^0}{\alpha^0 \cdot \pi}$. Halbkreis: $v_2 = \frac{4}{3}\frac{r}{\pi}$. Viertelkreis: $v_3 = \frac{4}{3}\frac{r}{\pi}$. Quadrat — Viertelkreis: $v_4 = \frac{2r}{3(4 - \pi)}$.	Kreisausschnitt: $J_x = \frac{r^4}{8}\left(\frac{\alpha^0}{90^0}\pi + \sin 2\alpha\right)$, $J_y = \frac{r^4}{8}\left(\frac{\alpha^0}{90^0}\pi - \sin 2\alpha\right)$. Halbkreis: $J_x = J_y = \frac{r^4}{8}\pi$. Viertelkreis: $J_x = J_y = \frac{r^4}{16}\pi$. Quadrat — Viertelkreis: $J_x = J_y = r^4\left(\frac{1}{3} - \frac{\pi}{16}\right)$.
VIII	**Kreisringstück:** $F = \frac{\alpha^0}{180^0} \cdot \pi(R^2 - r^2)$ $= \frac{\alpha^0}{90^0}\pi \cdot \delta \cdot r_m$. ($r_m$ = mittlerer Radius, δ = Stärke des Ringes.)	Abstand d. Schwerpunkt.: $v = \frac{2}{3}\frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2}\sin\alpha\frac{180^0}{\alpha^0 \cdot \pi}$ $= \frac{6R \cdot r + 2\delta^2}{3(R + r)}\sin\alpha\frac{180^0}{\alpha^0 \cdot \pi}$. Falls $\delta = 0$ (Kreisbogen): $v = r\sin\alpha\frac{180^0}{\alpha^0 \cdot \pi}$. v' = rd. $\frac{2}{3}f$ (für jed. flachen Bogen brauchbar; $\delta = 0$).	$J_x = \frac{R^4 - r^4}{8}\left(\frac{\alpha^0}{90^0}\pi + \sin 2\alpha\right)$, $J_y = \frac{R^4 - r^4}{8}\left(\frac{\alpha^0}{90^0}\pi - \sin 2\alpha\right)$.
IX	**Parabelstück:** $F = \frac{2}{3}af$. [Geg. Länge l, Pfeilhöhe f. Dann ist: $y = \frac{4f}{l^2}x(l - x)$. Hierdurch Parabelpunkte zu bestimmen.] **Rechteck weniger Parabel:** $F = \frac{1}{3}af$.	Parabelstück: $u = \frac{5}{8}a$, $v = \frac{2}{5}f$. Rechteck — Parabel: $u' = \frac{1}{4}a$, $v' = \frac{7}{10}f$.	Parabelstück: $J_n = \frac{8}{175}af^3$, $J_x = \frac{2}{7}af^3$, $J_y = \frac{16}{105}af^3$, $J_z = \frac{2}{15}fa^3$.

Digitized by Google

10. Vortrag:

Kraft- und Momentensummen des Balkens zwischen zwei Stützen bei ständiger Belastung.

Um die Schubspannungen τ und die Normalspannungen σ eines auf Biegung beanspruchten Balkens zu berechnen, brauchen wir außer der Nullinie und dem Trägheitsmomente noch die „Kraftsumme“ (Querkraft) Q und die „Momentensumme“ (das „Moment“) M. Gemäß der Entstehung dieser Summenausdrücke bei der Ableitung der Biegungsformeln $T = Q$ und $\sigma = \frac{M}{J} y$ dient zur Aufstellung von Q und M allgemein die Regel: Um für eine

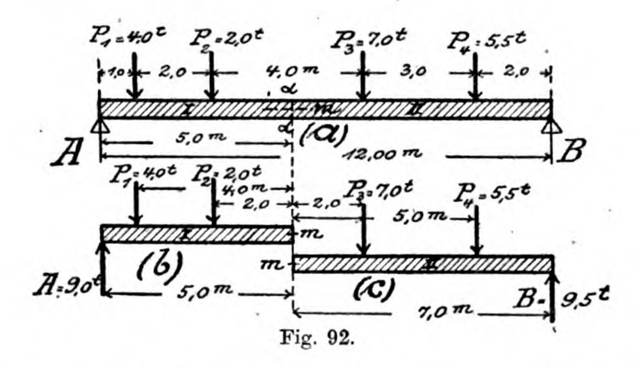


Fig. 92.

Stelle α—α (Fig. 92a) Kraft- und Momentensumme zu berechnen, denken wir uns den Balken an dieser Stelle durchschnitten und betrachten nun *entweder* den linken (Fig. 92b) *oder* den rechten Balkenteil (Fig. 92c). Dann ist die „Querkraft Q“ die Summe aller Kräfte, die *an dem betrachteten Balkenteile* vorhanden sind. Und das „Moment M“ entsteht, indem wir jede Kraft *des betrachteten Balkenteiles* mit ihrem Abstande bis zu dem Schnitte multiplizieren und von diesen Produkten (statischen Momenten) die Summe bilden. Bei der Summierung ist sowohl bei Q als auch bei M darauf zu achten, daß entgegengesetzt gerichtete Kräfte durch entgegengesetzte Vorzeichen unterschieden werden.

Nach dieser Erklärung können wir für jede Stelle eines Balkens und für jede beliebige Belastung desselben die Werte Q und M ermitteln. Wir wollen nun für die verschiedenen Belastungsarten die Kraft- und Momentensummen aufstellen. In diesem Vortrage möge zunächst der Fall untersucht werden, daß es sich um einen

Digitized by Google

Balken zwischen zwei Stützen (ohne überkragende Enden) handle, der eine ständige (d. h. *unbeweglich* stehende) vertikale Belastung trägt. Wir ordnen alle Aufgaben in die folgenden Belastungsfälle I—VIII.

§ 56.

I. Belastungsfall: Direkt wirkende Einzellasten.

Auf diesen Belastungsfall lassen sich alle anderen Belastungsfälle zurückführen, da ja auch eine verteilte Belastung nichts anderes ist als eine Aufeinanderfolge von sehr kleinen Einzellasten. Wir wollen nun an einem Beispiele die Summenausdrücke Q und M zunächst noch einmal in der besprochenen rechnerischen Weise aufstellen und dann die Ermittlung auch zeichnerisch durchführen.

I. Analytische Bestimmung von Q und M.

Zunächst bestimmen wir die Auflagerdrücke A und B. Zu diesem Zwecke betrachten wir den Balken als Ganzes und stellen für die Bezugspunkte B und A die Gleichgewichtsbedingung $\Sigma M = 0$ auf. Dann ergibt sich (vgl. Fig. 92a):

$$A = \frac{1}{12,0}(4,0 \cdot 11,0 + 2,0 \cdot 9,0 + 7,0 \cdot 5,0 + 5,5 \cdot 2,0)$$
$$= 9,0 \text{ t},$$
$$B = \frac{1}{12,0}(4,0 \cdot 1,0 + 2,0 \cdot 3,0 + 7,0 \cdot 7,0 + 5,5 \cdot 10,0)$$
$$= 9,5 \text{ t}.$$

(Kontrolle: $A + B = 4,0 + 2,0 + 7,0 + 5,5$.)

Um nun für den Querschnitt $\alpha-\alpha$ die Werte Q und M auszurechnen, betrachten wir entweder den Teil links oder den Teil rechts vom Schnitte (Fig. 92b). Mit Beachtung der für Q und M aufgestellten Vorzeichenregeln (§ 43 und 44) finden wir bei Betrachtung des linken Teiles:

$$Q = +9,0 - 4,0 - 2,0$$
$$= +3,0 \text{ t},$$
$$M = +9,0 \cdot 5,0 - 4,0 \cdot 4,0 - 2,0 \cdot 2,0$$
$$= +25,0 \text{ mt}.$$

Bei Betrachtung des rechten Teiles würde sich ergeben:

$$Q = -9,5 + 5,5 + 7,0$$
$$= +3,0 \text{ t},$$
$$M = +9,5 \cdot 7,0 - 5,5 \cdot 5,0 - 7,0 \cdot 2,0$$
$$= +25,0 \text{ mt}.$$

Digitized by Google

Wenn wir nun auf Grund dieser Resultate die inneren Kräfte der Querschnittsfläche einzeichnen würden, so bekämen wir folgende Darstellung: Auf dem linken Teil zeigen die Schubspannungen nach unten, und die Normalspannungen zeigen in den oberen Fasern nach links und in den unteren nach rechts (d. h. oben ist Druck, unten ist Zug). Am rechten Teile zeigen dementsprechend die Schubspannungen nach oben, und die Normalspannungen wirken auf die oberen Fasern nach rechts und auf die unteren nach links ein.

II. Graphische Bestimmung von Q und M.

A. Die Kraftsummen Q. Um Querkräfte und Momente zeichnerisch zu bestimmen, müssen wir zunächst auf diese Weise die Auflagerdrücke A und B ermitteln. Hierbei verfahren wir nach § 16: Wir reihen in Fig. 93b die Kräfte $P_1 = ab$, $P_2 = bc$, $P_3 = cd$, $P_4 = de$ zu einem Kräftepolygon aneinander (Kräftemaßstab: 1 t = 0,2 cm), ziehen vom beliebigen Pole O die Polstrahlen II, III, IV, V, VI und parallel hierzu in Fig. 93d die Seilstrahlen II nach der Kraft P_1, III zwischen P_1 und P_2, IV usw. [Man beachte unsere alte Regel, daß drei Linien (z. B. II, P_1 und III), die in Fig. 93b ein Dreieck bilden, sich in Fig. 93d in einem Punkte schneiden!] Um nun den ersten Seilstrahl, I, und den letzten, VII, zu finden, verbinden wir den Schnittpunkt s von Strahl II und A mit dem Schnittpunkte s von Strahl VI und B. Parallel zu dieser „Schlußlinie" ziehen wir dann in Fig. 93b durch O die beiden (zusammenfallenden) Polstrahlen I und VII und finden $A = fa$ und $B = ef$.

Wir wollen jetzt die Kraftsummen für eine Reihe von Schnitten bestimmen. Betrachten wir z. B. Schnitt *1* und untersuchen den links von diesem Schnitte liegenden Teil, so haben wir als einzige äußere Kraft den Auflagerdruck A. Also ist

$$Q_1 = +A.$$

Um diese Querkraft zeichnerisch darzustellen, tragen wir sie von einer Nullachse $A'B'$ auf. Zu diesem Zwecke ziehen wir durch Anfangspunkt f und Endpunkt a von A in Fig. 93b horizontale Linien und finden $A'A'' = fa = A$ und durch Hinunterloten von Punkt *1* die zu diesem Querschnitte gehörige Querkraft Q_1. Man sieht hierbei, daß es gleichgültig ist, an welcher Stelle zwischen A und P_1 der Schnitt 1 gelegt ist; die Kraftsumme hat für alle Schnitte zwischen A und P_1 den Wert $+A$.

Digitized by Google

Gehen wir jetzt zu Querschnitt *2* von Fig. 93a, so ist die zu diesem Schnitte gehörige Kraftsumme

$$Q_2 = +A - P_1 .$$

Der Vergleich mit der Kraftsumme des Schnittes *1* ergibt, daß man Q_2 auch schreiben kann:

$$Q_2 = Q_1 - P_1 .$$

Um also Q_2 zu erhalten, brauchen wir von Q_1 nur die Kraft P_1 abzuziehen. Dieses geschieht am einfachsten, indem wir durch

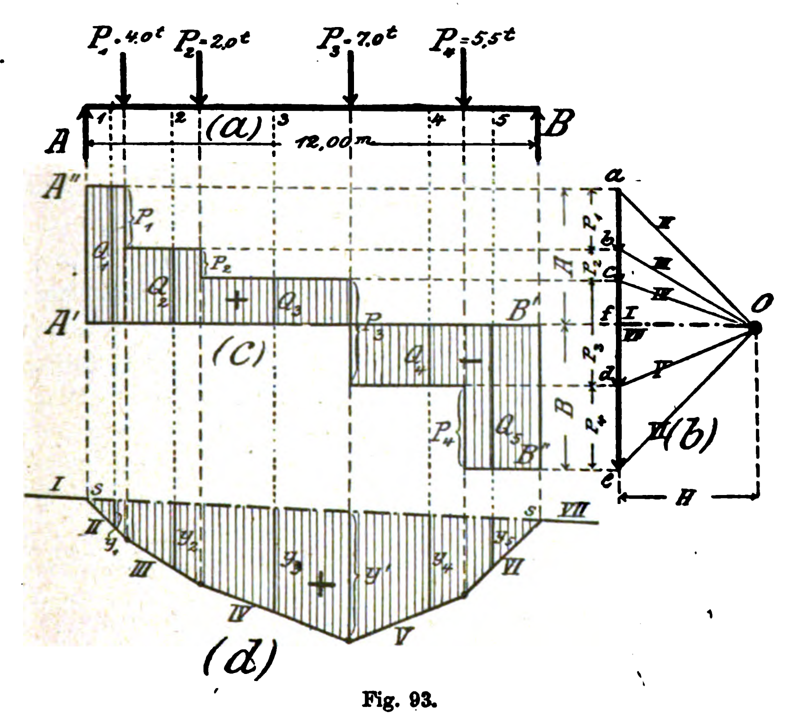


Fig. 93.

(Längenmaßstab 1 cm = 2,0 m; Kräftemaßstab 1 cm = 5,0 t.)

Punkt *b* die horizontale Linie ziehen. Dadurch wird P_1 horizontal übertragen, und die unter *2* gemessene Strecke ist gleich $Q_1 - P_1 = +A - P_1 = Q_2$. Diese Querkraft Q_2 ist die gleiche für alle Querschnitte zwischen P_1 und P_2; denn die Summe der links von einem solchen Schnitte liegenden Kräfte ist stets $+A - P_1$.

Beim Querschnitte *3* haben wir entsprechend

$$\begin{aligned} Q_3 &= +A - P_1 - P_2 \\ &= Q_2 - P_2 , \end{aligned}$$

Digitized by Google

d. h. wir haben von Q_2 noch die Kraft P_2 abzuziehen. Dieses geschieht, indem wir aus dem Kräftepolygon Fig. 93b durch die Endpunkte von P_2 die horizontalen Linien ziehen, hierdurch P_2 übertragen und durch Hinunterloten von *3* die Strecke $Q_3 = Q_2 - P_2 = +A - P_1 - P_2$ erhalten.

Für die Querkraft Q_4 ergibt sich:

$$Q_4 = +A - P_1 - P_2 - P_3$$
$$= Q_3 - P_3 .$$

Wir sehen, daß P_3 (das wieder durch Hinüberprojizieren aus dem Kräftepolygon gefunden wird) größer ist als Q_3, so daß die Summe Q_4 negativ wird. Im Querschnitte *4* treten die Schubspannungen also so auf, daß sie auf den linken Teil nach oben und auf den rechten nach unten zeigen.

Zum Schlusse ist dann noch

$$Q_5 = +A - P_1 - P_2 - P_3 - P_4$$
$$= Q_4 - P_4$$

in Fig. 93c dargestellt. Bei Q_5 wäre es natürlich bequemer gewesen, die Summe aller am *rechten* Teile wirkenden Kräfte aufzustellen; man bekommt dann $Q_5 = -B$, wie auch Fig. 93c zeigt. Die in Fig. 93c schraffierte Fläche gibt also für jeden beliebigen Schnitt die dazugehörige Kraftsumme (Querkraft) Q an. Wir nennen sie deshalb die „*Kraftsummenfläche*“ oder „*Querkraftfläche*“. Sie besteht aus einem positiven und aus einem negativen Teile.

Aufgabe: Man bestimme für die Schnitte *1 . . . 5* die Kraftsummen analytisch, entwerfe dann Fig. 93 selbständig und vergleiche die aus der Zeichnung entnommenen Werte mit den gerechneten!

B. Die Momentensummen *M*. Um die Biegungsmomente graphisch darzustellen, greifen wir auf § 21, I zurück. Hier wurde gezeigt, daß die Summe der statischen Momente einer beliebigen Anzahl von Kräften in bezug auf einen beliebigen Punkt E gefunden werden kann, indem man die Kräfte zu einem Kräftepolygon aneinanderreiht, das zugehörige Seilpolygon zieht und dann das Produkt $H \cdot y$ bildet. Hierin ist H die Polweite und y die Strecke, die die beiden äußersten Seilstrahlen auf der durch E zu der Ersatzkraft R parallel gezogenen Geraden abschneiden (vgl. Fig. 48 und 49).

Soll nun das Moment M_1 in bezug auf den Schnitt *1* aufgestellt werden, so haben wir (bei Betrachtung des linken Teiles)

Digitized by Google

als äußere Kraft den Auflagerdruck A. Statt nun aber A besonders aufzuzeichnen und hierzu das Seilpolygon zu konstruieren, benutzen wir Fig. 93b und d. Hier ist bereits $A = fa$ dargestellt; die zu A gehörigen Polstrahlen sind I (nach dem Anfangspunkt) und II (nach dem Endpunkt). Die hierzu parallelen Seilstrahlen I und II haben wir vorher schon in Fig. 93d gezeichnet. Wir haben also nur noch durch Punkt *1* die Parallele zu R (in diesem Falle also zu A, da das Kräftesystem nur aus dieser einen Kraft besteht) zu ziehen, die Strecke y_1 abzumessen, die auf dieser Parallelen zwischen dem ersten (I) und dem letzten (II) Seilstrahle liegt, und finden

$$M_1 = H \cdot y_1 .$$

Bei der Momentensumme M_2 in bezug auf Schnitt *2* haben wir die äußeren Kräfte A und P_1. In Fig. 93b sind diese schon zu einem Kräftepolygon, $f - a - b$, aneinandergereiht. Die Polstrahlen sind I, II, III; und die Seilstrahlen in Fig. 93d entsprechend I, II, III. Jetzt ist also I der erste Seilstrahl und III der letzte. Ziehen wir dann durch *2* die Parallele zu der Ersatzkraft von A und P_1 (also eine vertikale Linie) und messen den zwischen I und III liegenden Abschnitt y_2 dieser Parallelen, so ist

$$M_2 = H \cdot y_2 .$$

In derselben Weise finden wir M_3. Das Kräftepolygon ist jetzt $f - a - b - c$. Der erste Seilstrahl ist wieder I (da A stets die erste äußere Kraft ist), der letzte ist IV, und wir erhalten

$$M_3 = H \cdot y_3 .$$

Entsprechend

$$M_4 = H \cdot y_4 ,$$

$$M_5 = H \cdot y_5 .$$

Da das Seilpolygon in Fig. 93d bereits früher zur Bestimmung von A und B gezeichnet war, brauchen wir zur Ermittlung der Momente nur noch die Strecken $y_1, y_2, \ldots$ unter den Schnitten *1*, *2*, ... abzumessen. *Wir bekommen also das zu einem beliebigen Querschnitte gehörige Biegungsmoment, indem wir die unter diesem Schnitte liegende Ordinate y der in Fig. 93d schraffierten Fläche multiplizieren mit der Polweite H.* Diese Fläche (die also zwischen der Schlußlinie $s-s$ und den zu den Lasten $P_1, P_2, \ldots$ gehörigen Seilstrahlen $II, III, \ldots$ liegt) nennen wir die *Culmann*sche Momentenfläche. (*Culmann*, ehemaliger Professor in Zürich, ist der

Begründer der graphischen Statik.) Sie stellt die Momente *im* $\frac{1}{H}$*fachen Maßstabe* dar.

In den Produkten $H \cdot y$ ist H im Längenmaßstab und y im Kräftemaßstab oder umgekehrt abzumessen. Für den Querschnitt *3*, der mit Schnitt $\alpha - \alpha$ in Fig. 92 übereinstimmt, gibt Fig. 93d die Strecke $y = 1{,}4$ cm. Nun ist der Kräftemaßstab 1 cm = 5,0 t; der Längenmaßstab 1 cm = 2,0 m. H ist in der Figur gleich 1,8 cm. Demnach ist

$$M_3 = (1{,}8 \cdot 2{,}0) \cdot (1{,}4 \cdot 5{,}0) = 25 \text{ mt},$$

oder auch

$$M_3 = (1{,}8 \cdot 5{,}0) \cdot (1{,}4 \cdot 2{,}0) = 25 \text{ mt},$$

in Übereinstimmung mit dem unter *I* (rechnerische Methode) gefundenen Werte.

Aufgabe: Man bestimme für die Schnitte *1 . . . 5* die Momentensummen analytisch und vergleiche sie mit den graphisch gefundenen Werten!

Zu merken:

1. Zunächst möge noch einmal daran erinnert werden, daß bei Bildung der Kraft- und der Momentensumme die einzelnen Kräfte natürlich mit verschiedenen Vorzeichen einzuführen sind, je nachdem sie nach oben oder nach unten, bzw. rechts- oder linksherum um den betrachteten Querschnitt zeigen. Hierbei gilt aber nicht für eine Richtung stets dasselbe Vorzeichen, sondern es muß noch unterschieden werden, ob die in dieser Richtung wirkende Kraft sich links oder rechts von dem Querschnitte befindet. Insgesamt haben wir für die verschiedenen Richtungen die in § 43 zusammengestellte Vorzeichenfestsetzung, die sich übersichtlich auch durch folgendes Schema darstellen läßt.

Für die Kraftsumme gilt:

Links: ↑ = +, ↓ = −. *Rechts:* ↑ = −, ↓ = +.

Für die Momentensumme gilt:

Links: ↻ = +, ↺ = −. *Rechts:* ↻ = −, ↺ = +.

2. Als etwas Neues wollen wir uns aus Fig. 93c hinsichtlich der **Kraftsumme** Q folgendes merken: Zu allen Querschnitten, die sich zwischen zwei aufeinanderfolgenden Kräften befinden, gehört ein und dieselbe Kraftsumme Q. Nennen wir also den Abstand zwischen zwei aufeinanderfolgenden Kräften ein „**Feld**“ des Balkens,

Digitized by Google

so können wir sagen: **Alle Querschnitte innerhalb eines Feldes haben die gleiche Querkraft Q.**

Von einem Felde zu dem benachbarten ändert sich die Kraftsumme um den Betrag der die Felder trennenden äußeren Kraft (Fig. 93c). Für einen Querschnitt, der direkt unterhalb einer Kraft liegt, läßt sich also eigentlich gar kein bestimmter Wert für Q angeben, da sich hier die Kraftsumme sprungweise ändert. Hierzu muß man aber bedenken, daß in Wirklichkeit eine Last niemals in einem mathematischen Punkte angreift, sondern daß sie stets auf eine Strecke — und wenn es auch nur einige Zentimeter sind — verteilt ist. Deshalb ändern sich in Wirklichkeit die Querkräfte nicht sprungweise, sondern es findet ein allmählicher Übergang von der größeren zur kleineren Kraftsumme statt. Um aber diese Übergänge nicht besonders untersuchen zu müssen, zeichnet man die Abstufungen einfach nach Fig. 93c ein und nimmt für einen direkt unter einer Last gelegenen Querschnitt zur Sicherheit den ungünstigeren der beiden benachbarten Werte Q.

Ferner sei bei den Kraftsummen Q nochmals darauf hingewiesen, daß die Kraftsummen teils positiv, teils negativ sind. Die Fig. 93c zeigt, daß die Querkräfte am Auflager A ihren größten positiven Wert haben, dann für die folgenden Querschnitte kleiner sind und schließlich negativ werden. (Diese Aussage gilt aber im allgemeinen nur für Balken *ohne* überkragende Enden!)

3. Hinsichtlich der **Momentensummen M** wollen wir uns aus Fig. 93d merken: Am Auflager sind sie gleich Null, dann wachsen sie allmählich an, erreichen einen Größtwert, nehmen hierauf gleichmäßig ab und sind dann am anderen Auflager wieder gleich Null. Gegenüber den Kraftsummen bestehen also die Unterschiede: **Die Größe der Momente ändert sich von Querschnitt zu Querschnitt** (nicht nur von „Feld“ zu „Feld“); **das Vorzeichen der Momente ist überall positiv.** (Letztere Aussage gilt aber nicht mehr für den überkragenden Balken; vgl. 12. Vortrag!)

Trägt man die Momente zeichnerisch auf, so ergibt sich ein Vieleck, dessen Eckpunkte unter den Lasten liegen (Fig. 93d). Daraus folgt: **Das größte Moment liegt stets unter dem Angriffspunkt einer Last** (nie zwischen zwei Lasten).

Digitized by Google

§ 57.

Die Entwicklung der Momentensummen aus den Kraftsummen. Das Maximalmoment.

Um die Berechnung der Momentensummen für die verschiedenen Querschnitte eines Balkens zu erleichtern, wollen wir im folgenden eine Methode erläutern, nach der man die Momente fortlaufend auseinander entwickeln kann. Bei dieser Gelegenheit wird sich gleichzeitig ein Kennzeichen für den Querschnitt ergeben, der von allen Querschnitten die größte Momentensumme hat.

I. Allgemeine Beziehungen zwischen Kraft- und Momentensummen.

Haben wir eine Kraft, z. B. A in Fig. 94, und bilden von dieser die statischen Momente in bezug auf zwei im Abstande Δx liegende Punkte m und u, so erhalten wir nach Fig. 94 die Werte:

$$M_u = A \cdot (x + \Delta x)\,,$$
$$M_m = A \cdot x\,.$$

Hieraus ergibt sich der Unterschied

$$\begin{aligned} M_u - M_m &= A(x + \Delta x) - A \cdot x \\ &= A \cdot x + A \cdot \Delta x - A \cdot x\,, \\ M_u - M_m &= A \cdot \Delta x\,. \end{aligned}$$

In Worten: *Der Unterschied zwischen den statischen Momenten einer Kraft in bezug auf zwei aufeinanderfolgende Punkte ist gleich dem Produkte aus dieser Kraft mal der Entfernung der beiden Punkte.*

Nun ist aber die „Kraftsumme Q" eines Querschnittes nichts anderes als die Summe aller Kräfte, die an einem der beiden Balkenteile wirken; und die „Momentensumme M" ist die Summe der statischen Momente dieser Kräfte in bezug auf den Querschnitt. Es wird also wohl auch zwischen Q und M eine ähnliche Beziehung bestehen, wie wir sie soeben für statisches Moment und Einzelkraft gefunden haben.

Um dieses genauer zu untersuchen, wollen wir für die beiden in der Entfernung Δx liegenden Punkte m und u die Biegungsmomente aufstellen:

$$\begin{aligned} M_u &= +A(x + \Delta x) - P_1(p_1 + \Delta x) - P_2(p_2 + \Delta x)\,, \\ M_m &= +A \cdot x \qquad\quad - P_1 \cdot p_1 \qquad\quad - P_2 \cdot p_2 \end{aligned}$$

Digitized by Google

und finden die Differenz zwischen den beiden Momenten:

$$M_u - M_m = +A \cdot \Delta x - P_1 \cdot \Delta x - P_2 \cdot \Delta x$$
$$= (+A - P_1 - P_2) \cdot \Delta x \,.$$

Führen wir noch für die Summe $+A - P_1 - P_2$ unsere alte Bezeichnung Kraftsumme Q ein, so lautet die obige Gleichung:

$$\text{(I)} \qquad M_u - M_m = Q \cdot \Delta x \,.$$

In Worten: *Der Unterschied zwischen den Momentensummen zweier aufeinanderfolgenden Querschnitte ist gleich der Kraftsumme des Feldes, in dem diese beiden Querschnitte liegen, multipliziert mit dem Abstande der Querschnitte.*

Wir können sagen: „Kraftsumme des Feldes", da ja alle Querschnitte ein und desselben Feldes die gleiche Kraftsumme haben (§ 56). Liegen die beiden Querschnitte in verschiedenen „Feldern", so lassen sich ihre Momente allerdings nicht so einfach vergleichen. Man kann sich dann aber leicht durch einen kleinen Umweg helfen. So würde man beispielsweise für die Querschnitte w und u in Fig. 94 den Unterschied $M_w - M_u$ der Momente umformen in:

$$M_w - M_u = (M_w - M_v) + (M_v - M_u)$$

worin M_v das Moment an der Grenzstelle der beiden Felder ist, und hieraus jede der Differenzen $(M_w - M_v)$ und $(M_v - M_u)$ mittels der Kraftsumme des betreffenden Feldes berechnen.

II. Fortlaufende Entwicklung der Momentensummen.

Die obige Gleichung (I) können wir verwenden, um die Momente für eine Anzahl von aufeinanderfolgenden Querschnitten zu bestimmen. Ist z. B. M_m bekannt (wir haben es in § 56 zu 25 mt berechnet), so findet man das Moment an der Stelle u:

$$\text{(II)} \qquad M_u = M_m + Q \cdot \Delta x \,.$$

Die Kraftsumme für dieses Feld ist nach Fig. 94:

$$Q = +A - P_1 - P_2$$
$$= +9{,}0 - 4{,}0 - 2{,}0$$
$$= +3{,}0 \text{ t.}$$

Beträgt nun die Entfernung von m bis u z. B. 1,0 m, so haben wir

$$M_u = 25 + 3{,}0 \cdot 1{,}0 = 28 \text{ mt.}$$

Digitized by Google

Für den nächsten Querschnitt, v, der wieder um $\Delta x = 1{,}0$ m weiterliege, ist entsprechend:

$$M_v = M_u + Q \cdot \Delta x$$
$$= 28 + 3{,}0 \cdot 1{,}0 = 31 \text{ mt.}$$

Wollen wir weiter das Moment für den Querschnitt w bestimmen, so müssen wir beachten, daß nun die Kraftsumme eine

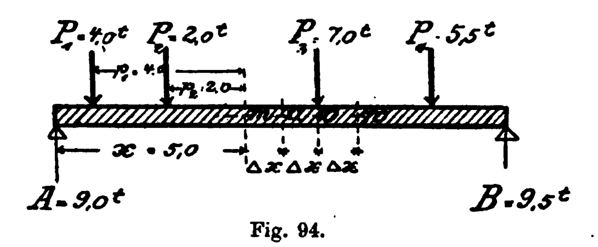


Fig. 94.

andere ist, da für dieses Feld die Kraft P_3 hinzukommt. Wir wollen diese Querkraft Q' nennen, so daß

$$Q' = +A - P_1 - P_2 - P_3$$
$$= Q - P_3 = -4{,}0 \text{ t}$$

ist. Dann finden wir

$$M_w = M_v + Q' \cdot \Delta x$$
$$= 31 + (-4{,}0 \cdot 1{,}0) = 27 \text{ mt.}$$

(Der Abstand zwischen w und v sei ebenfalls 1,0 m.)

Auf diese Weise kann man also aus der Momentensumme *eines* Querschnittes sämtliche anderen Momentensummen entwickeln. Augenscheinlich ist dieses eine viel bequemere Methode, als wenn man die Momente einzeln aufstellen wollte.

III. Das Maximalmoment M_{max}.

Aus dieser Methode, die Momentensummen mit Hilfe der Kraftsummen nacheinander abzuleiten, folgt ein sehr wichtiges Resultat: Wir wissen aus der Bestimmung der Kraftsummen — namentlich aus der graphischen Darstellung in Fig. 93c —, daß die Querkraft von A aus zunächst positiv ist und dann negativ wird. Nun haben wir vorhin gesehen, daß das Produkt

$$Q \cdot \Delta x$$

stets den Unterschied zwischen zwei aufeinanderfolgenden Momentensummen angibt. Daraus folgt: Ist an einer Stelle die Kraftsumme Q

Digitized by Google

positiv, so ist auch die Differenz $Q \cdot \Delta x$ zweier aufeinanderfolgenden Momentensummen positiv; d. h., dann ist das folgende Moment (von A aus gerechnet) größer als das vorhergehende (vgl. M_u und M_m, M_v und M_u). Ist aber an der betreffenden Stelle Q negativ, so ist der Unterschied der beiden Momente negativ; dann ist das folgende Moment kleiner als das vorhergehende (vgl. M_w und M_v). Solange also die Kraftsummen positiv sind, wachsen die Momente; von dem Punkte ab, da die Kraftsumme negativ wird, verringern sich die Momente. Der gesamte Verlauf der Momentensummen ist demnach folgender: Von dem Werte Null am Auflager A wachsen sie ständig bis zu der Stelle, wo die Kraftsumme aufhört, positiv zu sein. *An diesem Punkte hat die Momentensumme ihren größten Wert erreicht.* Dann nehmen die Momente ab, bis sie am Auflager B wieder zu Null werden (vgl. auch Fig. 93 c u. d!). Diese größte Momentensumme nennen wir das „**Maximalmoment M_{max}**". Zur Bestimmung seiner Lage haben wir also die Bedingung:

Das Maximalmoment entsteht an der Stelle, wo die Kraftsumme ihr Vorzeichen wechselt.

Denjenigen Querschnitt, zu dem das Maximalmoment gehört, nennt man den „**gefährlichen Querschnitt**" des Balkens. Von allen Schnitten des Balkens hat der „gefährliche Querschnitt" die größten Normalspannungen σ, da diese (bei gleichen Widerstandsmomenten der Querschnitte) der Größe der Momentensumme proportional sind. Deshalb ist es bei einem Balken besonders wichtig, den gefährlichen Querschnitt aufzusuchen und in diesem die größten Normalspannungen σ zu bestimmen. Halten sich letztere innerhalb der zulässigen Grenze, so ist man sicher, daß die Normalspannungen der anderen Querschnitte *unter* der zulässigen Grenze sind.

Da ein Wechsel der Kraftsumme immer nur unter einer Last stattfindet (s. Fig. 93 c), kann auch das Maximalmoment stets nur in einem Querschnitte *unterhalb* einer *Kraft* (d. h. niemals *zwischen* zwei Kräften) auftreten. Diese Aussage hatten wir ja übrigens auch schon aus Fig. 93 d in § 56 gefolgert.

§ 58.

Beispiele für direkt wirkende Einzellasten.

Erste Aufgabe.

Bei dem in Fig. 95 a gezeichneten Balken sind die Momentensummen für die Stellen 1, 2, 3 und 4 (unter den Lasten) *zu entwickeln!*

Digitized by Google

Zunächst berechnen wir die Auflagerdrücke

$$A = (1100 \cdot 1{,}30 + 1500 \cdot 3{,}30 + 1800 \cdot 4{,}70 + 1400 \cdot 6{,}50) \frac{1}{7{,}00}$$
$$= 3420 \text{ kg},$$
$$B = (1100 + 1500 + 1800 + 1400) - A$$
$$= 5800 - 3420$$
$$= 2380 \text{ kg}.$$

Die Kraftsumme für das Feld zwischen der Kraft A und der Kraft P_1 werde mit Q_{0-1} bezeichnet, und zwar ist

$$Q_{0-1} = +A = +3420 \text{ kg}.$$

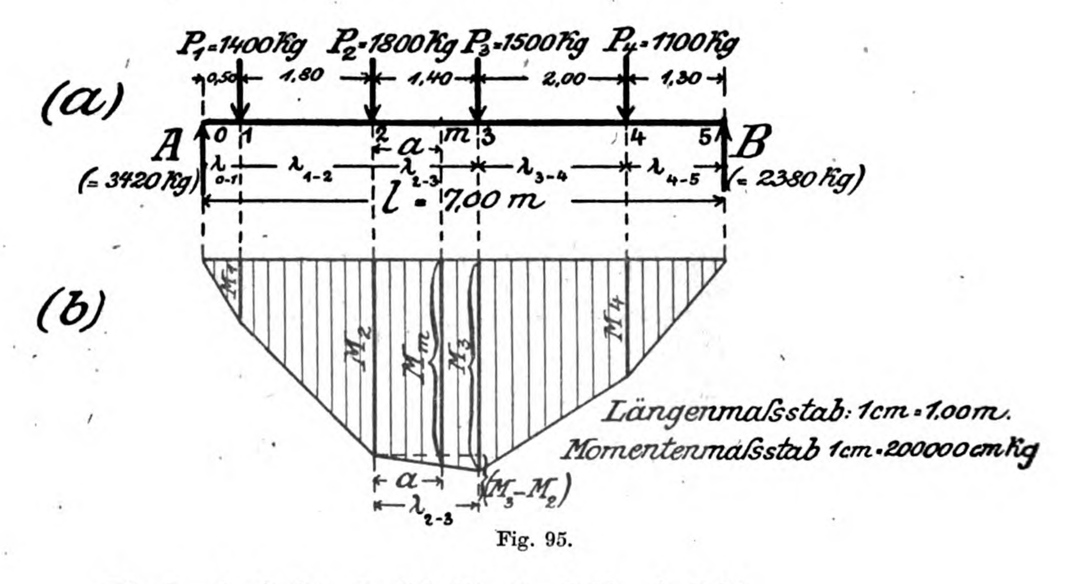


Fig. 95.

Die Querkraft für alle Schnitte des Feldes *1—2* ist:

$$Q_{1-2} = +A - P_1 = Q_{0-1} - P_1 = +2020 \text{ kg}.$$

Für das Feld *2—3* ist die Kraftsumme:

$$Q_{2-3} = +A - P_1 - P_2 = Q_{1-2} - P_2 = +220 \text{ kg}; \quad \text{usw.}$$

Auf diese Weise sind in der folgenden Tabelle für alle Felder die Kraftsummen durch fortlaufende Subtraktion ermittelt. Für das letzte Feld muß dann

$$Q = -B$$

herauskommen.

Nun gehen wir zu den Momenten. Das erste Moment, am Punkte 0, ist bereits bekannt. Es ist nämlich gleich Null. Hieraus finden wir nun das Moment des Querschnittes *1* mittels der Gleichung

$$M_1 - M_0 = Q_{0-1} \cdot \lambda_{0-1}.$$

Digitized by Google

(Q_{0-1} = Kraftsumme des die Schnitte *0* und *1* enthaltenden Feldes *0—1*; λ_{0-1} ist die — früher mit Δx bezeichnete — Entfernung der beiden Schnitte.) Aus ihr ergibt sich

$$M_1 = M_0 + Q_{0-1} \cdot \lambda_{0-1}$$
$$= 0 + 3420 \cdot 50 = 0 + 171000 = 171000 \text{ cmkg.}$$

Entsprechend ergibt sich aus

$$M_2 - M_1 = Q_{1-2} \cdot \lambda_{1-2}$$

das Moment

$$M_2 = M_1 + Q_{1-2} \cdot \lambda_{1-2}$$
$$= 171000 + 2020 \cdot 180 = 171000 + 363600 = 534600 \text{ cmkg.}$$

In derselben Weise:

$$M_3 = M_2 + Q_{2-3} \cdot \lambda_{2-3}$$
$$= 534600 + 220 \cdot 140 = 534600 + 30800 = 565400 \text{ cmkg; usw.}$$

In dieser Weise sind in der folgenden Tabelle die Momente entwickelt. Von $M_0 = 0$ ist angefangen und jedesmal das Produkt: „Kraftsumme $Q \times$ Feldweite λ“ zu dem vorhergehenden Moment zugezählt. Von der Stelle ab, da die Kraftsumme Q negativ ist, ist natürlich auch das Produkt $Q \cdot \lambda$ negativ. Dann haben die Momente ihren Größtwert überschritten. Für das letzte Moment muß sich

$$M_5 = 0$$

ergeben. Hierdurch hat man eine vorzügliche Kontrolle für die Richtigkeit der ganzen Rechnung.

Querkraft Q (kg)	Feldweite λ (cm)	Moment M (cmkg)
		$M_0 =$ 0
$+A = Q_{0-1} = +3420$	50	(+171000)
(−1400)		$M_1 = +171000$
$Q_{1-2} = +2020$	180	(+363000)
(−1800)		$M_2 = +534600$
$Q_{2-3} = +220$	140	(+ 30800)
(−1500)		$M_3 = +565400$
$Q_{3-4} = -1280$	200	(−256000)
(−1100)		$M_4 = +309400$
$-B = Q_{4-5} = -2380$	130	(−309400)
		$M_5 =$ 0

Digitized by Google

Die hiermit gefundenen Momente sind in Fig. 95b unter den betreffenden Querschnitten als Strecken dargestellt. Will man die Momente für sämtliche Querschnitte haben, so hat man nur noch die Endpunkte dieser Strecken durch gerade Linien zu verbinden. Denn die Momentenfläche des ganzen Balkens ist, wie aus ihrer Darstellung in Fig. 93d folgte, ein Vieleck, dessen Ecken unter den Lasten liegen. Sobald dann die Momentenfläche (Fig. 95b) gezeichnet ist, findet man also das Moment für einen Querschnitt m, der an irgendeiner Stelle innerhalb eines Feldes liegt, durch Abmessen der betreffenden Ordinate M_m. Einfacher ist es jedoch, das Moment an der Stelle m rechnerisch zu bestimmen, und zwar indem wir es aus einem benachbarten Moment (M_2 oder M_3) entwickeln. Hierfür haben wir die Gleichung:

$$M_m - M_2 = Q_{2-3} \cdot a\,,$$

$$\text{(I)} \qquad M_m = M_2 + Q_{2-3} \cdot a\,.$$

Ist in der obigen Gleichung die Kraftsumme Q_{2-3} des Feldes nicht bekannt, so bestimmen wir sie zunächst aus der Gleichung

$$M_3 - M_2 = Q_{3-2} \cdot \lambda_{3-2}\,;$$

hieraus

$$Q_{3-2} = \frac{M_3 - M_2}{\lambda_{3-2}}\,.$$

Diesen Wert in den Ausdruck für M_m eingesetzt, ergibt den Wert

$$\text{(II)} \qquad M_m = M_2 + \frac{(M_3 - M_2)\,a}{\lambda_{3-2}}\,,$$

der sich übrigens aus Fig. 95b auch direkt ablesen läßt. Somit können wir nach Berechnung der Momente an den Lastangriffspunkten auch für die dazwischenliegenden Querschnitte die Momentensummen schnell ermitteln.

Zweite Aufgabe.

Bei dem in Fig. 92a gezeichneten Balken sind die Momente für die Lastangriffspunkte zu ermitteln!

Die Berechnung führe man in Form einer Tabelle selber durch! Da die Belastungen in Tonnen und die Abstände in Metern gegeben sind, wird es sich empfehlen, die Momentensummen in Metertonnen auszudrücken.

Dritte Aufgabe.

Für den in Fig. 95 gezeichneten Balken ist das Maximalmoment zu bestimmen!

Digitized by Google

Vor allen Dingen kommt es darauf an, die Stelle aufzusuchen, an der das größte Moment auftritt. Zur Bestimmung dieses „gefährlichen Querschnittes“ dient die Bedingung: *Das Maximalmoment tritt an der Stelle auf, an der die Kraftsumme ihr Vorzeichen wechselt.* In Fig. 95a ist dieses die Stelle *3*. Denn links vom Querschnitt *3* ist die Kraftsumme

$$Q_{2-3} = +A - (P_1 + P_2)$$
$$= +3420 - (1400 + 1800) = +220 \text{ kg},$$

und rechts von der Stelle *3* ist die Kraftsumme

$$Q_{3-4} = +A - (P_1 + P_2 + P_3)$$
$$= +3420 - (1400 + 1800 + 1500) = -1280 \text{ kg}.$$

An der Stelle *3* findet also ein Vorzeichenwechsel der Querkraft statt. Allgemein sieht man folgendes: *Der Vorzeichenwechsel der Kraftsumme findet an der Stelle statt, für die zum erstenmal die Summe der nach unten zeigenden Kräfte* $(P_1 + P_2 + \ldots)$ *größer wird als die nach oben zeigende Kraft A*.

Jetzt, da wir den gefährlichen Querschnitt gefunden haben, berechnen wir das Maximalmoment in der gewohnten Weise. Es ist

$$M_3 = M_{\max} = +3420 \cdot 370 - 1400 \cdot 320 - 1800 \cdot 140$$
$$= +565\,400 \text{ cmkg}.$$

Der Vergleich mit der in der ersten Aufgabe aufgestellten Tabelle zeigt, daß M_3 tatsächlich das größte von allen Momenten ist.

§ 58a.

Zusammenfassung zum I. Belastungsfall.

I. Querkräfte. Grundprinzip: $Q = +A - P_1 - P_2 \ldots (= -B + P_n + P_{n-1} \ldots)$. Praktische Methoden: Rechnerisch direkt nach dieser Grundformel; zeichnerisch mittels Seilpolygon (Fig. 93c). Die rechnerische Bestimmung auf jeden Fall vorzuziehen.

Regeln zur Bestimmung von Q für alle Querschnitte eines Balkens:

1. Innerhalb eines Feldes (d. h. von Last zu Last) ist die Querkraft konstant.
2. Die Querkräfte zweier aufeinanderfolgenden Felder unterscheiden sich um die dazwischen befindliche Last. Hiernach die Querkräfte auseinander entwickeln:

$$Q_{0-1} = \ldots; \quad Q_{1-2} = Q_{0-1} - P_1; \quad Q_{2-3} = Q_{1-2} - P_2; \quad \text{usw.}$$

Verlauf der Querkräfte beim einfachen Balken (ohne überkragende Enden): Bei A die größte positive Querkraft, dann nimmt Q ab, wechselt das Vorzeichen und erreicht bei B den größten negativen Wert.

II. Momente. Grundprinzip: $M = +A \cdot a - P_1 \cdot p_1 - P_2 \cdot p_2 \ldots (= +B \cdot b - P_n \cdot p_n - P_{n-1} \cdot p_{n-1} \ldots)$. Praktische Methoden: Rechnerisch direkt nach dieser Grundformel; zeichnerisch mittels Seilpolygon (Fig. 93d). Die rechnerische Bestimmung auf jeden Fall vorzuziehen.

Digitized by Google

Regeln zur Bestimmung von M für alle Querschnitte eines Balkens:

1. Der Wert M ändert sich von Punkt zu Punkt (auch innerhalb eines Feldes).
2. Die Momente zweier Querschnitte, zwischen denen die Querkraft Q konstant ist, unterscheiden sich um das Produkt aus $Q \times$ Abstand der beiden Querschnitte. Hiernach die Momente auseinander entwickeln, und zwar greift man zweckmäßig die Momente unter den Lastangriffspunkten heraus:

$$M_0 = 0; \quad M_1 = M_0 + Q_{0-1} \cdot \lambda_{0-1}; \quad M_2 = M_1 + Q_{1-2} \cdot \lambda_{1-2}; \quad \text{usw.}$$

Verlauf der Momente beim einfachen Balken: Bei A ist $M = 0$. Dann wächst M, und zwar so lange, wie Q positiv ist. M erreicht seinen Größtwert, wo **die Querkraft ihr Vorzeichen wechselt** (also stets unter einem Lastangriffspunkt). Hierauf nimmt M ab bis auf Null. Beim einfachen Balken also **überall positive** Momente.

§ 59.

II. Belastungsfall: Direkt wirkende gleichmäßig verteilte Belastung.

I. Analytische Bestimmung von Q und M.

Eine verteilte Belastung (Eigengewicht, Mauerlast, Menschengedränge usw.) können wir uns bestehend denken aus einer Anzahl von aufeinanderfolgenden Einzellasten. In dieser Weise ist auch die verteilte Belastung in Fig. 96a dargestellt. Hier ist außerdem angenommen, daß sich die Belastung *gleichmäßig* über die Balkenlänge verteilt. Der andere Fall, daß es sich um eine *ungleichmäßig* verteilte Belastung handelt, wird später behandelt.

A. **Die Kraftsummen Q.** Um nun die Kraftsummen für den beliebigen Schnitt m zu bilden, betrachte ich einen der beiden Teile, in die der Balken durch den Schnitt zerlegt ist. Nehmen wir z. B. den linken Teil, so haben wir als äußere Kräfte a) den Auflagerdruck A, b) die verteilte Kraft auf der Strecke A bis m. Die *Belastung pro Längeneinheit* sei q. Dann entfällt auf die Länge x_m eine Last im Betrage von $q \cdot x_m$. Die Summe aller Kräfte, die auf der Strecke $\overline{Am}$ an dem Balken angreifen, ist also

$$Q_m = +A - q \cdot x_m .$$

Nun ist

$$A = B = \frac{q\,l}{2} .$$

(Jeder Auflagerdruck ist gleich der Hälfte der gesamten Belastung des Trägers.) Hiermit erhalten wir

$$Q_m = q \cdot \frac{l}{2} - q \cdot x_m = q \cdot \left(\frac{l}{2} - x_m\right),$$

$$\text{(I)} \qquad Q_m = q \cdot x_m'' ,$$

Digitized by Google

worin die Entfernung $\frac{l}{2} - x_m$ (vom Schnitt m bis Trägermitte) mit x''_m bezeichnet ist. Wir haben also den Satz:

Bei gleichmäßig verteilter Belastung ist die Summe aller am Teile links (rechts) wirkenden äußeren Kräfte gleich dem Produkt: Belastung pro Längeneinheit mal Entfernung des Querschnittes von Trägermitte.

Für einen Querschnitt direkt am Auflager A ist $x'' = \frac{l}{2}$ also die Kraftsumme $Q = q \cdot \frac{l}{2}$. In der Tat ist für einen Querschnitt

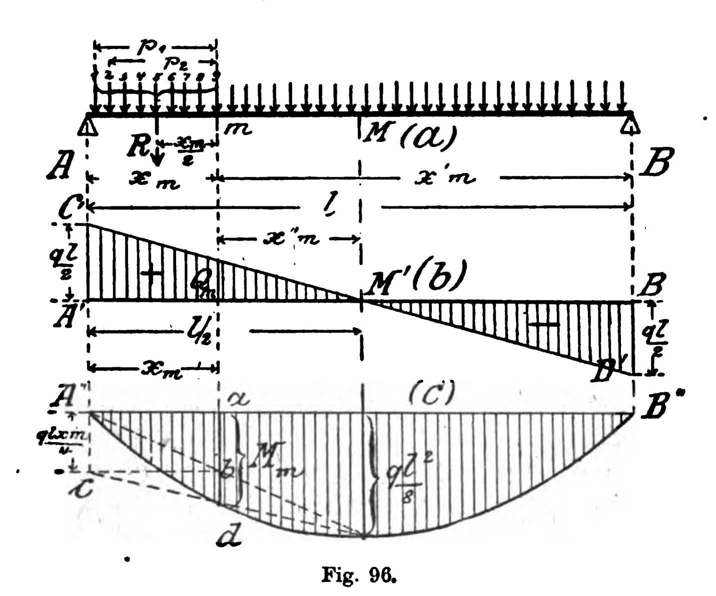


Fig. 96.

in unmittelbarer Nähe von A der Auflagerdruck $A = q\frac{l}{2}$ die einzige äußere Kraft. Für einen Schnitt durch Trägermitte ist $x'' = 0$, also $Q = q \cdot 0 = 0$, wie man sich auch durch direkte Berechnung der Querkraft überzeugen kann, und für einen Querschnitt direkt bei B ist $x'' = -\frac{l}{2}$ (denn für diesen Schnitt ist $x'' = \frac{l}{2} - x = \frac{l}{2} - l = -\frac{l}{2}$), also $Q = -q \cdot \frac{l}{2} = -B$.

B. Die Momentensummen M. Das Moment für den Schnitt m erhalten wir, indem wir von jeder Kraft am abgetrennten Teile das statische Moment in bezug auf den Schnitt bilden. Bezeichnen wir die kleinen Kräfte, aus denen sich die verteilte Belastung zusammensetzt, der Reihe nach mit 1, 2, 3, ..., so ist (Fig. 96a)

$$M_m = +A \cdot x_m - 1 \cdot p_1 - 2 \cdot p_2 - 3 \cdot p_3 - \ldots - 9 \cdot 0 .$$

Digitized by Google

Statt nun die statischen Momente $1 \cdot p_1$, $2 \cdot p_2$ usw. einzeln zu bilden und dann zu summieren, bestimmen wir von den Kräften *1 ... 9* die Ersatzkraft R und ersetzen dann die Summe aus den statischen Momenten der Einzelkräfte durch das statische Moment der Ersatzkraft (§ 9). R ist in diesem Falle sofort bestimmt: Die *Größe* ist gleich $1 + 2 + \ldots + 9 = q \cdot x_m$; die *Richtung* ist vertikal abwärts, und die *Lage* ist in der Mitte zwischen A und m. Durch die Einführung von R geht dann die obige Gleichung über in

$$M_m = +A \cdot x_m - R \cdot \frac{x_m}{2}$$

$$= +q\frac{l}{2} \cdot x_m - q\, x_m \cdot \frac{x_m}{2},$$

$$\text{(II)} \qquad \boxed{M_m = \frac{q}{2} x_m (l - x_m)}$$

$$\text{(IIa)} \qquad \boxed{= \frac{q}{2} x_m \cdot x_m'.}$$

(In Fig. 96a ist die Entfernung $l - x_m$ mit x_m' bezeichnet.)

Nach diesen Formeln kann man für jede Stelle des Balkens das infolge einer gleichmäßig verteilten Belastung q entstehende Moment berechnen.

Um nun den Querschnitt zu finden, wo das *größte* Moment auftritt, müssen wir die Stelle aufsuchen, an der die Querkraft aus dem Positiven in das Negative übergeht. Dieses ist in der Mitte der Fall. Für diesen Punkt ist $x_m = x_m' = \frac{l}{2}$. Mithin ist das Moment an dieser Stelle

$$M = q \frac{\frac{l}{2} \cdot \frac{l}{2}}{2},$$

$$\text{(III)} \qquad \boxed{M = q\frac{l^2}{8}.}$$

Häufig schreibt man diese Formel in etwas anderer Form. Es ist nämlich $q \cdot l$ die gesamte Belastung des Balkens. Sie werde mit Q bezeichnet (nicht zu verwechseln mit der Querkraft!). Dann ist das Moment in der Mitte

$$M = q\,l \cdot \frac{l}{8},$$

$$\text{(IIIa)} \qquad \boxed{M = Q \cdot \frac{l}{8}.}$$

Digitized by Google

Das größte Moment bei gleichmäßig verteilter Belastung ist gleich der Belastung des Balkens multipliziert mit $^1/_8$ der Spannweite.

Die Formeln (II), (IIa), (III) und (IIIa) muß man unbedingt auswendig wissen!

II. Graphische Darstellung von Q und M.

A. Die Kraftsummen Q. Um die Kraftsummen für die verschiedenen Schnitte des Balkens graphisch darzustellen, zeichnen wir (Fig. 96b) $A'C' = q\frac{l}{2}$ nach oben und $B'D' = q\frac{l}{2}$ nach unten und verbinden C' mit D'. Dann ergibt sich in der Mitte die Ordinate Null, und für einen beliebigen Schnitt m hat die darunterliegende Ordinate Q_m den Wert

$$Q_m = q\frac{l}{2} \cdot \frac{x''_m}{l/2} = q \cdot x''_m ;$$

d. h., sie stellt in dem betreffenden Maßstabe die zu Schnitt m gehörige Querkraft dar. Die in Fig. 96b schraffierte Fläche ist also die „Querkraftfläche“ für gleichmäßig verteilte Belastung. Auf der linken Hälfte ist sie positiv, auf der rechten negativ. Natürlich hätte man die Kraftsummenfläche auch entsprechend Fig. 93b finden können, indem man die verteilte Belastung in lauter kleine Einzellasten auflöste. Die obige direkte Darstellung ist aber einfacher.

B. Die Momentensummen M. Entsprechend Fig. 93d kann man die Momentenfläche für verteilte Belastung finden, indem man letztere in Einzellasten auflöst und zu diesen Einzellasten ein Seilpolygon zeichnet. Einfacher ist es jedoch, direkt von dem für das Moment aufgestellten analytischen Ausdrucke

$$M_m = \frac{q}{2} x_m (l - x_m)$$

auszugehen.

Vergleicht man nämlich dieses Moment M_m an irgendeiner Stelle m mit dem Moment $M_{\max}$ in der Mitte, so ergibt sich folgendes Verhältnis:

$$M_m : M_{\max} = \frac{q}{2} x_m (l - x_m) : \frac{q l^2}{8} .$$

Digitized by Google

Hieraus folgt

$$M_m = M_{\max} \cdot \frac{\frac{q}{2} x_m (l - x_m)}{\frac{q l^2}{8}}$$

$$= M_{\max} \cdot \frac{4 x_m (l - x_m)}{l^2}$$

$$\text{(IV)} \qquad = \frac{4 M_{\max}}{l^2} \cdot x_m (l - x_m).$$

Um nun hiernach den Wert M_m darzustellen, kann man folgendermaßen verfahren: Zunächst tragen wir in der Mitte die Ordinate

$$M_{\max} = \frac{q l^2}{8}$$

auf und verbinden deren Endpunkt mit A''. Dann verhält sich in Fig. 96c:

$$\overline{ab} : q \frac{l^2}{8} = x_m : \frac{l}{2}.$$

Also ist die Strecke $\overline{ab}$:

$$ab = q \frac{l^2}{8} \cdot \frac{x_m}{\frac{l}{2}} = q \frac{l x_m}{4}.$$

Nun ziehen wir durch b eine horizontale Linie, so daß die Strecke $A''c = \overline{ab}$ wird, verbinden c mit dem Endpunkt der mittleren Ordinate, $q \cdot \frac{l^2}{8}$, und erhalten aus der Ähnlichkeit der Dreiecke

$$\overline{bd} : q \frac{l x_m}{4} = \left(\frac{l}{2} - x_m\right) : \frac{l}{2},$$

$$\overline{bd} = q \frac{l x_m}{4} \cdot \frac{l/2 - x_m}{l/2} = q \frac{l x_m}{4} \frac{l/2}{l/2} - q \frac{l x_m}{4} \frac{x_m}{l/2},$$

$$= q \frac{l x_m}{4} - q \frac{x_m^2}{2}.$$

Die beiden Strecken $\overline{ab}$ und $\overline{bd}$ zusammen ergeben also

$$\overline{ab} + \overline{bd} = q \frac{l x_m}{4} + q \frac{l x_m}{4} - q \frac{x_m^2}{2}$$

$$= q \frac{l x_m}{2} - q \frac{x_m^2}{2}$$

$$= q \frac{x_m}{2} (l - x_m),$$

$$\overline{ad} = q \frac{x_m x_m'}{2}.$$

Digitized by Google

Das heißt: Die Strecke $\overline{ad}$ ist die zeichnerische Darstellung der Momentensumme M_m des Schnittes m. Auf diese Weise kann man also für jeden Schnitt das Moment durch eine Strecke darstellen und bekommt schließlich, wenn man genügend Punkte bestimmt hat, die gesamte Momentenfläche Fig. 96c.

Bemerkung: Die auf diese Weise gefundene Kurve ist eine **Parabel.** Denn bei einer Parabel besteht die Beziehung (§ 55, Fig. IX): Irgendeine Ordinate y ist gleich der mittleren Ordinate f, multipliziert mit dem Faktor $\frac{4}{l^2} x(l - x)$. Genau dieselbe Beziehung besteht aber nach Formel (IV) zwischen irgendeinem Moment M_m und dem mittleren Moment M_{max}. Daraus folgt, daß die Endpunkte aller M_m eine Parabel bilden müssen. (In der Tat ist die Fig. 96c in mathematischer Hinsicht nichts anderes als eine bekannte Parabelkonstruktion.)

Außer Fig. 96c gibt es noch verschiedene andere Methoden, um zu einer Länge l und Pfeilhöhe f eine Parabel zu konstruieren. Alle diese Verfahren (die man in mathematischen Formelsammlungen zusammengestellt findet) liefern also gleichzeitig die Momentenfläche für gleichmäßig verteilte Belastung.

§ 60.

Beispiele für verteilte Belastung.

Erste Aufgabe.

Der in Fig. 98a gezeichnete Träger ist durch eine Mauer von 0,25 m Stärke und 3,00 m Höhe belastet. Die Momentensummen für die Stellen 1, 2, 3 und 4 sind zu berechnen!

Das spezifische Gewicht (d. h. das Gewicht von 1 cbm) Mauerwerk ist

$$s = 1600 \text{ kg/cbm}.$$

Somit ist die Belastung pro Längeneinheit

$$q = 1{,}00 \cdot 0{,}25 \cdot 3{,}00 \cdot 1600 = 1200 \text{ kg pro m}.$$

Wir wollen die Momente in cmkg ausrechnen. Dann müssen wir auch die Belastung in kg pro cm ausdrücken. Es ist also in die Rechnung einzuführen:

$$q = 12{,}00 \text{ kg pro cm}.$$

Nunmehr wird nach den Formeln (II):

$$M_1 = \frac{12{,}00}{2} \cdot 75 \cdot 525 = 236250 \text{ cmkg},$$

$$M_2 = \frac{12{,}00}{2} \cdot 150 \cdot 450 = 405000 \quad ,, \;,$$

$$M_3 = \frac{12{,}00}{2} \cdot 225 \cdot 375 = 506250 \quad ,, \;,$$

$$M_4 = \frac{12{,}00}{2} \cdot 300 \cdot 300 = 540000 \quad ,, \;.$$

Digitized by Google

Zweite Aufgabe.

Für den in der vorigen Aufgabe behandelten Balken sind das Maximalmoment und das erforderliche Widerstandsmoment zu bestimmen! (Zulässige Spannung $k = 1200$ kg/qcm.) Zunächst berechnen wir die Gesamtbelastung

$$Q = 6{,}00 \cdot 3{,}00 \cdot 0{,}25 \cdot 1600 = 7200 \text{ kg.}$$

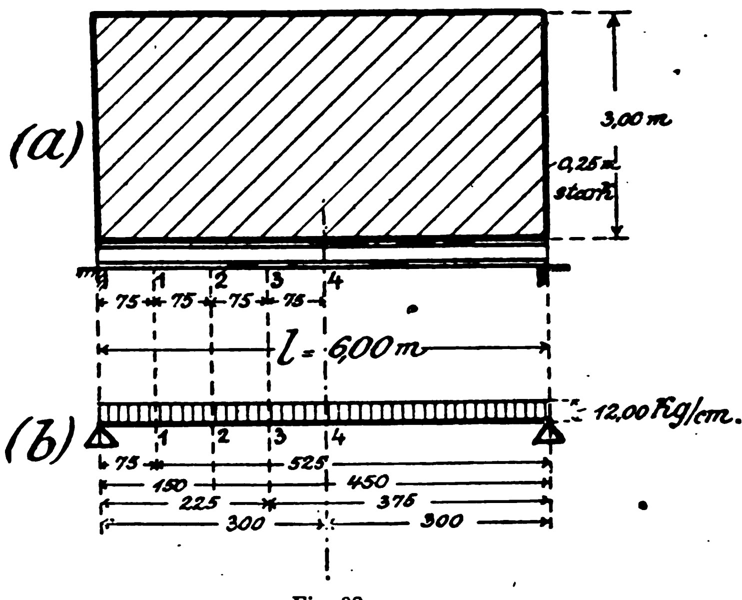


Fig. 98.

Dann ist [nach Formel (IIIa)]:

$$M_{\max} = \frac{7200 \cdot 600}{8} = 540000 \text{ cmkg.}$$

Aus $M_{\max}$ folgt das erforderliche Widerstandsmoment

$$W = \frac{540000}{1200} \frac{\text{cmkg}}{\text{kg/qcm}} = 450 \text{ cm}^3.$$

Wie die Profiltabellen zeigen, würde ein I N. P. 27 genügen, da dieses ein Widerstandsmoment von $W = 491$ cm³ hat. Praktischer sind aber 2 I N. P. 21 mit $W = 2 \cdot 244 = 488$ cm³, da diese eine bessere (breitere) Unterstützung der Mauer abgeben.

§ 61.

III. Belastungsfall: Belastung durch Kräftepaare.

Die in Fig. 99 dargestellte Belastungsart ist augenscheinlich bereits im I. Belastungsfall enthalten. Wegen seiner

Digitized by Google

Besonderheiten wollen wir aber diesen Spezialfall getrennt behandeln.

1. Die Auflagerdrücke A und B sind wegen der symmetrischen Belastung einander gleich, und zwar ist jeder derselben gleich einer Last P. Also

$$A = B = P.$$

2. Für die Kraftsummen Q ergeben sich folgende Werte: Zwischen A und der ersten (linken) Last P ist

$$Q = +A$$
$$= +P.$$

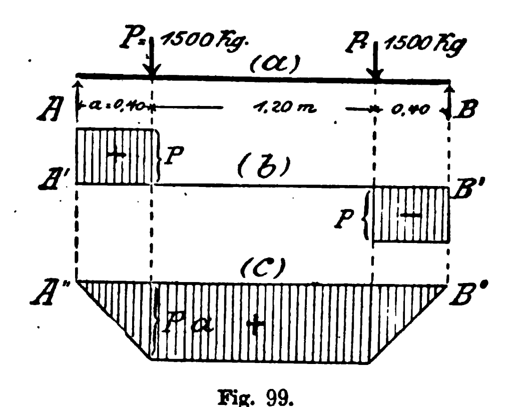


Fig. 99.

Für alle Querschnitte im mittleren Teile des Balkens ist

$$Q = +A - P$$
$$= +P - P$$
$$= 0,$$

und für alle Querschnitte zwischen der rechten Last P und dem Auflager B ist

$$Q = +A - P - P$$
$$= +P - 2P$$
$$= -P$$

(oder auch: $Q = -B = -P$). Trägt man diese Werte zeichnerisch auf, so ergibt sich die in Fig. 99b dargestellte Querkraftfläche. Aus ihr folgt, daß die Querschnitte der mittleren Strecke die Schubkraft T gleich Null haben. Für die seitlichen Teile ist die Schubkraft

$$T = \pm P.$$

Digitized by Google

3. Hinsichtlich der **Momentensummen** M ergeben sich aus der Querkraftfläche mehrere wichtige Folgerungen: Im linken Felde ist die Kraftsumme *positiv*. Daraus folgt nach § 57, III für die Momentensummen, daß innerhalb dieser Strecke die Momente *zunehmen*. Sie wachsen also von dem Werte Null, den sie am Auflager A haben, bis zu einem gewissen Werte unter der linken Last P an. Im mittleren Felde ist die Kraftsumme gleich Null (also weder positiv noch negativ). Daraus folgt für die Momente, daß diese innerhalb der mittleren Strecke weder zu- noch abnehmen. Das Moment behält also den Wert, den es unter der Last P hat, im ganzen mittleren Felde bei. Im rechten Felde ist die Querkraft *negativ*. Daraus folgt, daß in diesem Teile die Momente von links nach rechts *abnehmen*. Somit haben wir nur aus der Betrachtung der Querkräfte, ohne weitere Berechnung, ein vollständiges Bild über das Anwachsen und Abnehmen der Momente gewonnen. Trägt man letztere graphisch auf, so ergibt sich die in Fig. 99c dargestellte Momentenfläche.

Die Größe des Momentes für einen beliebigen Querschnitt des mittleren Feldes ergibt sich entweder durch gewöhnliche Ausrechnung nach § 56 (Belastung durch Einzellasten) oder — einfacher — durch folgende Überlegung: Seitlich vom Schnitte wirken zwei gleichgroße, parallele und entgegengesetzte Kräfte (A, P); also ein „*Kräftepaar*". Wie in § 11, II bewiesen wurde, ist in diesem Falle die Summe der statischen Momente der beiden Kräfte in bezug auf einen beliebigen Punkt gleich dem sogenannten „Moment des Kräftepaares", d. h. gleich dem Produkt aus einer der beiden Kräfte mal dem Abstande der beiden Kräfte voneinander. Folglich ist auch für jeden beliebigen Querschnitt im mittleren Felde des Balkens Fig. 99a die Momentensumme

$$M = +P \cdot a$$

(+, weil am linken Teile die Momentensumme rechtsherum zeigt). (Man leite dieses Resultat auch in der Weise ab, daß man die Abstände des untersuchten Querschnittes in die Figur einzeichnet und die Momentensumme durch Aufstellung der einzelnen statischen Momente bestimmt!) Hiermit ist M bestimmt.

Zusatz: Wir werden bei den folgenden Aufgaben noch häufig mit solchen Fällen zu tun haben, bei denen sich die seitlich von einem Querschnitte stehenden Kräfte auf ein Kräftepaar zurückführen lassen. Um dann die Momentensummen auf die bequemste Weise zu berechnen, können wir also immer von dem Satze Gebrauch machen:

Digitized by Google

Ergeben die seitlich von einem Querschnitte befindlichen Kräfte ein Kräftepaar, so ist die Momentensumme dieses Querschnittes gleich dem „Moment des Kräftepaares", d. h. gleich dem Produkt aus einer der beiden Kräfte des Kräftepaares mal dem Abstande der beiden Kräfte voneinander.

Beispiel.

Fig. 99a stelle eine Welle von kreisförmigem Querschnitte dar, die durch die beiden Kräfte $P = 1500$ kg belastet ist. Die zulässige Biegungsbeanspruchung sei $k = 750$ kg/qcm. Der erforderliche Durchmesser der Welle ist zu berechnen!

Lösung: Das Maximalmoment ist

$$M = 1500 \cdot 40$$
$$= 60000 \text{ cmkg.}$$

Also ist das erforderliche Widerstandsmoment

$$W_{\text{erf.}} = \frac{60000}{750}$$
$$= 80 \text{ cm}^3.$$

Bezeichnen wir den Durchmesser der Welle mit d, so muß also sein (s. Tabelle B in § 55)

$$\frac{1}{32} \pi d^3 = 80 \, .$$

Hieraus folgt

$$d = \sqrt[3]{\frac{80 \cdot 32}{\pi}} = 9{,}3 \text{ cm.}$$

Statt die Kubikwurzel auszurechnen, ist es meistens bequemer, zunächst einen Durchmesser d anzunehmen und dann nachzusehen, ob bei diesem Durchmesser die Welle das erforderliche Widerstandsmoment hat. Außerdem findet man in den meisten Tabellen zu den verschiedenen Durchmessern die Widerstandsmomente angegeben.

§ 62.

IV. Belastungsfall: Schichten(Strecken-)belastungen.

Unter dieser Bezeichnung wollen wir eine solche Belastungsart verstehen, bei der mehrere gleichmäßig verteilte Belastungen übereinander sind (z. B. Fig. 102). Es handelt sich also um eine Verallgemeinerung des II. Belastungsfalles.

Digitized by Google

Als Einleitung wollen wir eine vollständig *ungleichmäßig* verteilte Belastung betrachten. Fig. 100 ist eine solche Belastung, die zwar verteilt ist, aber — im Gegensatz zum II. Belastungsfall — an den einzelnen Balkenstellen verschieden hoch liegt. Es mögen aufgestellt werden: Querkraft an einer Stelle m, Moment an einer Stelle m und die Stelle, wo das größte Moment auftritt. Natürlich geschieht die ganze Untersuchung nach denselben Grundzügen wie bei den anderen Belastungsfällen.

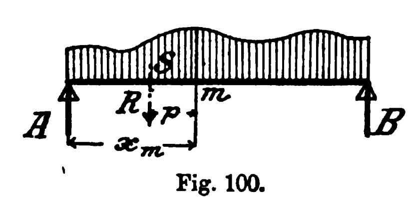


Fig. 100.

Die *Querkraft* für den Schnitt m ist (Fig. 100):

$$Q_m = A - R,$$

worin R die Belastung ist, die auf die Strecke $\overline{Am}$ entfällt. Das *Moment* finden wir:

$$M_m = +A \cdot x_m - R \cdot p.$$

Hierin ist p der Abstand der Resultierenden R bis zu dem Schnitte m. Ist der Schwerpunkt S der zwischen A und m liegenden Belastungsfläche bekannt, so kann man R sofort einzeichnen, da die Resultierende durch den Schwerpunkt geht. Ist aber der Schwerpunkt nicht oder nur schwer zu bestimmen, so ermittelt man direkt Größe und Lage von R mittels der in § 9 gezeigten Methoden. Die verteilte Belastung wird hierbei durch Einteilung in kleine Abschnitte in Einzellasten zerlegt.

Die Stelle des Maximalmomentes findet man aus der Bedingung, daß an diesem Punkte die Kraftsumme aus dem Positiven ins Negative übergeht. Da die Belastung verteilt ist, findet dieser Übergang nicht sprungweise (wie bei den Einzellasten Fig. 93c), sondern allmählich statt (Fig. 96b). An der Stelle des Maximalmomentes selbst ist wegen dieses allmählichen Überganges die Kraftsumme direkt gleich Null, wie auch Fig. 96b zeigt. Zur Bestimmung des Maximalmomentes dient also bei verteilter Belastung die Bedingung:

Fällt das Maximalmoment innerhalb einer verteilten Belastung, so ist seine Stelle dadurch gekennzeichnet, daß hier die Kraftsumme gleich Null ist.

Nach dieser Vorbereitung gehen wir zur eigentlichen „Schichtenbelastung“ über. Man kann letztere nach zwei Methoden behandeln.

1. Elementare Methode.

Diese werde an zwei Beispielen erläutert.

Digitized by Google

Erste Aufgabe.

Für den in Fig. 102 gezeichneten Balken mit zwei verschiedenen Belastungen ist das Maximalmoment zu bestimmen!

Die Belastungen pro Längeneinheit sind

$$q_1 = 250 \text{ kg/m} = 2{,}50 \text{ kg/cm},$$
$$q_2 = 400 \text{ kg/m} = 4{,}00 \text{ kg/cm}.$$

Also betragen die entsprechenden Gesamtbelastungen

$$Q_1 = 8{,}00 \cdot 250 = 2000 \text{ kg},$$
$$Q_2 = 5{,}20 \cdot 400 = 2080 \text{ kg}.$$

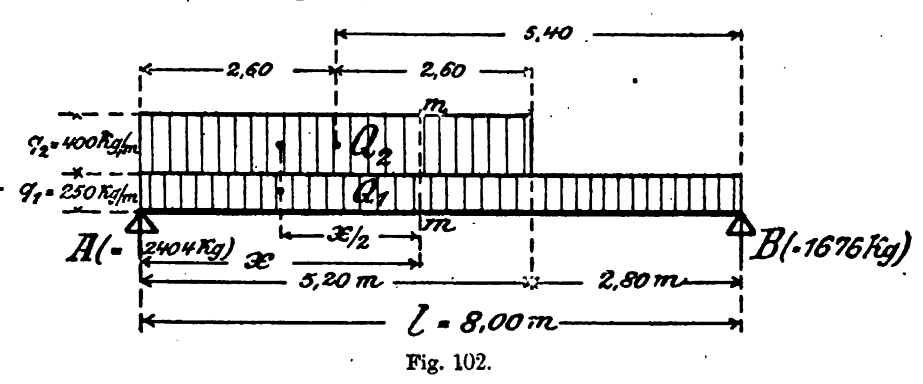


Fig. 102.

Bei Berechnung der Auflagerdrücke ersetzen wir die verteilte Belastung Q_2 durch ihre, im Schwerpunkte angreifende, Resultierende. Somit ergeben sich die Auflagerkräfte

$$A = \frac{1}{2} 2000 + \frac{2080 \cdot 5{,}40}{8{,}00}$$
$$= 2404 \text{ kg},$$
$$B = \frac{1}{2} 2000 + \frac{2080 \cdot 2{,}60}{8{,}00}$$
$$= 1676 \text{ kg}.$$

Das Maximalmoment finden wir aus der Bedingung, daß bei verteilter Belastung an dieser Stelle die Kraftsumme gleich Null ist. Bezeichnen wir den Abstand des „gefährlichen Querschnittes" m vom Auflager A mit x (in cm gemessen), so muß also für die Stelle des Maximalmomentes sein:

$$Q = +A - q_1 \cdot x - q_2 \cdot x = 0 .$$

Also

$$A - (q_1 + q_2)x = 0 ,$$
$$2404 - (2{,}50 + 4{,}00)x = 0 .$$

Digitized by Google

Hieraus ergibt sich

$$x = \frac{2404}{(2,50 + 4,00)}$$
$$= 369,9 \text{ cm.}$$

Somit ist die Stelle des Maximalmomentes gefunden. Zum Schlusse berechnen wir M_{max} selbst:

$$M_{max} = +A \cdot x - q_1 x \cdot \frac{x}{2} - q_2 x \cdot \frac{x}{2},$$

($q_1 x$ ist die untere verteilte Last zwischen A und m; $\frac{x}{2}$ also der Abstand ihrer Resultierenden vom Schnitte m. Entsprechend bei q_2)

$$M_{max} = +A \cdot x - (q_1 + q_2) \frac{x^2}{2}$$
$$= +2404 \cdot 369,9 - (2,50 + 4,00) \frac{369,9^2}{2}$$
$$= 444555 \text{ cmkg.}$$

Somit ist das größte Moment, das an dem Balken vorkommt, bestimmt.

Zweite Aufgabe.

Für den in Fig. 103a gezeichneten Balken ist das Maximalmoment zu bestimmen.

Die Belastungen pro laufenden Meter sind:

$$q_1 = 300 \text{ kg/m},$$
$$q_2 = q_3 = 500 \text{ kg/m}.$$

Hieraus ergeben sich die Gesamtbelastungen

$$Q_1 = 6,00 \cdot 300 = 1800 \text{ kg},$$
$$Q_2 = 2,00 \cdot 500 = 1000 \text{ kg},$$
$$Q_3 = 1,60 \cdot 500 = 800 \text{ kg}.$$

Die Strecken 1,20 m, 2,00 m, 0,90 m usw. in Fig. 103a nennen wir die „*Belastungsstrecken*“.

Um die Auflagerdrücke zu berechnen, ersetzen wir diese verteilten Belastungen durch ihre Resultierenden. Von der über die ganze Balkenlänge verteilten Belastung Q_1 erhält jedes Auflager die Hälfte. Also wird

$$A = \frac{1800}{2} + \frac{800 \cdot 1,10 + 1000 \cdot 3,80}{6,00}$$
$$= 900 + 780 = 1680 \text{ kg},$$

Digitized by Google

$$B = 900 + \frac{800 \cdot 4{,}90 + 1000 \cdot 2{,}20}{6{,}00}$$
$$= 900 + 1020$$
$$= 1920\,\text{kg}.$$

[Kontrolle: $A + B = 1800 + 1000 + 800$; also auch $B = (1800 + 1000 + 800) - A$.]

a) Aufsuchung des „gefährlichen Querschnittes“.

Um nun die Stelle des Maximalmomentes zu finden, haben wir wie vorhin die Bedingung: Liegt das Maximalmoment innerhalb einer verteilten Belastung, so ist seine Stelle dadurch gekennzeichnet, daß für sie die Kraftsumme den Wert Null hat. Da wir aber in Fig. 103a drei verschiedene verteilte Belastungen haben, muß erst entschieden werden, innerhalb welcher Belastungsstrecke das Maximalmoment auftritt. Hierzu dient folgende kleine Überschlagsrechnung:

Für die Stelle α ist die Kraftsumme

$$Q_\alpha = +1680 - 1{,}20 \cdot 300\,,$$

also *positiv*, wie man ohne weitere Ausrechnung erkennt. Daraus folgt, daß von dieser Stelle aus die Momente noch zunehmen; das Maximalmoment selber liegt also weiter nach rechts. Für die Stelle β dagegen ist die Kraftsumme

$$Q_\beta = +1680 - 3{,}20 \cdot 300 - 1000$$

($Q_2 = 1000$ kg), als *negativ*. Daraus folgt, daß das Maximalmoment bereits links von diesem Schnitte liegt. Zusammenfassend folgt daraus, daß das Maximalmoment zwischen α und β, also innerhalb der Belastungsstrecke q_2, liegen muß.

Nun nehmen wir *innerhalb dieser Belastungsstrecke* die Stelle des Maximalmomentes, d. h. den Abstand x, zunächst nach Gutdünken an, bilden für diese Stelle den Ausdruck für die Kraftsumme Q und setzen schließlich Q gleich Null. Hierdurch erhalten wir dann eine Gleichung zur Berechnung des Abstandes x. Die Kräfte links vom Schnitte sind: der Auflagerdruck A, die Belastung q_1 auf der Strecke x und die Belastung q_2 auf der Strecke $x - 1{,}20$. Die Kraftsumme für den Schnitt m ist also:

$$Q_m = +A - q_1 \cdot x - q_2(x - 1{,}20)\,.$$

Digitized by Google

Aus der Bedingung, daß diese Kraftsumme gleich Null sein muß,

$$Q_m = 0,$$

entsteht somit die Gleichung

$$\text{(I)} \qquad +A - q_1 \cdot x - q_2 (x - 1{,}20) = 0.$$

Trennen wir hierin die bekannten und die unbekannten Glieder, so ergibt sich

$$A + q_2 \,.\, 1{,}20 = (q_1 + q_2)\, x,$$

$$\text{(Ia)} \qquad x = \frac{A + q_2 \cdot 1{,}20}{q_1 + q_2}.$$

Jetzt die Zahlenwerte eingesetzt, wird

$$x = \frac{1680 + 500 \cdot 1{,}20}{300 + 500}$$

$$= \frac{2280}{800}$$

$$= 2{,}85 \text{ m}.$$

Hiermit ist die Lage des Maximalmomentes gefunden.

b) Berechnung des Maximalmomentes.

Die eigentliche Berechnung des Maximalmomentes geschieht nun in gewohnter Weise, indem wir jede Kraft seitlich vom Schnitte mit ihrem Abstande von m multiplizieren. Die verteilten Kräfte werden hierbei natürlich durch ihre Resultierenden ersetzt. [Die Resultierende der Kraft $q_1 x$ liegt in der Mitte der Länge x, und die Resultierende von $q_2 (x - 1{,}20)$ liegt in der Mitte der Strecke $x - 1{,}20$.] Somit ergibt sich

$$M_{\max} = +A \cdot x - q_1 x \cdot \frac{x}{2} - q_2 (x - 1{,}20) \frac{x - 1{,}20}{2}$$

$$= +1680 \cdot 2{,}85 - 300 \cdot \frac{2{,}85^2}{2} - 500 \frac{(2{,}85 - 1{,}20)^2}{2}$$

$$= 4788 - 1218 - 681$$

$$= 2889 \text{ mkg}.$$

(Die Abstände sind in „*Meter*" und die Lasten in „Kilogramm" gemessen; also erscheinen die Momente in Meter-Kilogramm.)

Wiederholung der 1. Methode.

In den vorhin behandelten Beispielen haben wir, um das Maximalmoment zu finden, folgenden Weg beschritten: Wir unter-

Digitized by Google

suchen zunächst überschläglich, innerhalb welcher Belastungsstrecke die Stelle des Maximalmoments sein wird (Stelle „m"). Dann bezeichnen wir den Abstand dieser Stelle mit x und stellen nun für diese Stelle die Querkraft Q_m auf. Diese Querkraft Q_m muß aber gleich Null sein; denn die Stelle des Maximalmomentes bei verteilter Belastung ist ja gerade dadurch gekennzeichnet, daß für diesen Punkt die Querkraft den besonderen Wert „Null" hat. Wir setzen also den vorhin für Q_m aufgestellten Ausdruck gleich Null und erhalten hierdurch eine mathematische Gleichung, aus der sich der Abstand x berechnen läßt. Hiermit ist x, d. h. die Stelle des Maximalmomentes, gefunden.

Die eigentliche Ausrechnung des Maximalmomentes erfolgt dann wie bei jedem anderen Moment.

Zusatz: Die soeben gezeigte Methode ist die elementarste, wie sie sich aus den bisherigen Untersuchungen eigentlich als selbsverständlich ergibt. Sie hat aber den Nachteil, daß man zunächst die Unbekannte x ausrechnen muß und dann erst zu dem eigentlich gesuchten Werte M_{max} gelangt. Hierdurch entsteht unerwünschte Rechenarbeit.

---

2. Methode: Durch Zurückführung auf Kräftepaare.

Eine bedeutende Ersparnis an Rechenarbeit bei der Ermittlung von M_{max} läßt sich jedoch auf folgende Weise erzielen. Aus der vorhin aufgestellten Gleichung (I) ergibt sich zunächst:

$$\text{(Ib)} \qquad A = q_1 x + q_2 (x - 1{,}20) .$$

D. h.: *Für die Stelle „m" ist der Auflagerdruck A (bzw. B) gleich der Summe aller seitlich von dieser Stelle befindlichen Lasten.* (Dieser Satz ist ja nichts anderes als die ursprüngliche Bedingung $Q_m = 0$ in anderer Form, nämlich links den Auflagerdruck und rechts die Lasten, geschrieben.) — Nach dieser Aussage können wir nun in Fig. 103a die Auflagerkraft A für die Berechnung so in zwei Teile A' und A'' spalten, daß

$$A' = q_1 \cdot x \quad \text{und} \quad A'' = q_2 (x - 1{,}20)$$

ist (Fig. 103b). Hierdurch wird an den Kräften nichts geändert, denn für den gefährlichen Querschnitt ist ja

$$A = A' + A'' = q_1 \cdot x + q_2 (x - 1{,}20) .$$

Digitized by Google

Der Vorteil dieser Zerlegung ist aber der, daß jetzt sämtliche Kräfte seitlich vom Schnitte m in zwei Kräftepaaren dargestellt sind. Denn die Auflagerkraft A' und die Kraft $q_1 x$ bilden ein Kräftepaar, und ebenso die Kraft A'' und die Last $q_2(x - 1,20)$. Die Momentensumme für den Schnitt m ergibt sich also gleich der Summe der Momente dieser beiden Kräftepaare (vgl. Schluß von § 61); d. h., es ist

$$M_{\max} = q_1 x \frac{x}{2} + q_2 (x - 1,20)\left(1,20 + \frac{x - 1,20}{2}\right).$$

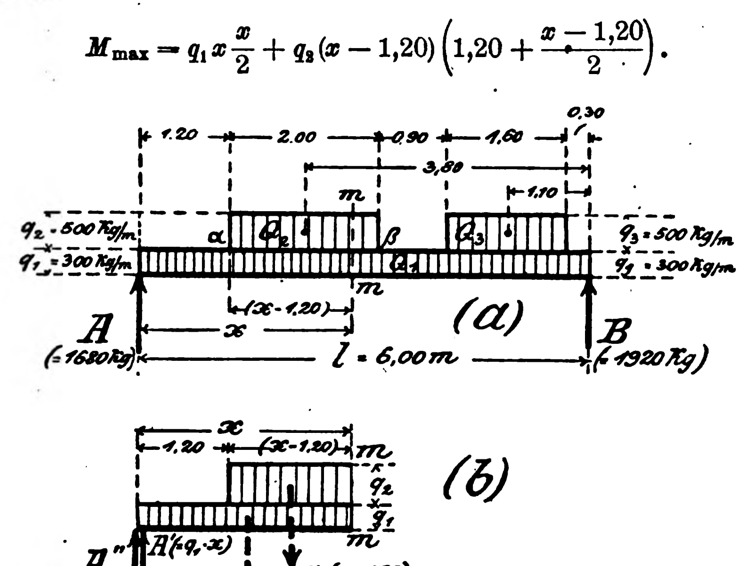


Fig. 103.

[Der Abstand zwischen den Kräften A' und $q_1 x$ ist $\frac{x}{2}$, und der Abstand zwischen A'' und $q_2(x - 1,20)$ ist $1,20 + \frac{x - 1,20}{2}$.] Um den obigen Ausdruck bequem auszurechnen, empfiehlt es sich, nicht sogleich die Zahlenwerte einzusetzen, sondern ihn noch etwas umzuformen:

$$\begin{aligned} M_{\max} &= q_1 x \cdot \frac{x}{2} + q_2 (x - 1,20) \cdot \frac{x + 1,20}{2} \\ &= q_1 \frac{x^2}{2} + q_2 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1,20^2}{2}\right) \\ &= (q_1 + q_2)\frac{x^2}{2} - q_2 \frac{1,20^2}{2}. \end{aligned}$$

Digitized by Google

Setzen wir nun den für den Abstand x gefundenen Wert ein [Gleichung (Ia)], so wird

$$\text{(II)} \qquad M_{max} = \frac{(A + q_2 \cdot 1{,}20)^2}{2\,(q_1 + q_2)} - q_2 \cdot 1{,}20 \cdot \frac{1{,}20}{2}\,.$$

Nach dieser Formel arbeitet es sich sehr bequem, da man, ohne erst den Abstand x ausrechnen zu müssen, sofort das Maximalmoment hinschreiben kann.

Erstes Beispiel.

Für Fig. 103 würde die Ausrechnung nach dieser Methode ergeben:

$$M_{max} = \frac{(1680 + 600)^2}{2 \cdot 800} - 600 \cdot \frac{1{,}20}{2}$$
$$= \frac{5198400}{1600} - 600 \cdot 0{,}60$$
$$= 3249 - 360 = 2889 \text{ mkg.}$$

Zweites Beispiel.

Der in Fig. 104 gezeichnete Balken trägt die drei aufeinanderliegenden verteilten Belastungen q_1, q_2 und q_3. Das Maximalmoment ist zu bestimmen!

Die Belastungen seien:

$$q_1 = 400 \text{ kg/m}; \quad Q_1 = 7{,}00 \cdot 400 = 2800 \text{ kg},$$
$$q_2 = 300 \text{ kg/m}; \quad Q_2 = 4{,}80 \cdot 300 = 1440 \text{ kg},$$
$$q_3 = 200 \text{ kg/m}; \quad Q_3 = 2{,}30 \cdot 200 = 460 \text{ kg}.$$

Hieraus ergeben sich die Auflagerdrücke

$$A = \frac{1}{2} 2800 + (1440 \cdot 3{,}70 + 460 \cdot 3{,}65)\,\frac{1}{7{,}00}$$
$$= 2401 \text{ kg},$$
$$B = (2800 + 1440 + 460) - 2401$$
$$= 2299 \text{ kg}.$$

Durch eine überschlägliche — im Kopfe ausgeführte — Berechnung erkennt man, daß die Kraftsumme für den Schnitt α positiv und für den Schnitt β negativ ist. Der gefährliche Querschnitt liegt also, wie auch aus der Figur zu erwarten ist, innerhalb der Belastung Q_3. Das Maximalmoment M_{max} bestimmen wir nun,

Digitized by Google

indem wir die vorhin aufgestellte Gleichung (II) sinngemäß auf Fig. 104 anwenden. Dann wird

$$M_{max} = \frac{(A + q_2 \cdot 0,90 + q_3 \cdot 2,20)^2}{2(q_1 + q_2 + q_3)} - q_2 \cdot 0,90 \cdot \frac{0,90}{2} - q_3 \cdot 2,20 \frac{2,20}{2}$$

$$= \frac{(2401 + 270 + 440)^2}{2 \cdot 900} - 270 \cdot 0,45 - 440 \cdot 1,10$$

$$= \frac{9678321}{1800} - 121,5 - 484,0$$

$$= 5376,8 - 605,5$$

$$= 4771,3 \text{ mkg}$$

$$= 477130 \text{ cmkg.}$$

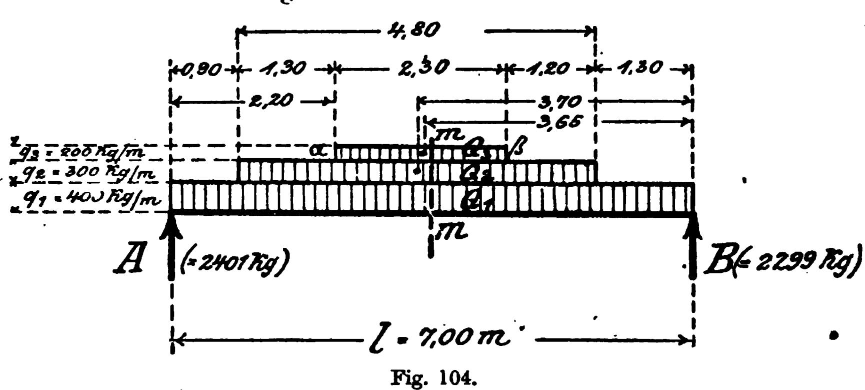


Fig. 104.

Wiederholung der 2. Methode.

Diese Methode zur Bestimmung des Maximalmomentes besteht darin, daß man die Belastung seitlich vom gefährlichen Querschnitt in lauter Kräftepaare auflöst. Der Abstand x des gefährlichen Querschnittes wird durch die Auflagerkraft und die Belastungen ausgedrückt. Hierdurch entstehen bequeme Formeln zur Berechnung von M_{max}.

Im folgenden Paragraphen ist noch ein weiteres Beispiel behandelt und auch die allgemeine Regel für den Aufbau der Formel von M_{max} gegeben (S. 322). Formeln für verschiedene Fälle s. § 64b.

§ 62a.

V. Belastungsfall: Kombinierte Schichten- und Einzellasten.

Eine Verallgemeinerung der soeben durchgenommenen Belastungsart bildet die folgende Aufgabe:

Digitized by Google

Für den in Fig. 105a gezeichneten allgemeinen Fall eines Balkens mit verteilter Belastung und Einzellasten ist das Maximalmoment zu bestimmen!

Dieser Fall möge als Beispiel dienen, wie man derartige Aufgaben mit zusammengesetzter Belastung zu untersuchen hat. Die Lasten seien $P_1 \ldots P_6$. Hiervon sind P_6, P_5, P_2 und P_1 verteilte Belastungen. Von letzteren beiden werden die auf die Längeneinheit entfallenden Beträge entsprechend p_2 und p_1 genannt. Die Durchrechnung gestaltet sich folgendermaßen:

I. Berechnung der Auflagerkräfte.

Es ist (Fig. 105a)

$$A = \frac{P_1}{2} + (P_2 \cdot e_2 + P_3 \cdot e_3 + P_4 \cdot e_4 + P_5 \cdot e_5 + P_6 \cdot e_6)\frac{1}{l},$$

$$B = (P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + P_6) - A.$$

Diese Auflagerkräfte werden zunächst berechnet und sind also für die folgende Untersuchung als bekannte Größen zu betrachten.

II. Die Lage des gefährlichen Querschnittes.

In Fig. 105a kann der gefährliche Querschnitt entweder unterhalb einer Einzellast oder innerhalb einer verteilten Belastung liegen. Beide Möglichkeiten müssen untersucht werden. Augenscheinlich kommt in Fig. 105a hauptsächlich der mittlere Balkenteil für das Maximalmoment in Frage. Wir beginnen also mit der Stelle α (unmittelbar *links* von der Einzellast P_4) und stellen hierfür die Kraftsumme auf:

$$\text{(I)} \qquad Q_\alpha = A - p_1 \cdot b - p_2 \cdot c - P_3.$$

Dieser Wert möge sich bei der Ausrechnung als positiv ergeben. Das bedeutet dann nach § 57, II, daß der gefährliche Querschnitt weiter nach rechts liegt.

Wir untersuchen deshalb die Stelle β (unmittelbar *rechts* von der Einzellast P_4) und erhalten hierfür die Kraftsumme

$$Q_\beta = Q_\alpha - P_4.$$

Ergibt sich dieser Wert bereits als negativ, so ist dadurch angezeigt, daß der gefährliche Querschnitt unter der Last P_4 liegt. Dann ist also die Stelle des Maximalmomentes gefunden. Ergibt sich aber für Q_β ein positiver Wert, so müssen wir noch weiter suchen. Wir fassen dann die Stelle γ ins Auge und finden:

$$Q_\gamma = Q_\beta - (p_1 + p_2) f.$$

Digitized by Google

Ist dieser Wert negativ, so liegt der gefährliche Querschnitt links von γ, also zwischen den Stellen β und γ. Ist aber Q_γ positiv, so liegt die Stelle des Maximalmomentes noch weiter nach rechts.

Auf diese Weise bestimmt man also die Stelle, wo das Maximalmoment liegen muß. Bei einer Einzellast muß man unmittelbar

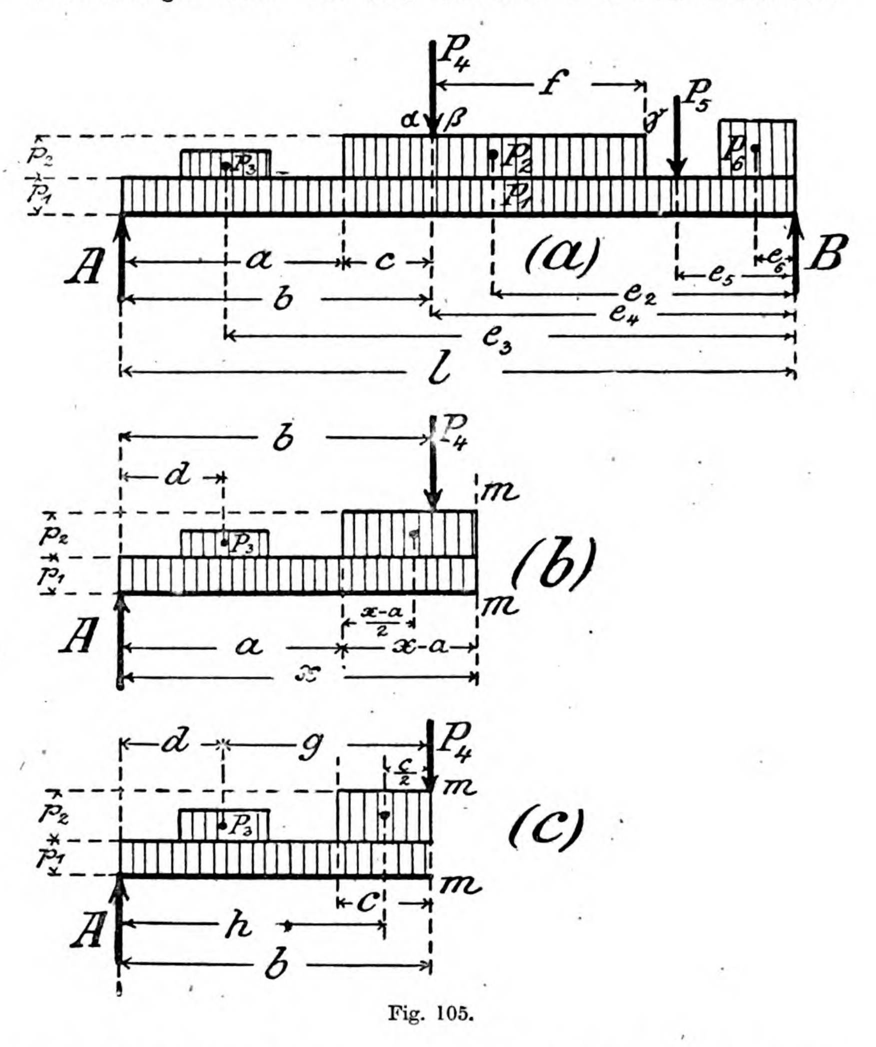


Fig. 105.

vor und nach der Last untersuchen, weil sich hier die Kraftsumme sprungweise ändert. Bei einer verteilten Belastung untersucht man nur die Stellen, wo eine Änderung in der Belastung (Aufhören der Belastung oder Hinzukommen einer neuen Belastung) stattfindet. **Der gefährliche Querschnitt ist stets der Punkt, an dem man, von**

Digitized by Google

links nach rechts gehend, zum erstenmal auf eine negative Kraftsumme stößt.

Zusatz: Die Ausdrücke für die Kraftsummen sind bereits so aufgestellt, daß man die Werte Q leicht auseinander folgern kann. Da es nur darauf ankommt, zu entscheiden, ob das betreffende Q noch positiv oder schon negativ ist, so braucht man die Ausrechnung natürlich nicht genau durchzuführen, sondern es genügt eine schnelle Überschlagsrechnung.

III. Berechnung des Maximalmomentes.

Bei der Berechnung des Maximalmomentes müssen nun die beiden Fälle auseinandergehalten werden:

1) Der gefährliche Querschnitt liegt innerhalb einer verteilten Belastung;

2) der gefährliche Querschnitt liegt unterhalb einer Einzellast.

---

1. Der gefährliche Querschnitt liegt in einer verteilten Belastung.

Der Rechnungsgang ist dann genau derselbe wie in § 62 (Schichtenbelastung): Zunächst wird die genaue Lage des gefährlichen Querschnittes bestimmt aus der Bedingung, daß für diese Stelle die Querkraft Q gleich Null ist; bzw., daß für diese Stelle die nach oben zeigende Kraft A gleich der Summe der nach unten zeigenden Lasten ist ($Q_m = 0$). Hierdurch ergibt sich eine Formel für den Abstand x. Dann wird die eigentliche Berechnung von $M_{\max}$ vorgenommen. Und zwar in elementarer Weise, oder — besser — durch Einteilung der Kräfte in lauter Kräftepaare.

Für Fig. 105b würde sich hiernach ergeben: Für die Stelle m ist

$$Q_m = 0,$$

d. h.

$$A = p_1 x + p_2(x - a) + P_3 + P_4.$$

Hieraus folgt zunächst für x der Ausdruck:

$$x = \frac{A + p_2 a - P_3 - P_4}{p_1 + p_2}.$$

Das Maximalmoment $M_{\max}$ ergibt sich nun am einfachsten, indem wir den Auflagerdruck A in die Teilkräfte $p_1 x$ usw. zerlegt denken und hierauf die Momente der so entstandenen Kräftepaare addieren. Dann wird (Fig. 105b)

$$\text{(III)} \quad M_{\max} = p_1 x \cdot \frac{x}{2} + p_2 (x - a)\left(a + \frac{x - a}{2}\right) + P_3 d + P_4 b.$$

Digitized by Google

$$M_{\max} = p_1 x \cdot \frac{x}{2} + p_2 (x - a)\left(\frac{x}{2} + \frac{a}{2}\right) + P_3 \cdot d + P_4 \cdot b$$

$$= p_1 x \cdot \frac{x}{2} + p_2 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{a^2}{2}\right) + P_3 \cdot d + P_4 \cdot b$$

$$= (p_1 + p_2)\frac{x^2}{2} - p_2 \frac{a^2}{2} + P_3 \cdot d + P_4 \cdot b .$$

Jetzt setzen wir den oben für x gefundenen Wert ein und erhalten

$$\text{(III a)} \quad M_{\max} = \frac{(A + p_2 a - P_3 - P_4)^2}{2(p_1 + p_2)} - p_2 a \cdot \frac{a}{2} + P_3 \cdot d + P_4 \cdot b .$$

Hiermit ist das Maximalmoment bestimmt. Der Ausdruck ist für das praktische Rechnen sehr bequem, weil man nur mit den gegebenen Abständen a, b, d zu arbeiten braucht.

Zusatz: Es wird dem Leser ein leichtes sein, die Formel für jede beliebige andere Belastung anzuwenden. Im Nenner des Bruches stehen stets die Belastungen pro Längeneinheit, durch die der Schnitt geht. Im Zähler steht zunächst der Auflagerdruck A. Hierzu werden — kurz ausgedrückt — addiert die Belastungen der Lücken und subtrahiert die bereits vor dem Schnitte aufhörenden Belastungen. Dann folgen die Momente der Lücken (mit negativen Vorzeichen) und die Momente der bereits vor dem Schnitte beendeten Lasten.

Dieses ist also die allgemeine Regel, nach der man bei Schichtenbelastungen das Maximalmoment direkt hinschreiben kann.

---

2. Der gefährliche Querschnitt liegt unterhalb einer Einzellast.

Dann ist die Ermittlung des Maximalmomentes insofern einfacher, als der Abstand des gefährlichen Querschnittes nicht erst berechnet zu werden braucht. Man kann somit $M_{\max}$ direkt nach der ursprünglichen Formel hinschreiben (Fig. 105c):

$$\text{(IV)} \qquad M_{\max} = A \cdot b - p_1 b \frac{b}{2} - p_2 c \frac{c}{2} - P_3 \cdot g .$$

Besser ist es jedoch, auch hier das Moment $M_{\max}$ durch die Momente von Kräftepaaren darzustellen. Allerdings ist jetzt der Auflagerdruck A nicht gleich der Summe sämtlicher Lasten seitlich vom Schnitte (denn die Kraftsumme für den Schnitt m in Fig. 105c ist ja nicht gleich Null), sondern der Auflagerdruck überwiegt die nach unten zeigenden Kräfte um den Betrag

$$Q = A - (p_1 b + p_2 c + P_3) .$$

Digitized by Google

Diesen in A enthaltenen Mehrbetrag müssen wir also bei der Berechnung der Momentensumme besonders nehmen. Insgesamt ergibt sich demnach

$$\text{(IVa)} \quad M_{\max} = (A - p_1 b - p_2 c - P_3)\, b + p_1 b \frac{b}{2} + p_2 c \cdot h + P_3 \cdot d\,.$$

Der in der runden Klammer stehende Ausdruck ist bereits bekannt, da er nichts anderes als die Kraftsumme Q_α ist, und diese schon bei der Aufsuchung des gefährlichen Querschnittes gebraucht wurde. Somit läßt sich das Maximalmoment immer sehr schnell nach der obigen Formel ausrechnen.

Zusatz: **Die zuletzt entwickelte Methode kann man übrigens auch für jede andere Stelle des Balkens benutzen, um die zugehörige Momentensumme zu berechnen: Von dem Auflagerdruck A (bzw. B) teilt man zunächst die Kraftsumme Q des betreffenden Schnittes ab und multipliziert sie mit dem Abstande des Schnittes vom Auflager. Die übrigen Kräfte lassen sich dann zu Kräftepaaren zusammenfassen. Deren Momente, zusammen mit dem Moment der Kraftsumme Q, ergeben die gesuchte Momentensumme des betreffenden Querschnittes. Ist die Kraftsumme des betreffenden Schnittes gleich Null (Fig. 105b), so kommt man auf diese Weise natürlich zu den früheren Formeln (III) bzw. (IIIa). Ist sie negativ, so erhält das statische Moment von Q das negative Vorzeichen.**

§ 63.

VI. und VII. Belastungsfall: Dreiecks- und Trapezlast. Die sog. Belastungshöhe.

I. Dreieckslast.

Der in Fig. 106 gezeichnete Balken ist durch eine dreieckförmig verteilte Last P belastet. Das Maximalmoment ist zu bestimmen!

Die Resultierende dieser dreieckförmig verteilten Belastung greift im Schwerpunkte der Dreieckfläche, also in der Entfernung $\frac{1}{3} l$ vom Punkte B, an. Somit werden die Auflagerdrücke

$$A = \frac{P \cdot \frac{1}{3} l}{l} = \frac{1}{3} P\,; \quad B = \frac{2}{3} P\,.$$

Der Abstand des gefährlichen Querschnittes vom Auflager A wird wieder mit x bezeichnet. Zu seiner Bestimmung dient die Gleichung

$$A = P'\,,$$

worin P' die links vom gefährlichen Querschnitte befindliche Last bedeutet. Um aber in diese Gleichung den gesuchten Abstand x hineinzubringen, müssen wir noch P' durch x und den gegebenen Wert P ausdrücken. Dieses geschieht nach dem geometrischen

Digitized by Google

Satze, daß die Inhalte ähnlicher Dreiecke sich verhalten wie die Quadrate entsprechender Seiten. Hieraus ergibt sich nämlich

$$P' : P = x^2 : l^2 ,$$

$$P' = P \frac{x^2}{l^2} .$$

Hiermit geht die obige Gleichung über in:

$$A = P \frac{x^2}{l^2} ,$$

$$\tfrac{1}{3} P = P \frac{x^2}{l^2} ,$$

$$\tfrac{1}{3} = \frac{x^2}{l^2} ,$$

$$x^2 = \frac{l^2}{3} ,$$

$$x = \frac{l}{\sqrt{3}} = \frac{l}{1{,}732} = 0{,}577\, l .$$

Durch diesen Ausdruck ist die Lage des gefährlichen Querschnittes bestimmt. Man erkennt, daß er innerhalb der Spannweite stets

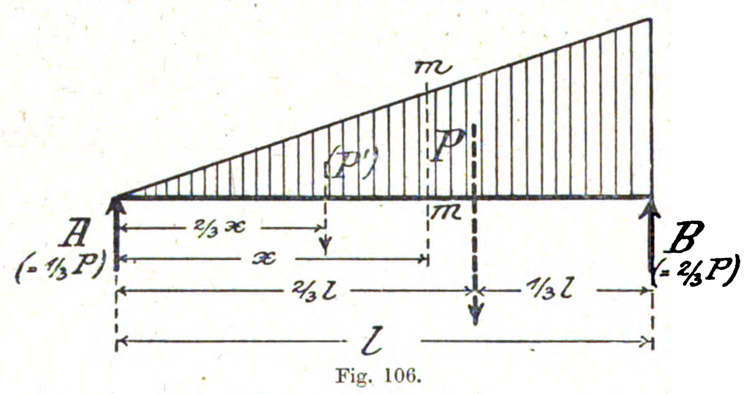


Fig. 106.

eine bestimmte, von der Größe der Last P unabhängige Stelle einnimmt (ähnlich wie bei gleichmäßig verteilter Belastung).

Seitlich vom gefährlichen Querschnitte haben wir nun ein Kräftepaar, bestehend aus den beiden Kräften A und P'. Der Abstand zwischen diesen ist $\frac{2}{3}\,x$. Somit wird das Maximalmoment

$$M_{\max} = A \cdot \frac{2}{3} x$$

$$= \frac{1}{3} P \cdot \frac{2}{3} 0{,}577\, l ,$$

$$M_{\max} = 0{,}128\, P\, l .$$

Digitized by Google

Zusatz: Bei dreieckförmiger Belastung liegt der gefährliche Querschnitt nicht etwa unter dem Schwerpunkte der Belastung — wie oft fälschlich angenommen wird —, sondern ziemlich nahe der Mitte des Balkens. Die dreieckförmig verteilte Belastung verhält sich in dieser Hinsicht also ähnlich wie die gleichmäßig verteilte Belastung. Auch die Maximalmomente dieser beiden Belastungsarten sind sehr wenig voneinander verschieden. Wir haben nämlich

für gleichförmig verteilte Last: $M_{max} = \frac{1}{8} P l = 0{,}125\, P l$,
„ dreieckförmig „ „ : $M_{max} = 0{,}128\, P l$.

Aus diesem Grunde rechnet man in der Praxis häufig das Maximalmoment auch für dreieckförmige Belastung einfach so, als ob die Belastung gleichförmig verteilt wäre, also nach der Formel $M_{max} = \frac{1}{8} P l$. Man beachte aber, daß diese Ähnlichkeit mit der gleichmäßig verteilten Belastung nur für das Maximalmoment, aber nicht für die Auflagerdrücke gilt!

Beispiel.

Auf dem Balken Fig. 106 ruht eine dreieckförmige Mauer auf. Das Profil des Trägers ist zu bestimmen! (Zulässige Biegungsspannung $k = 1200$ kg/qcm.)

Die Abmessungen der Mauer seien:

Grundlinie . . . . $l = 7{,}20$ m;
Stärke . . . . $d = 0{,}25$ m;
Höhe (über dem Auflager B) $h = 6{,}00$ m.

Das Gewicht von 1 cbm Mauerwerk (das *„spezifische Gewicht"*) betrage

$$s = 1600 \text{ kg}.$$

Es ergibt sich der Reihe nach:

$$\text{Gesamtlast} \quad P = \frac{1}{2} l h d s$$
$$= \frac{1}{2} 7{,}20 \cdot 6{,}00 \cdot 0{,}25 \cdot 1600$$
$$= 8640 \text{ kg};$$
$$\text{Maximalmoment} \quad M_{max} = 0{,}128 \cdot 8640 \cdot 720$$
$$= 796\,300 \text{ cmkg},$$
$$W_{erf.} = \frac{796\,300}{1200} = 664 \text{ cm}^3.$$

Gewählt Grey 22 B mit $W = 671$ cm³.

Digitized by Google

II. Einschaltung: Die sog. Belastungshöhe und Belastungsfläche.

Wir haben soeben die Wirkung einer dreieckförmigen Aufmauerung von überall gleicher Stärke untersucht. Hierbei war es selbstverständlich, daß wir die durch die Aufmauerung hervorgerufene Belastung ebenfalls durch ein Dreieck darstellten. Wenn nun aber die Mauer an den verschiedenen Stellen verschiedene Stärken gehabt hätte, so wäre es nicht mehr zulässig gewesen, die eigentliche Belastung der Mauer ebenfalls durch ein Dreieck zur Darstellung zu bringen. Dann hätte vielmehr diese dreieckförmige Aufmauerung eine ganz anders gestaltete Belastung abgegeben.

Bevor wir in der eigentlichen Berechnung der Querkräfte und Momente weitergehen, wollen wir uns jetzt klar machen, wie man die Wirkung einer derartigen ungleich starken Aufmauerung od. dergl. überhaupt zur Darstellung bringen kann. Aufgabe:

Der in Fig. 107a gezeichnete Balken trägt eine unregelmäßige Aufmauerung. Die Belastungen der einzelnen Stellen sind zeichnerisch darzustellen!

Die Stärken der Mauer sind:

im unteren, rechteckigen Teile:	$d_1 = 0{,}51$ m,
„ oberen, dreieckförmigen „	$d_2 = 0{,}25$ m,
„ „ trapezförmigen „	$d_3 = 0{,}38$ m.

Die übrigen Abmessungen sind aus Fig. 107a zu entnehmen. Das spezifische Gewicht von Mauerwerk ist 1600 kg/cbm = 1,60 t/cbm.

Wäre die Mauer überall gleich stark, so würde Fig. 107a direkt eine Darstellung der Belastung des Trägers geben. Jetzt aber, bei den verschiedenen Stärken der Mauer, ist die Ansicht derselben durchaus kein maßgebendes Bild für die Belastung des Balkens. Denn durch die Verschiedenheit der Mauerdicken an den einzelnen Stellen des Balkens kann es sehr wohl vorkommen, daß eine Stelle mit hoher Aufmauerung weniger zu tragen hat, als eine andere Stelle mit geringer Mauerhöhe (aber größerer Mauerdicke).

Um nun eine richtige Darstellung von den zu den einzelnen Balkenpunkten gehörigen Auflasten zu erhalten, wollen wir eine kleine Strecke u herausgreifen (Fig. 107a). Auf diese entfällt von dem unteren, rechteckigen Teile der Mauer eine Last

$$P' = u \cdot h_1 \cdot d_1 \cdot s \text{ (kg)},$$

und von dem oberen, dreieckförmigen Teile der Mauer entfällt eine Last

$$P'' = u \cdot h \cdot d_2 \cdot s \text{ (kg)}.$$

Digitized by Google

Insgesamt gehört also zu dem Balkenstück u eine Auflast

$$\begin{aligned} P &= P' + P'' \\ &= u \cdot h_1 d_1 s + u \cdot h d_2 s \\ &= u \cdot p' + u \cdot p'', \end{aligned}$$

worin p' zur Abkürzung von $h_1 \cdot d_1 \cdot s$ und p'' zur Abkürzung von $h \cdot d_2 \cdot s$ gesetzt ist.

Aus den obigen Formeln ergibt sich nun eine anschauliche Darstellung der zu der Strecke u gehörigen Auflast. Tragen wir nämlich die Werte p' und p'' rechtwinklig zu u als „*Belastungshöhen*" auf (Fig. 107b) und nennen die in Fig. 107b über u liegende schraffierte Fläche die „*Belastungsfläche*" des Elementes u, so ist der Inhalt dieser Belastungsfläche:

$$f = u \cdot p' + u \cdot p''.$$

Der Inhalt f der Belastungsfläche gibt also die zu der Strecke u gehörige Auflast an.

Man erkennt aus dieser Darstellung, wie sehr der Streifen $u \cdot h_1$ in Fig. 107a den Balkenteil u mehr belastet als der Streifen $u \cdot h$, trotzdem die Höhen h und h_1 der Streifen gleich groß genommen wurden. Dieses rührt natürlich von der verschiedenen Stärke der Mauer her. Aus der bloßen Ansichtszeichnung der Mauer (Fig. 107a) kann man aber den Unterschied in den Belastungen nicht folgern. Hierzu bedarf es vielmehr der Aufstellung der Belastungshöhen p' und p''.

In derselben Weise kann man nun für jede andere Stelle des Balkens durch Bestimmung der Belastungshöhen ein richtiges Bild von der betreffenden Auflast gewinnen. Zweckmäßigerweise wird man hierbei zunächst die Stellen herausgreifen, in denen eine Belastung aufhört oder eine neue Belastung hinzukommt (Stellen u_1, u_2, u_3 und u_4 in Fig. 107a).

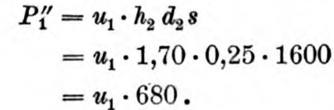
Für die Stelle u_1 ergibt sich folgende Belastungshöhe: Infolge der unteren, rechteckigen Mauer ist die Auflast

$$\begin{aligned} P_1' &= u_1 \cdot h_1 d_1 s \\ &= u_1 \cdot 1{,}30 \cdot 0{,}51 \cdot 1600 \\ &= u_1 \cdot 1061\,. \end{aligned}$$

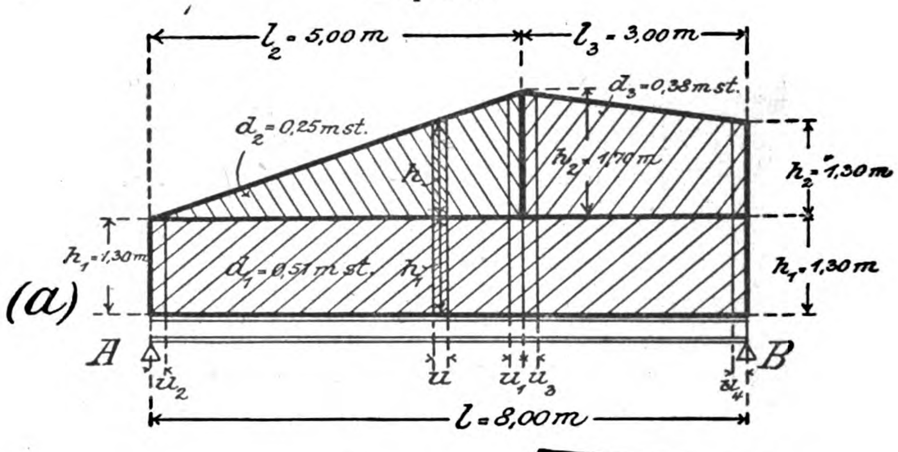
Bei Berechnung des von der oberen Mauer herrührenden Lastanteils wollen wir annehmen, daß die Länge u_1 unendlich klein sei. Dann ist nämlich der über u_1 liegende Mauerstreifen unendlich schmal, so daß wir als seine Höhe einfach die Höhe h_2 einführen

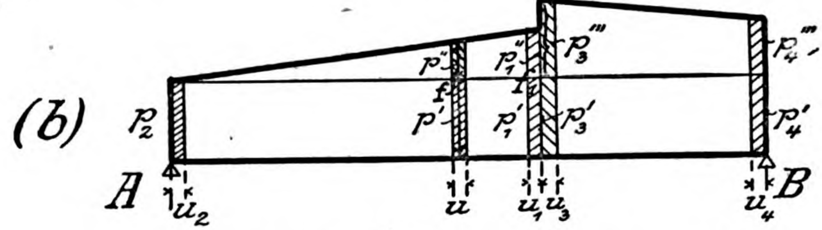
Digitized by Google

können. Augenscheinlich wird durch diese Annahme die Ermittlung der zu u_1 gehörigen Auflast erheblich vereinfacht, da wir keine neuen Höhen auszurechnen brauchen. Somit wird



$$\begin{aligned} P_1'' &= u_1 \cdot h_2\, d_2\, s \\ &= u_1 \cdot 1{,}70 \cdot 0{,}25 \cdot 1600 \\ &= u_1 \cdot 680\,. \end{aligned}$$





Längenmaßstab 1 cm = 1,0 m; Lastenmaßstab 1 cm = 1000 Kg/m

Fig. 107.

Insgesamt ist also die zu u_1 gehörige Auflast

$$\begin{aligned} P_1 &= P_1' + P_1'' \\ &= u_1 \cdot 1061 + u_1 \cdot 680\,. \end{aligned}$$

Die von der unteren bzw. oberen Aufmauerung herrührenden Belastungshöhen des Stabelementes u_1 sind demnach:

$$p_1' = 1061 \text{ kg/m} \quad \text{bzw.} \quad p_1'' = 680 \text{ kg/m}.$$

Diese Belastungshöhen bekommen die Benennung kg pro m (kg/m), denn sie ergeben mit der *Länge u* multipliziert eine *Last P* (kg/m $\times$ m = kg).

Digitized by Google

Wenn wir nun diese Höhen p_1' und p_1'' über dem (unendlich kurzen) Balkenelement u_1 auftragen (Fig. 107b), bekommen wir ein richtiges Bild, in welcher Weise die verschiedenen Aufmauerungen den Balken an dieser Stelle belasten. Der Inhalt f_1 der über u_1 befindlichen „Belastungsfläche" stellt wiederum graphisch die zu u_1 gehörige Auflast dar; denn es ist

$$f_1 = u_1 p_1' + u_1 p_1'' = P_1 .$$

In entsprechender Weise bringen wir die auf dem Balkenelement u_2 (Fig. 107a) ruhende Auflast zur Anschauung. Die Länge von u_2 nehmen wir unendlich klein; d. h. wir bestimmen die Belastungshöhen gerade über dem Auflager A. Infolge der unteren, rechteckigen Mauer ist die Belastungshöhe die gleiche wie für das Element u_1; denn die untere Mauer ändert sich weder in Stärke noch Höhe. Es ist also

$$p_2' = p_1' = 1061 \text{ kg/m}.$$

Infolge der dreieckförmigen Mauer ist die Belastungshöhe gleich Null, da diese Mauer über u_2 die Höhe Null hat. Die gesamte Belastungshöhe für u_2 ist also:

$$p_2 = 1061 \text{ kg/m}.$$

Zum Schlusse bestimmen wir die Belastungshöhen für die Balkenelemente u_3 und u_4 (also immer am Anfange und am Ende einer Belastung). Für u_3 ist die Auflast

$$\begin{aligned} P_3 &= u_3 \cdot h_1 d_1 s + u_3 \cdot h_2 d_3 s \\ &= u_3 \cdot 1{,}30 \cdot 0{,}51 \cdot 1600 + u_3 \cdot 1{,}70 \cdot 0{,}38 \cdot 1600 \\ &= u_3 \cdot 1061 + u_3 \cdot 1034 . \end{aligned}$$

Die Belastungshöhen an der Stelle u_3 sind also infolge der unteren bzw. oberen Mauer:

$$p_3' = 1061 \text{ kg/m} \quad \text{bzw.} \quad p_3''' = 1034 \text{ kg/m}.$$

Für u_4, d. h. für die über Punkt B befindliche Stelle des Balkens, ergeben sich die entsprechenden Belastungshöhen (man rechne sie selber aus!):

$$p_4' = 1061 \text{ kg/m} \quad \text{bzw.} \quad p_4''' = 790 \text{ kg/m}.$$

Somit haben wir für die Knickpunkte der Last die Belastungshöhen aufgestellt. Da sich zwischen diesen Punkten die Belastung gleichmäßig ändert, ergeben sich die Belastungshöhen für die anderen Stellen des Balkens, indem wir die Endpunkte der zu-

Digitized by Google

nächst bestimmten Belastungshöhen durch gerade Linien verbinden. Auf diese Weise entsteht die „Belastungsfläche" des gesamten Balkens. Sobald diese aufgezeichnet ist, kann man für jede Stelle die zugehörige Belastungshöhe aus der Figur entnehmen.

Zusammenfassung: Bei vielen Aufgaben ergibt die Ansichtszeichnung (bzw. Grundrißzeichnung) der Belastung kein erschöpfendes Bild von der eigentlichen Auflast an den verschiedenen Stellen des Balkens. In solchen Fällen bestimmen wir die „Belastungshöhen" der einzelnen Punkte, indem wir an der betreffenden Stelle eine unendlich kleine Balkenstrecke u betrachten und deren Auflast als Produkt von u und einem Faktor p darstellen. Letzterer — in kg/m (oder kg/cm od. dgl.) gemessen — ist dann die „Belastungshöhe" des untersuchten Punktes. Aus den Belastungshöhen folgt die „Belastungsfläche" des ganzen Balkens. Sobald letztere bekannt ist, ergibt sich die zu irgendeiner Balkenstrecke gehörige Auflast dargestellt durch den Inhalt des über dieser Strecke liegenden Teiles der Belastungsfläche.

III. Trapezbelastung.

Für eine trapezförmige Belastungsfläche ist das Maximalmoment zu bestimmen!

Die Belastungshöhen seien p_1 und $(p_1 + p_2)$ (Fig. 108). Durch eine horizontale Hilfslinie werde die Belastung in ein Rechteck und ein Dreieck zerlegt. Dann ergeben sich die Auflagerdrücke

$$A = \frac{1}{2} p_1 l + \frac{1}{3} \frac{p_2 l}{2}$$

$$= \frac{1}{2} p_1 l + \frac{1}{6} p_2 l ,$$

$$B = \frac{1}{2} p_1 l + \frac{1}{3} p_2 l .$$

a) **Der gefährliche Querschnitt m** habe von A die Entfernung x. Zu seiner Bestimmung dient natürlich die Bedingung, daß $Q_m = 0$, d. h.

$$A = P'$$

sein muß, wenn P' die links von m befindliche Auflast bedeutet. Wenn man die Last P' direkt durch den Inhalt des Trapezes $A\,a\,m\,m$ (Fig. 108) ausdrückt, kommt man schließlich auf eine etwas unbequeme quadratische Gleichung. Besser ist es, die Hilfslängen v und w in Fig. 108 einzuführen, und zwar ist w unbe-

Digitized by Google

kannt, da es von der Lage des gefährlichen Querschnittes abhängt, während v bekannt ist, da nach Fig. 108

$$v : l = p_1 : p_2 ,$$

also

$$v = l \frac{p_1}{p_2}$$

ist. Nach Einführung dieser Hilfslängen ergibt sich für P' der Ausdruck:

$$P' = \text{Dreieck } C m m - \text{Dreieck } C a A$$
$$= \frac{1}{2} w p - \frac{1}{2} v p_1$$
$$= \frac{1}{2} w \frac{p_1 w}{v} - \frac{1}{2} p_1 v .$$

$\left(\text{Es ist } p : p_1 = w : v; \quad \text{folglich} \quad p = p_1 \frac{w}{v} .\right)$

Somit wird die zur Bestimmung des gefährlichen Querschnittes dienende Gleichung:

$$A = P',$$

$$\frac{1}{2} p_1 l + \frac{1}{6} p_2 l = \frac{1}{2} \frac{p_1}{v} w^2 - \frac{1}{2} p_1 v .$$

Hieraus folgt der unbekannte Abstand w:

$$\frac{1}{2} \frac{p_1}{v} w^2 = \frac{1}{2} p_1 (l + v) + \frac{1}{6} p_2 l ,$$

$$w^2 = \frac{2 v}{p_1} \left[\frac{1}{2} p_1 (l + v) + \frac{1}{6} p_2 l \right]$$
$$= v (l + v) + \frac{1}{3} \frac{p_2}{p_1} v l .$$

Nun ist aber

$$p_2 : p_1 = l : v ,$$

mithin

$$\frac{p_2}{p_1} v = l .$$

Der obige Ausdruck für w nimmt also die einfache Form an:

$$w^2 = v (l + v) + \frac{1}{3} l^2 ,$$

$$w = \sqrt{v (l + v) + \frac{l^2}{3}} .$$

Die Reihenfolge der Rechnungen bei Aufsuchung des gefährlichen Querschnittes ist also folgende: Zunächst bestimmen wir aus der

Digitized by Google

Spannweite l und den Belastungshöhen p_1 und p_2 die Lage des Punktes C durch die Beziehung:

$$\text{(I)} \qquad v = \frac{p_1}{p_2} l .$$

Dann berechnen wir den Abstand w des gefährlichen Querschnittes vom Punkte C:

$$\text{(II)} \qquad w = \sqrt{v(l+v) + \frac{l^2}{3}} .$$

Und schließlich finden wir den gesuchten Abstand x von m bis zum Auflager A:

$$\text{(III)} \qquad x = w - v .$$

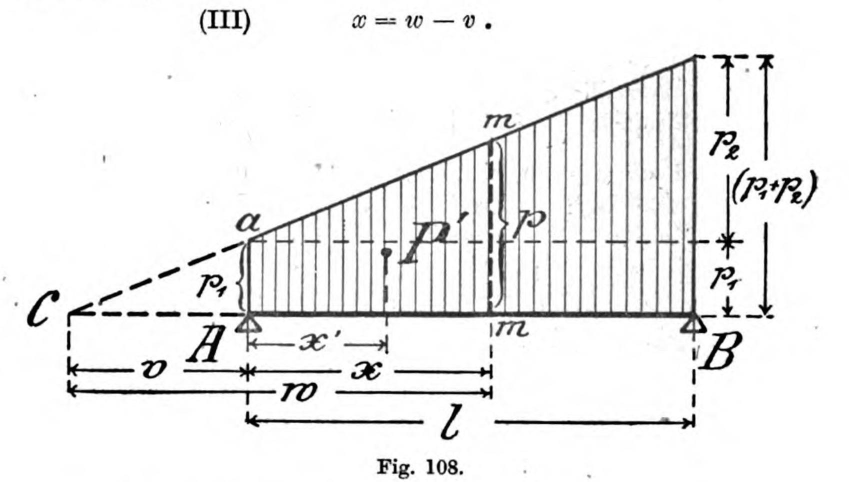


Fig. 108.

b) Das Maximalmoment selber ergibt sich nun aus dem Kräftepaar A, P' (Fig. 108):

$$M_{\max} = P' \cdot x',$$

worin x' der Abstand des Schwerpunktes des Belastungstrapezes $A\,a\,m\,m$ vom Punkte A ist. Nun ist (s. Zusammenstellung in § 55)

$$x' = \frac{x}{3} \frac{p_1 + 2p}{p_1 + p} .$$

Ferner ist

$$P' = \frac{1}{2} x (p_1 + p) .$$

Somit wird

$$M_{\max} = \frac{1}{2} x (p_1 + p) \cdot \frac{x}{3} \frac{p_1 + 2p}{p_1 + p} ,$$

$$\text{(IV)} \qquad M_{\max} = \frac{x^2}{6} (p_1 + 2p) .$$

Digitized by Google

Die Belastungshöhe p hatten wir bereits durch die Formel ausgedrückt:

$$p = p_1 \frac{w}{v},$$

so daß in Gleichung (IV) sämtliche zur Berechnung von M_{max} erforderlichen Stücke bekannt sind. Mit Hilfe des obigen Ausdruckes für p kann man die Formel (IV) auch schreiben:

$$M_{max} = \frac{x^2}{6}\left(p_1 + 2\,p_1 \frac{w}{v}\right),$$

$$\text{(IVa)} \qquad M_{max} = p_1 x^2 \frac{v + 2\,w}{6\,v}.$$

Übungsaufgabe: Ein Balken von $l = 6{,}00$ m Länge trägt eine 0,25 m starke, trapezförmige Aufmauerung, deren Höhe über dem Auflager A gleich 2,50 m und über dem Auflager B gleich $2{,}50 + 6{,}25 = 8{,}75$ m ist. Welches I N. P. ist zu wählen?

($k = 1200$ kg/qcm; $s = 1600$ kg/cbm.)

Lösung:

$p_1 = 1000$ kg/m; $p_2 = 2500$ kg/m,

$v = 2{,}40$ m; $w = 5{,}67$ m; $x = 3{,}27$ m,

$M_{max} = 1\,020\,280$ cmkg; $W = 850$ cm³; I N. P. 34.

Zusatz: Auch bei trapezförmiger Belastung kann man — wie bei Dreieckslast — angenähert das Maximalmoment nach der für gleichmäßige Belastung gültigen Formel $M = \frac{P\,l}{8}$ berechnen.

---

§ 64.

VIII. Belastungsfall: Indirekte Belastung.

Bisher handelte es sich stets um direkte Belastung. Wirkt eine Belastung indirekt, d. h. durch Vermittlung einer Zwischenkonstruktion, auf einen Balken, so muß man im allgemeinen zunächst die Auflagerdrücke der Zwischenkonstruktion (Querträger in Fig. 108°a) berechnen und diese Drücke als direkt wirkende Lasten einführen. Die weitere Berechnung gestaltet sich dann also nach Belastungsfall I (direkt wirkende Einzellasten).

Bei einigen Aufgaben kann man aber diesen etwas umständlichen Weg vermeiden und mit der indirekten Belastung selbst rechnen.

Digitized by Google

I. Die Kraftsummen Q bei indirekter, gleichmäßig verteilter Belastung.

Um bei der in Fig. 108° dargestellten *gleichmäßig verteilten*, indirekten Belastung für die verschiedenen Querschnitte des Balkens die Querkraft zu finden, wollen wir zunächst den Übergang der Kraft von den Längsträgern auf die Hauptträger feststellen. Die Entfernung der einzelnen Querträger voneinander (die sog. *Feldweite*) werde mit λ bezeichnet. Ist die Belastung pro Längeneinheit gleich q, so trägt jeder Längsträger (L) $q \cdot \lambda$ kg und übt also einen Auflagerdruck von $\frac{1}{2} q \cdot \lambda$ aus. Dieser Druck geht nun durch Vermittlung der Querträger auf den Hauptträger, und zwar übertragen der erste und der letzte Querträger je *einen* Auflagerdruck und die mittleren Träger je *zwei* Auflagerdrücke. Wenn wir also eine indirekt wirkende, gleichmäßig verteilte Belastung haben, so ist der Träger zu berechnen für das in Fig. 108°b dargestellte System von direkt wirkenden Einzellasten. Wir haben demnach für den Schnitt *1*:

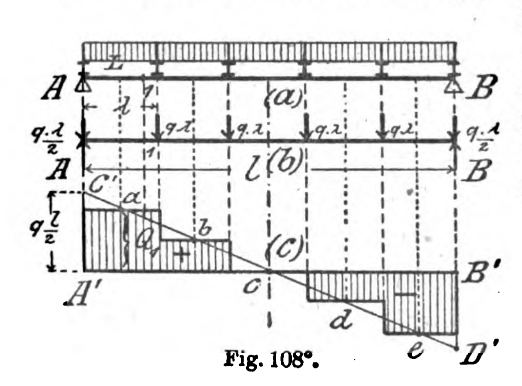


Fig. 108°.

$$Q_1 = +A - q \cdot \frac{\lambda}{2}$$

$$= +q \cdot \frac{l}{2} - q \cdot \frac{\lambda}{2},$$

$$Q_1 = q\left(\frac{l}{2} - \frac{\lambda}{2}\right).$$

Nun ist die Strecke $\frac{l}{2} - \frac{\lambda}{2}$ die Entfernung der Mitte des ersten Feldes bis zu der Mitte des Trägers. Die Kraftsumme für den Schnitt *1* ist also gleich dem Produkt aus der Belastung pro Längeneinheit und der Entfernung zwischen Feldmitte und Trägermitte. Dieser Wert für die Querkraft ergibt sich auch für jeden anderen Schnitt, der im ersten Felde gelegt wird, da für alle diese Schnitte $Q = +A - q \cdot \frac{\lambda}{2}$ ist.

Um diesen Ausdruck graphisch darzustellen, zeichnen wir (Fig. 108°c) $A'C' = B'D' = q \cdot \frac{l}{2}$, loten die Mitte von Feld *1* hinunter und finden aus der Ähnlichkeit der Dreiecke:

$$Q_1 : q\frac{l}{2} = \left(\frac{l}{2} - \frac{\lambda}{2}\right) : \frac{l}{2},$$

Digitized by Google

$$Q_1 = q\frac{l}{2}\cdot\frac{\frac{l}{2}-\frac{\lambda}{2}}{\frac{l}{2}}$$

$$= q\left(\frac{l}{2}-\frac{\lambda}{2}\right).$$

Die mit Q_1 bezeichnete Strecke stellt also die Kraftsumme für alle Schnitte dar, die im Felde *1* gelegt werden können. Entsprechend loten wir die Mitten der anderen Felder hinunter, bestimmen hierdurch die Punkte b, c, d, e und ziehen die in Fig. 108°c gezeichnete Treppenlinie. Die schraffierte Fläche ist dann die Querkraftfläche für die vorliegende Belastung. In der Mitte eines jeden Feldes stimmt die Querkraft für direkte Belastung überein mit der für indirekte Belastung.

In Fig. 108° wurden der Einfachheit wegen gleichgroße Felder angenommen. Man erkennt aber, daß die entsprechende Ableitung sich auch für ungleiche Entfernungen der Querträger voneinander aufstellen läßt. Allgemein gilt also der Satz:

Bei einer indirekt wirkenden, gleichmäßig verteilten Belastung ist die Kraftsumme eines Feldes gleich der Belastung pro Längeneinheit mal dem Abstande von Feldmitte bis Trägermitte.

II. Die Momentensummen bei beliebiger indirekter Belastung für die Querschnitte in den Belastungspunkten.

In Fig. 109°a haben wir eine beliebige Gruppe von indirekt wirkenden Lasten. Die Momente an den Stellen *1*, *2*, *3* und *4*, d. h. unter den Belastungspunkten, sollen bestimmt werden!

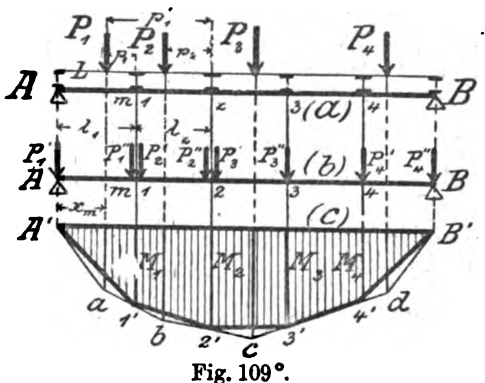


Fig. 109°.

Der Auflagerdruck des ersten Längsträgers, L, heiße auf der linken Seite P_1' und auf der rechten P_1''; entsprechend beim zweiten Längsträger links P_2' und rechts P_2'' usw. Diese Auflagerdrücke der Längsträger auf die Querträger gehen nun als *direkt* wirkende Lasten auf den Hauptträger, so daß dieser nach dem in Fig. 109°b dargestellten Schema belastet ist. (Die in Wirklichkeit zusammenfallenden Kräfte P_1'' und P_2', und P_2'' und P_3' sind

der Deutlichkeit wegen etwas nebeneinander gezeichnet.) Wir haben jetzt die Momente infolge direkt wirkender Einzellasten zu bestimmen und finden z. B. das Moment an der Stelle *1*

$$M_1 = +A \cdot \lambda_1 - P_1' \cdot \lambda_1 .$$

Nun ist aber $P_1 \cdot p_1$ (das statische Moment der Kraft P_1 in bezug auf Punkt *1*) gleich $P_1' \cdot \lambda_1 + P_1'' \cdot 0$ (die Summe der statischen Momente der beiden Seitenkräfte P_1' und P_1'' von P_1 in bezug auf Punkt *1*). Da $P_1'' \cdot 0 = 0$ ist, so haben wir $P_1 \cdot p_1 = P_1' \cdot \lambda_1$. Setzen wir diesen Wert in die obige Gleichung von M ein, so wird

$$M_1 = +A \cdot \lambda_1 - P_1 \cdot p_1 ;$$

d. h. *das Moment an der Stelle 1 ist bei indirekter Belastung ebenso groß, als wenn die Belastung direkt auf dem Balken stehen würde.*

Jetzt gehen wir zu Punkt *2*. Stellen wir wieder das Moment nach Fig. 109°b auf, so ist

$$M_2 = +A(\lambda_1 + \lambda_2) - P_1'(\lambda_1 + \lambda_2) - P_1'' \cdot \lambda_2 - P_2' \cdot \lambda_2 .$$

Nun haben wir andererseits

$$P_1 \cdot p_1' = P_1'(\lambda_1 + \lambda_2) + P_1'' \cdot \lambda_2 ,$$

ferner

$$P_2 \cdot p_2 = P_2' \lambda_2 + P_2'' \cdot 0 = P_2' \cdot \lambda_2 .$$

Setzen wir diese Werte in die Gleichung für M_2 ein, so wird

$$M_2 = +A(\lambda_1 + \lambda_2) - P_1 \cdot p_1' - P_2 \cdot p_2 ,$$

und dieses ist derselbe Wert, den wir erhalten würden, wenn die Belastung *direkt* auf dem Balken stehen würde. Die Punkte, in denen die indirekt wirkende Last durch Vermittlung der Zwischenkonstruktion auf den Hauptträger übertragen wird, haben wir früher „Belastungspunkte" genannt. Wir haben also den Satz:

Bei indirekt wirkender Belastung sind die Biegungsmomente unter den Belastungspunkten ebenso groß, als wenn die Belastung direkt wirken würde.

Zwischen den Belastungspunkten sind die Momente bei indirekter und bei direkter Belastung verschieden. So ist z. B. das Moment für den Schnitt m im ersten Falle gleich $+A \cdot x_m - P_1' \cdot x_m$, während es dann, wenn die Last P_1 an derselben Stelle direkt auf dem Träger stehen würde, gleich $+A \cdot x_m - P_1 \cdot 0$ wäre.

Aus dem obigen Satze ergibt sich eine einfache Konstruktion der Momentenfläche: Wir nehmen zunächst an, die Lasten $P_1 \ldots P_4$ ständen *direkt* auf dem Balken AB und zeichnen hierzu nach § 56

Digitized by Google

die Momentenfläche $A'abcdB'$. Nun ist das Moment an einem Belastungspunkte bei direkter Belastung gleich dem bei indirekter Belastung. Loten wir also die Punkte *1*, *2*, *3*, *4* hinunter, so stellen die Strecken M_1, M_2, M_3, M_4 auch die an diesen Punkten bei *indirekter* Belastung entstehenden Momente dar. Um für die dazwischenliegenden Punkte die Momente zu finden, beachten wir, daß der Träger in Wirklichkeit nach dem Schema Fig. 109°b belastet ist. Die Momentenfläche muß also ein Vieleck sein, dessen Seiten von Einzellast zu Einzellast gerade durchgehen. Im vorliegenden Falle haben wir die Eckpunkte *1'*, *2'*, *3'*, *4'* dieses Polygons soeben bestimmt. Wir finden demnach die gesamte Momentenfläche, indem wir die Punkte A', *1'*, *2'*, *3'*, *4'*, B' durch gerade Linien verbinden (Fig. 109°c). Aus der obigen Ableitung der Momente folgt der wichtige Satz:

Bei indirekter Belastung tritt das Maximalmoment stets in einem Belastungspunkte auf.

§ 64a.

Beispiel für indirekte Belastung.

Der in Fig. 108° gezeichnete Träger sei ein I *N. P. 32 mit einer Spannweite $l = 5 \cdot 1{,}20 = 6{,}00$ m. Die auf den Längsträgern ruhende gleichmäßig verteilte Belastung betrage $q = 1600$ kg/m. Die Beanspruchungen des Trägers sind zu berechnen!*

I. Die Schubspannungen.

Die Punkte, in denen die Querträger aufruhen (Belastungspunkte), wollen wir jetzt mit *0*, *1*, *2*, *3*, *4* und *5* bezeichnen. Die Feldweiten sind je $\lambda = 1{,}20$ m. Nach dem in § 64, I abgeleiteten Satze ist bei gleichmäßiger indirekter Belastung die Kraftsumme eines Feldes gleich dem Produkte aus der Belastung pro Längeneinheit mal der Entfernung von Feldmitte bis Trägermitte. Da im vorliegenden Falle die Feldweiten λ einander gleich sind, lassen sich die Entfernungen der Feldmitten bis zur Trägermitte als Vielfache der Feldweite λ ausdrücken. Für das erste Feld z. B. ist diese Entfernung gleich 2λ; für das zweite Feld ist sie gleich 1λ usw. Somit werden die Kraftsummen Q_{0-1}, Q_{1-2} usw. der Felder *0—1*, *1—2* usw.:

$$Q_{0-1} = q\left(\frac{\text{kg}}{\text{m}}\right) \cdot 2\lambda\,(\text{m}) = q\lambda \cdot 2\,(\text{kg}),$$

$$Q_{1-2} = q \cdot 1\lambda = q\lambda \cdot 1\,; \quad \text{usw.}$$

Digitized by Google

Die Zahlenwerte eingesetzt, ergibt sich

$$\begin{aligned} Q_{0-1} &= 1600 \cdot 1{,}20 \cdot 2 \\ &= +1920 \cdot 2 = +3840 \text{ kg}, \\ Q_{1-2} &= +1920 \cdot 1 = +1920 \text{ kg}, \\ Q_{2-3} &= +1920 \cdot 0 = \quad 0 \text{ kg}, \\ Q_{3-4} &= -1920 \cdot 1 = -1920 \text{ kg}, \\ Q_{4-5} &= -1920 \cdot 2 = -3840 \text{ kg}. \end{aligned}$$

Legen wir also an irgendeiner Stelle innerhalb des ersten Feldes einen Schnitt durch den Balken, so ist die in diesem Querschnitte auftretende Schubkraft $T = 3840$ kg, und zwar wirken die Schubspannungen in „positiver Anordnung" (Fig. 81a; auf den linken Teil nach unten, auf den rechten Teil nach oben).

Für alle Querschnitte innerhalb des zweiten Feldes ist die Schubkraft $T = 1920$ kg, ebenfalls in positiver Anordnung. Für das mittelste Feld ist die Kraftsumme Q gleich Null. Folglich ist auch die Schubkraft T gleich Null. Bei einem innerhalb dieses Feldes gelegten Querschnitte treten also überhaupt keine Schubspannungen auf. Der Querschnitt ist vielmehr nur durch die Normalspannungen σ beansprucht. Denken wir uns mit diesem Balken Fig. 108° den in Fig. 80 gezeichneten Versuch vorgenommen, so würde es also bei einem Schnitte innerhalb des Feldes *2—3* genügen, zur Darstellung der inneren Kräfte nur die Stäbe D und Z anzubringen. Der die Schubkraft T darstellende Draht würde spannungslos bleiben. Man sagt: Der Querschnitt ist auf „reine Biegung" beansprucht.

Im folgenden Felde, *3—4*, treten dann wieder Schubspannungen auf. Sie sind in „negativer Anordnung" und ergeben eine Resultierende $T = 1920$ kg.

In den Querschnitten des letzten Feldes, *4—5*, ist die Schubkraft 3840 kg, und zwar in „negativer Anordnung".

II. Die Normalspannungen.

Bei indirekter Belastung bestimmen wir die Momentensummen zunächst für die Querschnitte in den Belastungspunkten. Dann können wir so rechnen, als ob die betreffende Belastung direkt auf dem Balken stände. In unserem Falle — gleichmäßig verteilte Belastung — haben wir also zur Berechnung der Momente die Formel

$$M = \frac{q}{2} x (l - x)$$

Digitized by Google

zur Verfügung (§ 59). Drücken wir hierin noch die Entfernungen x und $l - x$ des Querschnittes von den Auflagerpunkten A und B durch die Feldweite λ aus, so ergeben sich für die einzelnen Belastungspunkte folgende Momente:

$$M_1 = \frac{q}{2} \cdot 1\lambda \cdot 4\lambda = \frac{q \cdot \lambda^2}{2} \cdot 1 \cdot 4,$$

$$M_2 = \frac{q}{2} \cdot 2\lambda \cdot 3\lambda = \frac{q \cdot \lambda^2}{2} \cdot 2 \cdot 3.$$

(Ferner ist $M_3 = M_2$, $M_4 = M_1$.)

In Zahlen also (mit $q = 1600$ kg/m $= 16{,}00$ kg/cm; $\lambda = 120$ cm):

$$M_1 = \frac{16{,}00 \cdot 120^2}{2} \cdot 1 \cdot 4$$

$$= 115200 \cdot 1 \cdot 4 = 460800 \text{ cmkg},$$

$$M_2 = 115200 \cdot 2 \cdot 3 = 691200 \text{ cmkg}.$$

Das Widerstandsmoment eines I N.-P. 32 ist (nach den Profiltabellen)

$$W = 781 \text{ cm}^3.$$

Somit ergeben sich an den Querschnitten *1* und *2* die Normalspannungen:

$$\sigma_1 = \frac{460800}{781} = 590 \text{ kg/qcm},$$

$$\sigma_2 = \frac{691200}{781} = 885 \text{ kg/qcm}.$$

Um die Normalspannungen für einen Querschnitt zu bestimmen, der beispielsweise in der Mitte zwischen den Belastungspunkten *1* und *2* liegt, berechnen wir zunächst das Moment an dieser Stelle

$$M = M_1 + (M_2 - M_1)\frac{1}{2}$$

$$= 460800 + 230400 \cdot \frac{1}{2}$$

$$= 576000 \text{ cmkg}.$$

Dann ergibt sich die größte Normalspannung dieses Querschnittes

$$\sigma = \frac{576000}{781}$$

$$= 738 \text{ kg/qcm}.$$

§ 64b.

Zusammenfassung zum 10. Vortrag.

In diesem Vortrage ist die Aufgabe behandelt: Gegeben ist ein Träger zwischen zwei Stützen und die zugehörige (feststehende) Belastung. Für irgendeinen Querschnitt sollen die Kraftsumme Q und die Momentensumme M bestimmt werden!

Das Grundprinzip zur Lösung dieser Aufgabe lautet: Man denke sich den Balken an der betreffenden Stelle getrennt (Fig. 92b, c) und betrachte

22*

Digitized by Google

nun entweder den linken oder den rechten Balkenteil. Dann ist einfach die Querkraft Q die Summe aller Kräfte, das Moment M die Summe der statischen Momente aller Kräfte } die an dem betrachteten Teile vorhanden sind.

Nach diesem Grundprinzip muß sich jedes Q und M berechnen lassen. Die wichtigsten Fälle wurden nun noch besonders behandelt und hierdurch manche Vereinfachungen gefunden:

Direkte Belastungen.

I. Einzellasten. § 56—58a. Zusammenfassung s. § 58a.

II. Gleichmäßig verteilte Last. § 59—60. Zu merken: $Q_m = q \cdot x_m''$;
$M_m = \frac{q}{2} x_m (l - x_m)$; $M_{max} = \frac{Q \cdot l}{8}$.

III. Kräftepaar. § 61. Biegungsmoment infolge eines Kräftepaares = Einzelkraft × Abstand der beiden Kräfte voneinander.

IV. Schichtenbelastung § 62. (S. auch Fall V.) Bei Berechnung von M_{max} zweckmäßig Darstellung durch Kräftepaare:

allg. Regel S. 322.

für Fig. 102: $M_{max} = \frac{A^2}{2(q_1 + q_2)}$,

„ „ 103: $M_{max} = \frac{(A + q_2 \cdot 1{,}20)^2}{2(q_1 + q_2)} - q_2 \cdot 1{,}20 \cdot \frac{1{,}20}{2}$,

„ „ 104: $M_{max} = \frac{(A + q_2 \cdot 0{,}90 + q_3 \cdot 2{,}20)^2}{2(q_1 + q_2 + q_3)} - q_2 \cdot 0{,}90 \cdot \frac{0{,}90}{2} - q_3 \cdot 2{,}20 \cdot \frac{2{,}20}{2}$.

„ „ 105b: $M_{max} = \frac{(A + p_2 \cdot a - P_3 - P_4)^2}{2(p_1 + p_2)} - p_2 \cdot a \cdot \frac{a}{2} + P_3 \cdot d + P_4 \cdot b$.

V. Schichtenbelastung mit Einzellasten. § 62a. 1. Liegt der gefährliche Querschnitt innerhalb einer verteilten Belastung, dann Berechnung nach Fall IV. (Beispiel: Fig. 105b.)

2. Liegt der gefährliche Querschnitt unter einer Einzellast, dann:

Fig. 105c.
$M_{max} = A \cdot b - p_1 b \cdot \frac{b}{2} - p_2 c \cdot \frac{c}{2} - P_3 \cdot g$, oder
$M_{max} = Q \cdot b + p_1 b \cdot \frac{b}{2} + p_2 c \cdot h + P_3 \cdot d$ (Q = Querkr. vor P_4).

VI. und VII. Dreiecks- und Trapezlast. § 63. $M_{max} = \sim \frac{1}{8} P l$.

VIII. Indirekte Belastung. § 64, 64a. Zu merken: 1. Bei Bestimmung der Momente (unter den Belastungspunkten) nicht erst die Querträgerdrücke einführen, sondern direkt mit der gegebenen Belastung rechnen. 2. Bei Bestimmung der Querkraft bei gleichmäßig verteilter Last direkt nach der Formel $Q = g \times$ Abstand von Feldmitte bis Trägermitte. (Bei ungleichmäßiger Belastung müssen aber bei Berechnung von Q die Querträgerdrücke als Einzellasten eingeführt werden.)

---

11. Vortrag.

Kraft- und Momentensummen des Trägers zwischen zwei Stützen bei beweglicher Belastung.

Wir betrachten wieder einen Träger zwischen zwei Stützpunkten, also ohne überkragende Enden. Die Belastung sei jetzt aber nicht feststehend, sondern beweglich. Bei der Untersuchung der Beanspruchung irgendeines Querschnittes des Trägers infolge

Digitized by Google

einer solchen beweglichen Belastung kommt es vor allen Dingen auf die Beantwortung der Frage an: Bei welchen Laststellungen ergeben sich für diesen Querschnitt die größte Kraftsumme Q und die größte Momentensumme M? Denn diese Laststellungen erzeugen in dem betreffenden Querschnitte die größten Schubspannungen τ und die größten Normalspannungen σ. Man nennt sie deshalb die für den Querschnitt *„gefährlichen Laststellungen"*.

Um nun diese „gefährlichen Laststellungen" aufzusuchen und die hierzu gehörigen Kraftsummen Q und Momentensummen M zu bestimmen, werden wir 3 Methoden ableiten: 1. Einflußlinien, 2. analytische Methode, 3. Seilpolygon.

§ 65.

Erste Methode: Einflußlinien.

Hierbei sind die beiden Fälle zu unterscheiden, daß die Belastung *direkt* oder *indirekt* auf den Träger einwirkt.

Erster Fall: Direkte Belastung.

a) Einflußlinie für die Kraftsumme Q.

Die Aufgabe laute: Für einen beliebigen, aber feststehenden Querschnitt m (Fig. 109a) sollen die verschiedenen Werte, die die Kraftsumme Q_m dieses Querschnittes infolge des Wanderns der Last $P = 1{,}0$ t annimmt, gefunden werden.

Beginnen wir mit Laststellung I in Fig. 109a. Je nachdem die Summe der Kräfte am linken oder am rechten Teile gebildet wird, ergibt sich für die Kraftsumme der Ausdruck:

$$\text{(I)} \qquad \begin{cases} Q_{m,I} = +A_I\,, & \text{oder} \\ Q_{m,I} = -B_I + P\,, \end{cases}$$

worin A_I und B_I die bei der Laststellung I entstehenden Auflagerdrücke sind. Beide Werte von Q sind einander gleich, wie bereits früher bewiesen. (Im vorliegenden Falle ist $A_I + B_I = P$, also $A_I = -B_I + P$.) Sobald also beispielsweise der Auflagerdruck A_I für diese Laststellung ausgerechnet ist, ergibt sich für $Q_{m,I}$ ein bestimmter, und zwar positiver Wert. Somit ist für die Stellung I von Fig. 109a die Kraftsumme des Schnittes m bestimmt.

Nun möge die Last in Stellung II (Fig. 109a) hinüberrücken. Dann ist die Kraftsumme für den Schnitt m:

$$\text{(II)} \qquad \begin{cases} Q_{m,II} = +A_{II} - P\,, & \text{oder} \\ Q_{m,II} = -B_{II}\,. \end{cases}$$

Digitized by Google

(A_{II} und B_{II} sind die jetzt entstehenden Auflagerdrücke.) Hier wird es also bequemer sein, die Summe der Kräfte am rechten Teile zu bilden. Sobald dann der Auflagerdruck B_{II} ermittelt ist, ergibt sich für $Q_{m,II}$ ein bestimmter, diesmal aber negativer Wert. Somit ist auch für diese Laststellung der Ausdruck für die Kraftsumme des Querschnittes m aufgestellt.

Um nun aber diese Ausdrücke für die Querkraft deutlich vor Augen zu haben, wollen wir sie graphisch auftragen. Das heißt, wir wollen eine solche Zeichnung entwerfen, daß zu jeder Last-

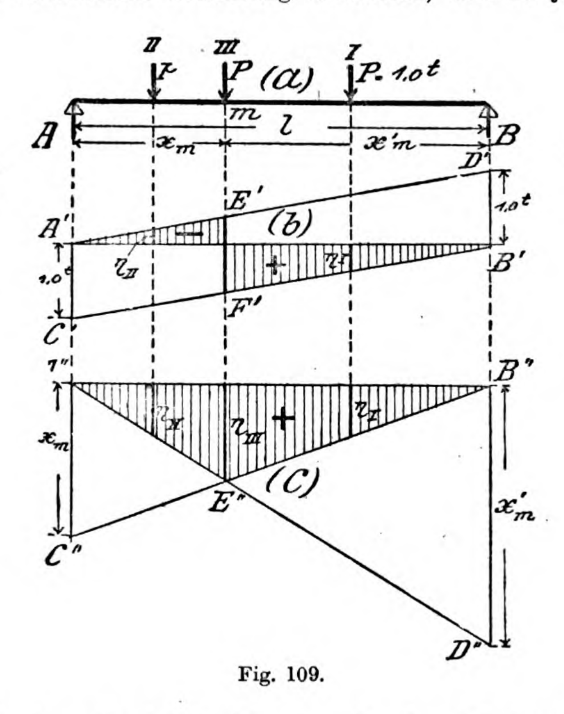


Fig. 109.

stellung die betreffende Kraftsumme Q_m des Schnittes m durch eine Strecke dargestellt ist. Augenscheinlich bekommen wir dann ein recht anschauliches Bild, welche verschiedenen Werte die Querkraft Q_m beim Wandern der Last annimmt.

Eine ähnliche Darstellung haben wir übrigens schon in § 22, bei Bestimmung des Auflagerdruckes eines Balkens infolge einer wandernden Last, kennen gelernt. Ebenso, wie dort der Auflagerdruck A (s. § 22!), soll jetzt also die Kraftsumme Q_m jedesmal *unter der betreffenden Laststellung* durch die Ordinaten einer Linie dargestellt werden. Letztere werden wir entsprechend die *Einflußlinie für die Kraftsumme Q_m des Schnittes m* nennen. So-

Digitized by Google

bald sie gefunden ist, brauchen wir nur die betreffende Laststellung hinunterzuloten und erhalten durch die abzumessende Ordinate η die Kraftsumme des Schnittes m. (Wiederhole die entsprechende Darstellung der Einflußlinie des Auflagerdruckes, § 22 u. f.!)

Bei dieser Arbeit, Q_m für alle möglichen Laststellungen aufzutragen, gehen wir natürlich von den Gleichungen (I) und (II) aus. Die erstere läßt sich so aussprechen: Solange sich die Last rechts vom Schnitte befindet, ist die

$$\text{Kraftsumme } Q_m = \text{Auflagerdruck } A .$$

Daraus folgt: Sobald der Auflagerdruck A für alle Laststellungen dargestellt ist, ist hierdurch auch die Kraftsumme Q_m dargestellt (denn beide Werte sind ja nach der obigen Gleichung gleich groß). Nun ergibt sich aber der Auflagerdruck A für alle Laststellungen durch Auftragen der Einflußlinie für A (A-Linie, § 22). Um also die Kraftsumme Q_m für die verschiedenen Laststellungen aufzufinden, werden wir ebenfalls die A-Linie aufzeichnen.

Wir tragen also in Fig. 109b die Strecke $A'C' = 1{,}0$ t auf und verbinden C' mit B'. Steht dann an der Stelle I die Last $P = 1{,}0$ t, so ergibt sich durch Hinunterloten und Abmessen der Ordinate η_I:

$$A_I = \eta_I ,$$

und mithin, da $Q_m = A_I$ ist, auch:

$$Q_m = \eta_I .$$

Durch Aufzeichnen der A-Linie $C'B'$ sind also die Kraftsummen Q_m für die verschiedenen Laststellungen in Form von Ordinaten η dargestellt.

Dieses gilt aber nur, solange P sich *rechts* von dem untersuchten Schnitte m befindet. Ist P links davon, so ist Q_m nicht mehr einfach gleich dem Auflagerdruck A [s. Gleichungen (II)]. Wohl aber gleich dem Auflagerdruck B. Um also für alle Laststellungen links von m die Kraftsumme Q_m zu erhalten, werden wir die Einflußlinie für B zeichnen. Wir tragen demnach in Fig. 109b die Strecke von 1,0 t wiederum rechtwinklig zu der Horizontalen $A'B'$, jetzt aber unter dem Auflager B, auf und verbinden den Endpunkt D' mit dem Punkte A'. Da ferner

$$Q_m = -B_{II} ,$$

also negativ, ist, tragen wir die B-Linie auf der entgegengesetzten Seite der Nullachse $A'B'$ auf, wie vorhin die A-Linie aufgetragen

Digitized by Google

ist. Auf diese Weise ist dann auch in der Darstellung der Gegensatz der Vorzeichen zum Ausdruck gebracht.

Insgesamt haben wir also folgendes Resultat: Solange sich die Last zwischen m und B befindet, benutzen wir die Einflußlinie für A, und zwar brauchen wir von dieser das Stück $F'B'$. Ist aber die Last zwischen m und A, so verwenden wir die B-Linie, und zwar das Stück $E'A'$. Die gebrochene Linie $A'E'F'B'$ hat also folgende Eigenschaft: Steht an beliebiger Stelle des Trägers eine Last $P = 1{,}0$ t, so ergibt die unter der Last befindliche Ordinate η die Kraftsumme Q_m des Schnittes m. Wir nennen deshalb diese Linie die *Einflußlinie für* Q_m (Q_m-*Linie*). Die rechts von m befindlichen Ordinaten sind positiv, die links davon befindlichen negativ zu nehmen.

Sobald die Einflußlinie $A'E'F'B'$ für die Kraftsumme des Schnittes m aufgezeichnet ist, ist es also sehr einfach, für irgendeine Last P die Querkraft Q_m zu bestimmen: Wir loten die Last P hinunter, messen die betreffende Ordinate η der Einflußlinie ab und erhalten die bei dieser Laststellung für den Schnitt m entstehende Kraftsumme:

$$Q_m = P \cdot \eta .$$

[Die Einflußlinie ist für eine wandernde Last von 1,0 t gezeichnet. Ist die Last gleich P(t), so müssen also die Ordinaten der Einflußlinie noch mit P multipliziert werden.] Liegt die Ordinate η im positiven Teile, so ist Q_m positiv, andernfalls ist es negativ.

Eine Schwierigkeit entsteht bei der Stellung III. Hier springt die Einflußlinie aus dem positiven in den negativen Teil. Wenn die Last direkt über m steht, kann man also keinen bestimmten Wert für Q_m angeben. Man muß hierzu beachten, daß Einzellasten, so wie wir sie in der Zeichnung darstellen, nur gedachte Größen sind, da in Wirklichkeit jede Last sich über eine gewisse Strecke verteilt und niemals in einem mathematischen Punkte angreift. Wenn sich also eine Last auf dem Träger bewegt, so wird in Wirklichkeit an der Stelle m zwar ein schneller, aber nicht sprunghafter Vorzeichenwechsel der Querkraft stattfinden.

b) *Einflußlinie für die Momentensumme* M.

In entsprechender Weise wollen wir die Momentensumme M_m des Querschnittes m für alle möglichen Laststellungen graphisch darstellen.

Digitized by Google

Bei der Stellung I (Fig. 109a) ergibt sich (bei Betrachtung des linken Teiles)

$$\text{(III)} \qquad M_{m,I} = +A_I \cdot x_m .$$

Hieraus folgt, daß, solange sich die Last P rechts von dem untersuchten Schnitte befindet, die Momentensumme M_m gleich dem x_m-fachen Werte des bei dieser Stellung entstehenden Auflagerdruckes A ist. Um also die Einflußlinie für M_m zu erhalten, werden wir die Einflußlinie für A im x_m-fachen Maßstabe zeichnen. Wir tragen demnach in Fig. 109c die Strecke

$$A''C'' = x_m \cdot 1{,}0 = x_m$$

auf (d. h. das x_m-fache von einer Tonne) und verbinden C'' mit B''. Dann ist die Ordinate η_I von Fig. 109c:

$$\eta_I = x_m \cdot A_I$$

(nämlich das x_m-fache der Ordinate η_I von Fig. 109b). Das heißt: Die Ordinate η_I von Fig. 109c gibt das x_m-fache des Auflagerdruckes A_I an. Dieses ist aber nach Gleichung (III) gleich der Momentensumme des Schnittes m bei der Laststellung I. Es ist also

$$\eta_I = x_m \cdot A = M_m .$$

Rückt nun die Last in Stellung II, so werden wir zweckmäßig M_m aus den am rechten Teile angreifenden Kräften bilden, weil wir hier nur die eine Kraft B_{II} haben. Dann ist

$$\text{(IV)} \qquad M_{m,II} = +B_{II} \cdot x'_m .$$

(Am rechten Teile sind die linksherum drehenden Kräfte positiv zu nehmen, vgl. §§ 43, 44 oder 56.) Wir bekommen also M_m, indem wir den x'_m-fachen Wert von B konstruieren. Zu diesem Zwecke trage ich

$$B''D'' = x'_m \cdot 1{,}0 = x'_m$$

auf [ebenfalls nach unten, da in Gleichung (IV) der Wert B das positive Vorzeichen hat], verbinde D'' mit A'' und erhalte

$$M_m = +B \cdot x'_m = +\eta_{II} .$$

Solange die Last zwischen m und B ist, haben wir also das Moment für den Schnitt m dargestellt durch die im x_m-fachen Maßstabe aufgetragene Einflußlinie von A; wir benutzen demnach von dieser Linie die Strecke $E''B''$. Ist die Last aber zwischen m und A, so verwenden wir die im x'_m-fachen Maßstabe aufge-

Digitized by Google

tragene B-Linie, und zwar das Stück $E''A''$. Die gesamte Linie $A''E''B''$ hat also folgende Eigenschaft: Steht an beliebiger Stelle des Balkens eine Last $P = 1{,}0$ t, so ergibt die unter dieser Last gemessene Ordinate η das Biegungsmoment für den Querschnitt m. Wir nennen sie deshalb die „*Einflußlinie für* M_m“ (M_m-*Linie*). Die Einflußlinie für das Moment ist an allen Stellen positiv, da wir für M_m sowohl bei Stellung I als auch bei Stellung II einen positiven Wert bekamen [Gleichung (III) und (IV)], während die Querkraft Q_m positiv oder negativ war, je nachdem die Last P rechts oder links vom Schnitte stand.

Bei Laststellung III ist

$$M_m = + A \cdot x_m = B \cdot x'_m .$$

Wenn die Last direkt über m steht, können wir also M_m sowohl aus der Linie $C''B''$ als auch aus $D''A''$ finden. Der Schnittpunkt E'' dieser beiden Linien muß also unter dem Querschnitt m liegen, weil wir nur in diesem Falle aus beiden Linien ein und dieselbe Ordinate, η_{III}, abgreifen. Auch rein geometrisch sieht man leicht aus Fig. 109c, daß der Schnittpunkt E'' vertikal unter m liegt. Von dieser Eigenschaft des Punktes E'' werden wir insofern Gebrauch machen, um das Auftragen der Strecke x'_m zu ersparen. Wir ziehen nämlich, nach Auftragen von $A''C'' = x_m$, nur die Linie $C''B''$, loten den zu untersuchenden Schnitt m hinunter, bestimmen hierdurch den Punkt E'' und verbinden E'' mit A''. Augenscheinlich kommen wir auf diese Weise etwas einfacher zu der gesuchten Einflußlinie $A''E''B''$.

Zweiter Fall: Indirekte Belastung.

In § 23 (III. Satz) ist allgemein gezeigt, wie sich aus für direkte Belastung gezeichneten Einflußlinien solche für indirekte Belastung entwickeln lassen: Wir loten die Belastungspunkte hinunter und verbinden die Endpunkte der hierdurch bestimmten Ordinaten durch gerade Linien. Auf diese Weise wird eine zunächst nur für direkte Belastung bestimmte Einflußlinie für indirekte Belastung gültig gemacht.

Dieses allgemeine Prinzip der Umwandlung benutzen wir natürlich auch bei den Einflußlinien für Querkräfte und Momente. In Fig. 110a und b sind zunächst zwei Träger nebeneinander gezeichnet; der eine mit direkter, der andere mit indirekter Lasteinwirkung. Für den ersteren zeigt Fig. 110c die Einflußlinie für die Kraftsummen des Schnittes m (Linie $A'E'F'B'$). Um nun

Digitized by Google

für denselben Schnitt m, aber für den Fall der *indirekten* Belastung, die betreffende Einflußlinie zu erhalten, wird zunächst die Linie $A'E'F'B'$ gezeichnet (Fig. 110d). Dann werden die unter den Belastungspunkten $0, 1, \ldots, 5$ befindlichen Ordinaten dieser Einflußlinie aufgesucht und deren Endpunkte aufeinanderfolgend durch gerade Linien verbunden. Auf diese Weise entsteht aus der ursprünglich (d. h. für direkte Belastung) gezeichneten Einflußlinie $A'E'F'B'$ die neue, für indirekte Belastung geltende Einflußlinie $A'G'H'B'$. Man erkennt aus Fig. 110d, daß in dem Felde $1—2$,

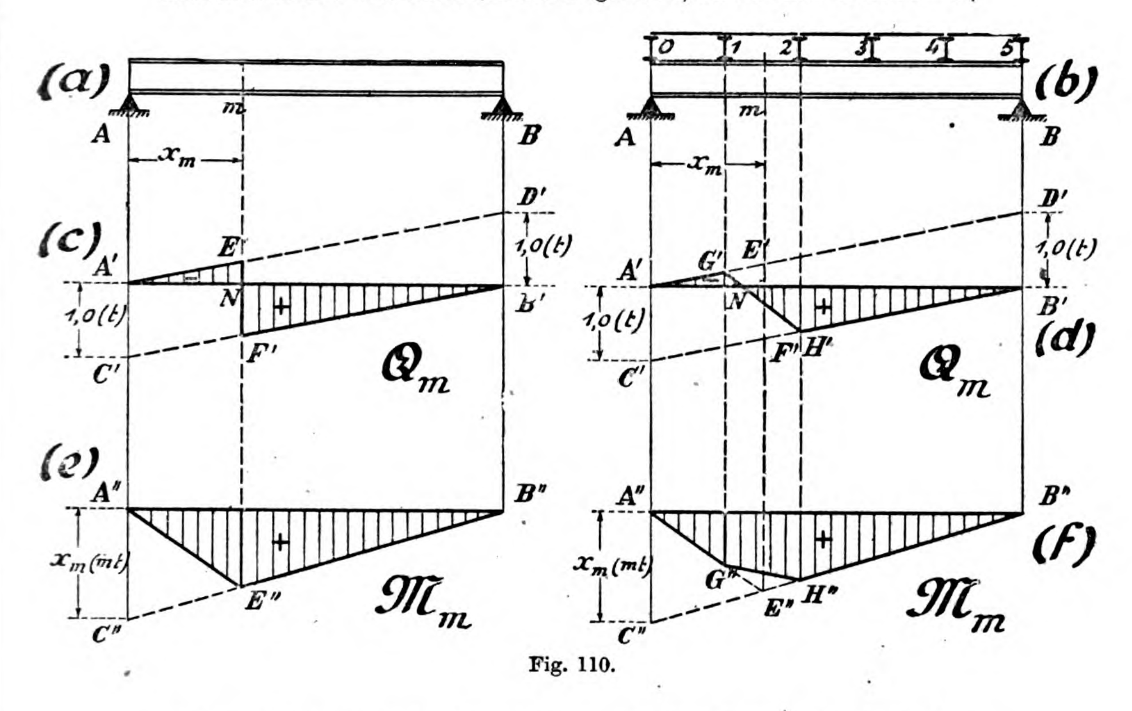


Fig. 110.

in dem der untersuchte Schnitt liegt, die Einflußlinie bei indirekter Belastung ganz anders aussieht als bei direkter Belastung. Dieses kommt eben daher, weil durch die Querträger *1* und *2* die Lasten zu verschiedenen Seiten des Schnittes verteilt werden. Links von *1* und rechts von *2* stimmen Fig. 110d und c miteinander überein. Ferner sieht man aus Fig. 110d: *Alle Schnitte, die innerhalb ein und desselben Feldes liegen, haben die gleiche Einflußlinie für die Querkraft.*

Für das praktische Aufzeichnen kann man also die Linie $E'F'$ in Fig. 110d ganz fortlassen. Man zieht nur die Linien $A'D'$ und $C'B'$, lotet die Belastungspunkte hinunter und erhält auf

Digitized by Google

diese Weise die gesuchte Einflußlinie $A'G'H'B'$ für indirekte Belastung. Diese Linie gilt dann für alle Schnitte innerhalb des Feldes *1—2*.

In derselben Weise sind in Fig. 110e und f die Einflußlinien für die Momentensummen des Schnittes m bei direkter und bei indirekter Belastung gegenübergestellt. Wer sich das Vorhergehende gründlich überlegt hat, wird die Zeichnungen auch ohne neue Erklärung verstehen.

Ein wichtiger Satz läßt sich aus dem Vergleiche von Fig. 110e und f ablesen: *Für die direkt unter den Belastungspunkten liegenden Querschnitte sind die Einflußlinien für die Momente bei indirekter Belastung gleich denen bei direkter Belastung.* Für die Momente dieser Querschnitte ist also die Art der Lasteinwirkung ohne Bedeutung, ebenso, wie es ja auch bei feststehender Belastung war. Voraussetzung des obigen Satzes ist aber, daß der erste und der letzte Belastungspunkt sich direkt über den Auflagerpunkten A und B des Trägers befinden (vgl. drittes Beispiel des folgenden Paragraphen).

§ 66.

Beispiele für Einflußlinien.

Erste Aufgabe.

Der in Fig. 111a gezeichnete Kranträger ist durch eine Laufkatze von 6,0 t Raddruck und 1,30 m Radstand belastet. Die größten Momente und Querkräfte sind mittels Einflußlinien zu bestimmen!

a) Bestimmung der Momente.

Wir wollen mit den Einflußlinien für die Momente beginnen, da diese einfacher und dabei wichtiger sind als die Einflußlinien für die Kraftsummen. Für die Querschnitte *1*, *2*, ..., *5* des Trägers Fig. 111a mögen nun die größten Momente $M_1, M_2, \ldots, M_5$ aufgesucht werden. Die Belastung wirkt *direkt* auf den Träger.

Für den Schnitt *0* ist die Momentensumme gleich Null, da dieser Schnitt vom Auflager A den Abstand Null hat. (Die Einflußlinie für M_0 würde mit der Nullachse $A''B''$ zusammenfallen.)

Um die Einflußlinie für das Moment M_1 des Querschnittes *1* aufzuzeichnen, ist nach der im vorigen Paragraphen gegebenen Ableitung (Fig. 109c) verfahren: Der Querschnitt *1* hat vom Auflager A den Abstand

$$x_1 = 0{,}90 \text{ m}.$$

Digitized by Google

Von der Nullachse $A''B''$ in Fig. 111b tragen wir also vertikal unter dem Auflagerpunkt A den Wert

$$0{,}90 \text{ m} \cdot 1{,}0 \text{ t} = 0{,}90 \text{ mt}$$

in einem zu wählenden Maßstabe, z. B. 1 cm = 1,0 mt, ab (vgl. Fig. 109 und 110). Dann verbinden wir C'' mit B''. Ferner loten wir den Querschnitt *1* hinunter, bestimmen hierdurch auf der Linie $C''B''$ den Punkt E'' und verbinden diesen mit A''. Dann ist die gebrochene Linie $A''E''B''$ die Einflußlinie für das Moment des Schnittes *1*. (Der dem Punkte D'' von Fig. 109c entsprechende Punkt ist gar nicht aufgezeichnet; sondern dafür ist der Punkt E'' direkt durch Hinunterloten des Querschnittes bestimmt.)

Nachdem die Einflußlinie aufgezeichnet ist, muß diejenige Laststellung aufgesucht werden, bei der für den betrachteten Schnitt *1* die größte Momentensumme entsteht. Bei dieser Arbeit weist die Form der Einflußlinie auf den einzuschlagenden Weg hin: Die Lasten müssen dort aufgestellt werden, wo die Einflußlinie die größten Ordinaten hat. Denn jede Last wird doch später mit ihrer Ordinate multipliziert. Das Resultat wird also um so größer sein, je größer die unter der betreffenden Last befindliche Ordinate der Einflußlinie ist.

Aus dieser einfachen Überlegung folgt ohne weiteres, daß die in Fig. 111b gezeichnete Stellung der beiden Räder für den Schnitt *1* die größte Momentensumme ergeben muß. Das eine Rad steht direkt über der größten Ordinate, die überhaupt bei der Einflußlinie für M_1 vorkommt. Das andere Rad steht dann natürlich in der Entfernung von 1,30 m (Achsenabstand) seitlich von dem ersten.

Nun werden die unter den Lasten befindlichen Ordinaten gemessen. Sie ergeben sich in Fig. 111b zu 0,81 cm und 0,68 cm. Der Maßstab für die Ordinaten (nach dem die Ordinate $A''C'' = 0{,}90$ mt aufgetragen wurde) ist: 1 cm = 1,0 mt. Also bedeuten die obigen beiden Ordinaten 0,81 mt bzw. 0,68 mt.

Zum Schlusse wird dann jede Last mit ihrer Ordinate multipliziert und die Summe dieser Produkte gebildet. Diese Summe stellt das gesuchte Moment M_1 dar. In unserem Falle erhalten wir also:

$$\begin{aligned} M_1 &= 6{,}0 \cdot 0{,}81 \text{ mt} + 6{,}0 \cdot 0{,}68 \text{ mt} \\ &= 6{,}0(0{,}81 + 0{,}68) \\ &= 8{,}94 \text{ mt.} \end{aligned}$$

Hiermit ist die größte Momentensumme des Schnittes *1* bestimmt.

Digitized by Google

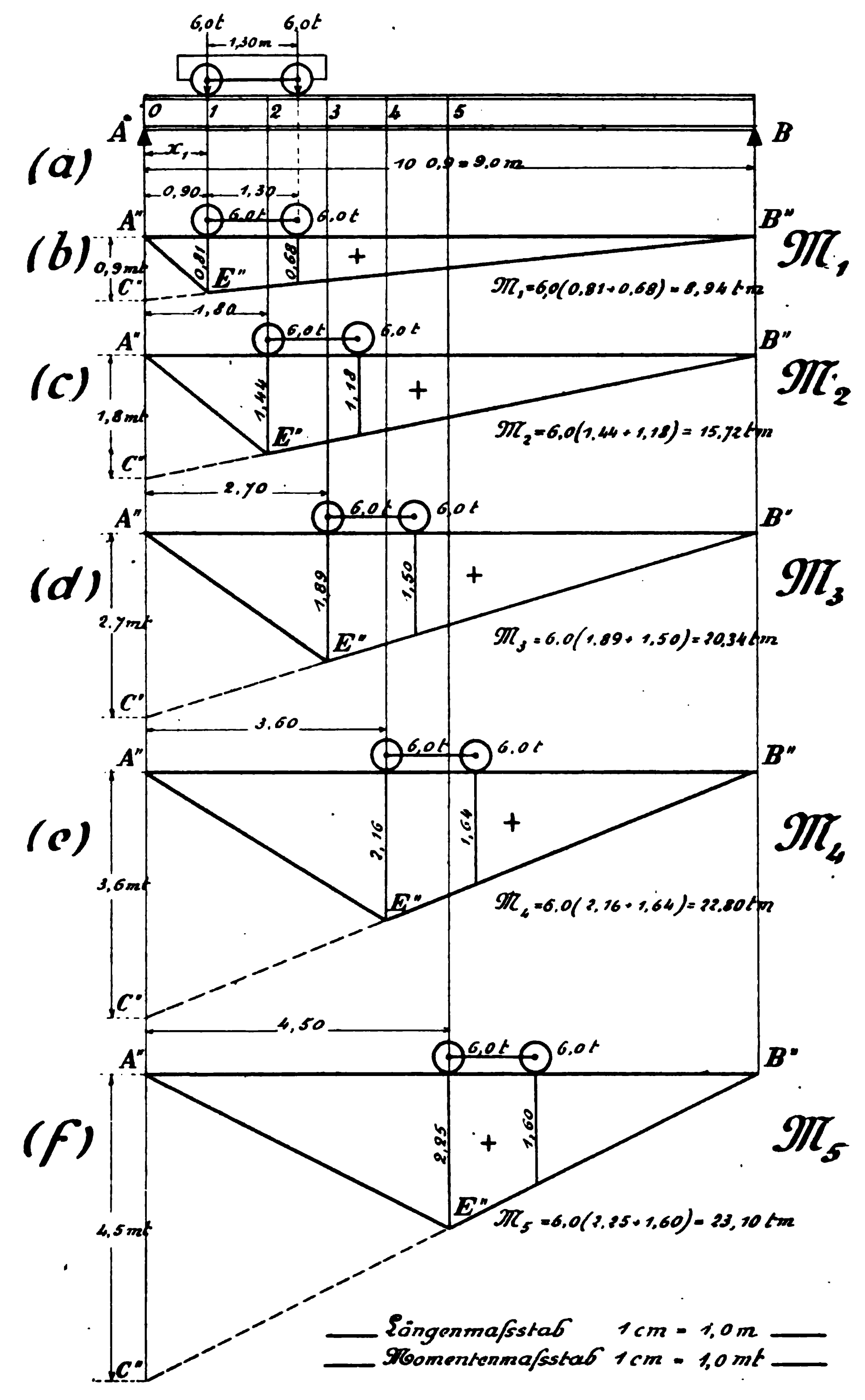


Fig. 111.

Digitized by Google

In derselben Weise sind in Fig. 111c bis f für die übrigen Querschnitte des Trägers die größten Momente bestimmt. Die Arbeit ist stets die gleiche. Erstens: Durch Auftragen der Werte $A''C''$ und Bestimmung der Punkte E'' werden die Einflußlinien $A''E''B''$ gezeichnet. Zweitens: Aus der Form der Einflußlinien wird auf die für den betreffenden Querschnitt gefährliche Laststellung geschlossen. Drittens: Durch Abmessen der Ordinaten der Einflußlinie und Summierung der Produkte „Kraft mal Ordinate" ergibt sich das gesuchte Moment.

Schreibt man Ausrechnung und Resultat direkt unter die betreffende Einflußlinie, wie es in Fig. 111 geschehen ist, so ergibt sich nach dieser Methode eine sehr übersichtliche Darstellung. Es genügt natürlich für den vorliegenden Fall, eine Hälfte des Trägers zu untersuchen. Die rechte Seite ist dann das Spiegelbild der linken.

Übungsaufgabe: Man bestimme für den Träger Fig. 111a für eine Anzahl von Zwischenpunkten die größten Momente und trage unterhalb jedes Schnittes das zugehörige größte Moment von einer Horizontalen aus als Strecke auf. Auf diese Weise bekommt man die „*Kurve der Maximalmomente*". Sie hat eine überraschende Form und ist von der größten Wichtigkeit für unsere folgenden Untersuchungen.

b) *Bestimmung der Kraftsummen.*

Die Einflußlinien für die Kraftsummen der Querschnitte *0*, *1*, ..., *5* des vorhin untersuchten Balkens sind in Fig. 112 dargestellt.

Für den Querschnitt *0* ist die Querkraft gleich dem Auflagerdruck A, da dieser Querschnitt unmittelbar am Auflager liegt. Deshalb ist die Einflußlinie für Q_0 gleichbedeutend mit der Einflußlinie für A. Letztere Einflußlinie ist in Fig. 112b gezeichnet. Aus ihr folgt die daselbst angegebene gefährliche Laststellung und dann — durch Ausrechnung der Produkte Kraft $\times$ Ordinate — der Wert

$$Q_0 = A = 11{,}16 \text{ t}.$$

Um die Einflußlinie für die Kraftsumme des Schnittes *1* zu zeichnen, wurden rechtwinklig zur Horizontalen $A'B'$ in den Punkten A' und B' je die Werte 1,0 t aufgetragen, die Verbindungslinien $A'D'$ und $C'B'$ gezogen und durch Hinunterloten des Schnittes die Trennungslinie $E'F'$ eingezeichnet. Hierdurch entsteht $A'E'F'B'$ als Einflußlinie für die Querkraft des Schnittes *1*.

Digitized by Google

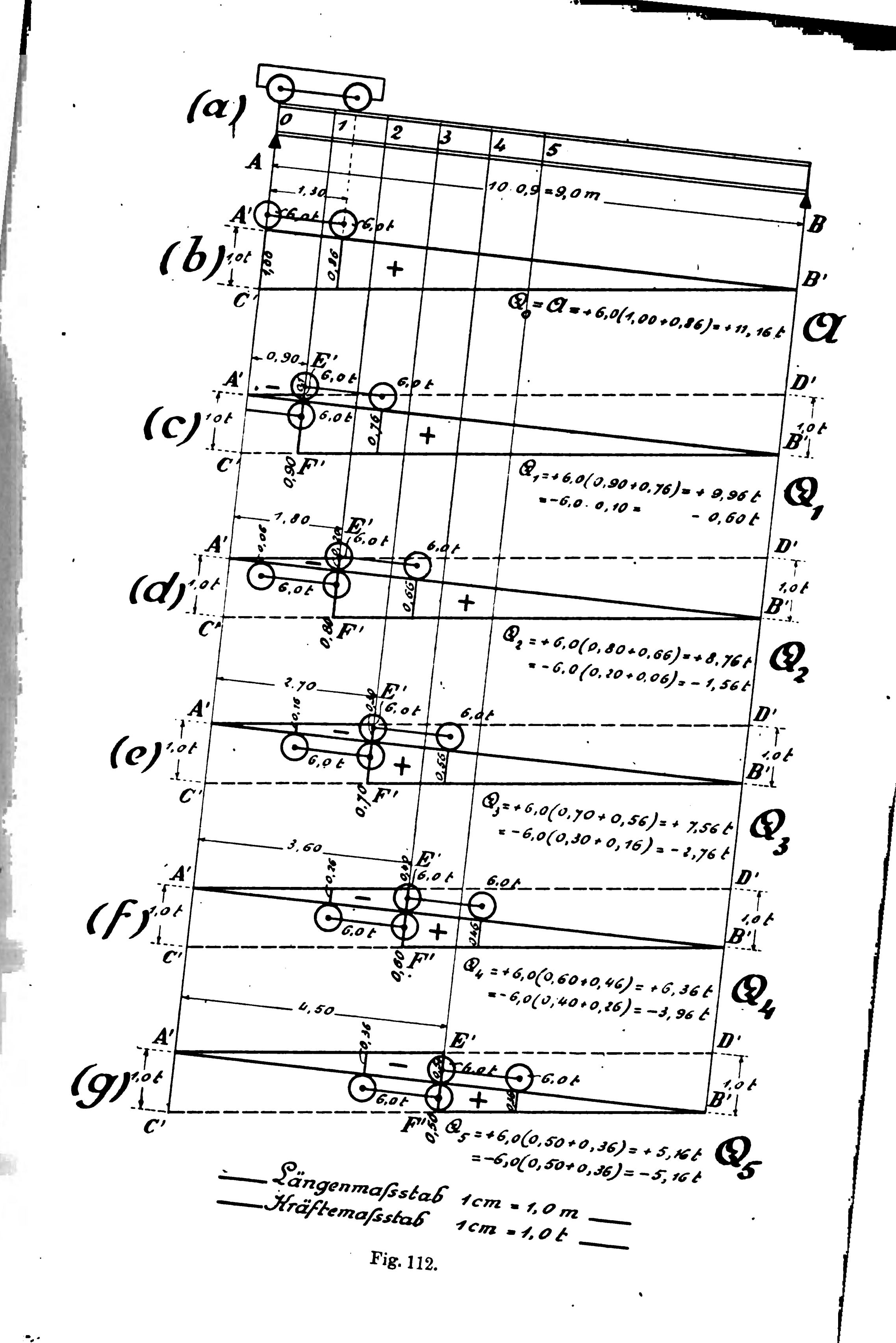


Fig. 112.

Digitized by Google

Nun müssen wir diejenige Laststellung aufsuchen, bei der die Kraftsumme Q_m ihren Größtwert annimmt. Die Einflußlinie für Q_m besteht aus einem positiven und einem negativen Teile. Es wäre natürlich falsch, die Lasten etwa so aufzustellen, daß eine Last im positiven und die andere Last im negativen Teile steht. Denn dann würden sich ja die Ordinaten gegenseitig aufheben, so daß auf keinen Fall der Größtwert von Q erreicht wird. Man muß vielmehr zunächst den positiven Teil der Einflußlinie betrachten und die Lasten so stellen, daß der positive Wert der Kraftsumme so groß wie möglich wird. Diese Stellung ergibt dann in dem Querschnitte die größten Schubspannungen τ in positiver Anordnung (nach Fig. 81a über der Schnittfläche verteilt). Dann stellt man die Lasten so, daß der negative Wert der Kraftsumme so groß wie möglich wird. Diese Stellung liefert die größten Schubspannungen τ in negativer Anordnung. Man sieht also, daß bei der Kraftsumme zwei Größtwerte (nämlich der größte positive und der größte negative Wert) zu ermitteln sind. (Wegen der Schubspannungen τ würden wir uns allerdings nicht so viel Arbeit machen. Man braucht aber die beiden Kraftsummen Q eines Querschnittes auch zur Berechnung von genieteten Trägern und Fachwerkkonstruktionen. Aus diesem Grunde — darauf sei besonders hingewiesen — betrachte man von vornherein Momente und Querkräfte als zwei gleich wichtige Begriffe!)

In Fig. 112c wurde deshalb die Laufkatze zunächst so gestellt, daß die größte positive Kraftsumme entsteht. Die gefährliche Laststellung für diesen Fall folgt aus der Überlegung, daß die größte Ordinate des positiven Teiles bei F' liegt. Die unter den Lasten befindlichen Ordinaten werden aus der Figur zu 0,90 t und 0,76 t gemessen, so daß sich schließlich der eingeschriebene Wert für die größte positive Kraftsumme Q_1 ergibt.

Dann wird der negative Teil der Einflußlinie betrachtet. Die größte Ordinate ist bei E'. Das eine Rad der Katze muß also bei E' stehen. Um in der Figur diese negative Stellung von der vorigen positiven zu unterscheiden, ist jetzt die Last unterhalb der Horizontalen $A'B'$ eingezeichnet. Das zweite Rad der Katze müßte in dem übrigen Teile der negativen Einflußlinie stehen. Aus Fig. 112c sieht man aber, daß es sich dann bereits links vom Auflagerpunkte A befindet, d. h. für den Träger nicht mehr in Betracht kommt. (Kann die Katze infolge der Konstruktion des Trägers diesen nicht verlassen — normaler Kranträger —, so kann für den Schnitt *1* überhaupt keine negative Kraftsumme

Digitized by Google

entstehen. Denn in diesem Falle wird, wie die Einflußlinie zeigt, eine negative Ordinate stets durch eine positive Ordinate aufgehoben.) Die größte negative Kraftsumme ergibt sich nach Fig. 112c zu $-0{,}60$ t.

Um es noch einmal zu wiederholen, die Bedeutung der beiden Grenzwerte $Q = +9{,}96$ t und $Q = -0{,}60$ t ist also folgende: Wie auch die Katze auf dem Träger stehen möge, eine größere positive Kraftsumme als $+9{,}96$ t und eine größere negative als $-0{,}60$ t können bei diesem Träger und dieser Belastung für den Schnitt *1* nicht entstehen. Die Werte $+9{,}96$ t und $-0{,}60$ t geben also den Spielraum an, innerhalb dessen Q_1 sich bewegen kann (ähnlich, wie man bei Temperaturen die größte Anzahl von positiven und negativen Graden angibt).

In entsprechender Weise sind in Fig. 112d—g die Kraftsummen für die Schnitte *2*, ..., *5* ermittelt. Da überall die Werte $A'C' = 1{,}0$ t und $B'D' = 1{,}0$ t aufgetragen werden, unterscheiden sich die einzelnen Einflußlinien nur durch die Lage der Linie $E'F'$, die den positiven von dem negativen Teile trennt. Dann ist bei jeder Einflußlinie die Katze einmal so gestellt, daß man die größte positive Kraftsumme erhält, und dann in die Lage gebracht, die die größte negative Querkraft ergibt. Die Ausrechnungen sind in Fig. 112 hinzugeschrieben. Somit kann man für jeden Querschnitt die größtmöglichen Schubspannungen τ bestimmen.

Übungsaufgabe: Man ermittle für eine Reihe von Zwischenpunkten die größten Kraftsummen und trage sie unter den betreffenden Querschnitten von einer Horizontalen aus auf! Dann erhält man die „*Kurve der größten Querkräfte*".

Zweite Aufgabe.

Für eine eingleisige Eisenbahnbrücke von 16,00 m Spannweite sind die Querkräfte und Momente infolge eines beweglichen Zuges zu ermitteln! (Fig. 113 und 114.)

Die Belastung wirkt indirekt. Sie bestehe aus einer Lokomotive nebst Tender. Die Lokomotive hat 12,00 m Gesamtlänge (zwischen den Puffern gemessen) und wirkt mit fünf Lasten von je 8,50 t. Der Tender hat 6,00 m Gesamtlänge und wirkt mit drei Raddrücken von je 6,50 t. (Diese Belastung ist den Vorschriften der preußischen Staatsbahnen entnommen. Genauere Angaben hierüber s. Band II, § 32.)

Digitized by Google

a) Bestimmung des Auflagerdruckes und der Querkräfte.

In Fig. 113b ist zunächst der Auflagerdruck A mittels Einflußlinie bestimmt. Letztere ist in bekannter Weise gezeichnet. Da hier eine große Anzahl von Lasten vorhanden ist, lohnte es sich, von dem I. Satze des § 23 Gebrauch zu machen: Statt jede Last einzeln mit ihrer Ordinate zu multiplizieren, kann man alle Lasten, die über geraden Stücken der Einflußlinie stehen, zu Resultierenden zusammenfassen und diese mit ihren Ordinaten multiplizieren. Deshalb ist in Fig. 113b die Gruppe der fünf Lokomotivlasten durch ihre Resultierende $5 \cdot 8{,}50$ ersetzt und diese Resultierende mit ihrer Ordinate 0,81 t multipliziert. Entsprechend sind die drei Tenderlasten zu einer Resultierenden zusammengefaßt. Hiermit ergibt sich für den Auflagerdruck A der in Fig. 113b ausgerechnete Wert. Ein größerer Auflagerdruck als 39,3 t kann also bei dieser Brücke und bei der vorgeschriebenen Belastung nicht entstehen.

In den Fig. 113c—g sind die Einflußlinien für die Querkräfte gezeichnet. Da die Belastung indirekt wirkt, sind die Einflußlinien entsprechend Fig. 110d entworfen: Zunächst werden die Werte 1,0 t aufgetragen, dann die beiden parallelen, schrägen Linien $A'D'$ und $C'B'$ gezeichnet und schließlich wird die Verbindungslinie $G'H'$ eingetragen (vgl. Fig. 113d). Zu jedem der Felder *0—1*, *1—2*, *2—3*, *3—4* und *4—4'* gehört eine besondere Einflußlinie für die Querkraft. Die Fig. 113c—d zeigen deutlich, daß sich diese Einflußlinien für die verschiedenen Felder nur durch die Lage der schrägen Strecke $G'H'$ unterscheiden.

Nachdem dann die Einflußlinien gezeichnet sind, sind die Lasten einmal so gestellt, daß sie für die Kraftsumme des betreffenden Feldes den größten positiven Wert ergeben, und dann so, daß der größte negative Wert herauskommt. Hinsichtlich der gefährlichen Laststellungen ergab sich hierbei folgendes: **Die größte positive Kraftsumme eines Feldes entsteht bei der vorliegenden Brücke dann, wenn die Lasten vom rechten Auflager her bis zu dem *rechten* Querträger dieses Feldes vorgerückt sind. Die größte negative Querkraft des untersuchten Feldes entsteht dann, wenn die Lasten von links her bis zu dem *linken* Querträger dieses Feldes vorgerückt sind. Man nennt diese beiden Stellungen die „*Grundstellungen*" des betreffenden Feldes. Wir wollen uns merken, daß in den meisten Fällen die größten Querkräfte (positiv und negativ) eines Feldes dann entstehen, wenn die Lasten in positiver bzw. negativer Grundstellung stehen.**

Digitized by Google

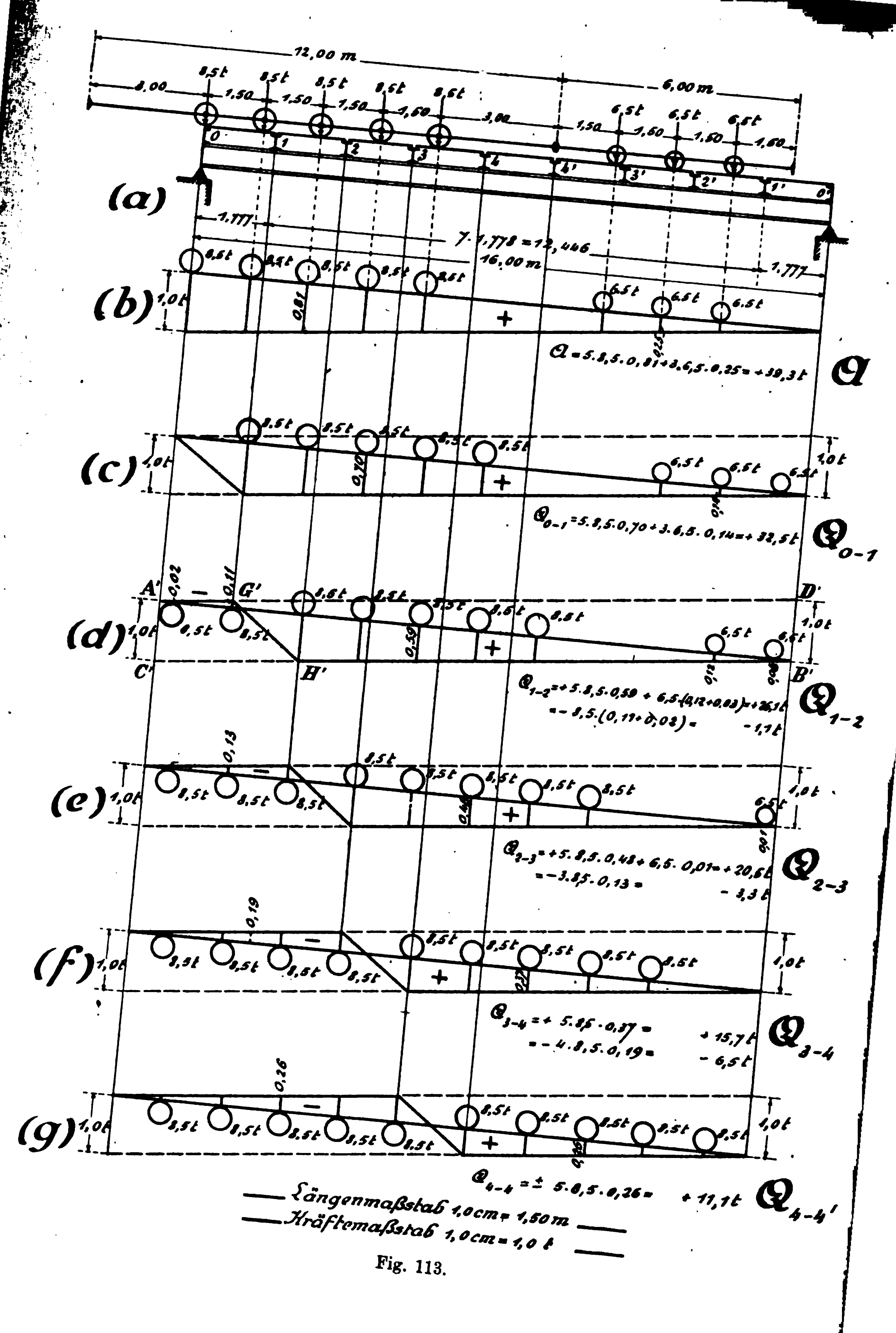


Fig. 113.

Digitized by Google

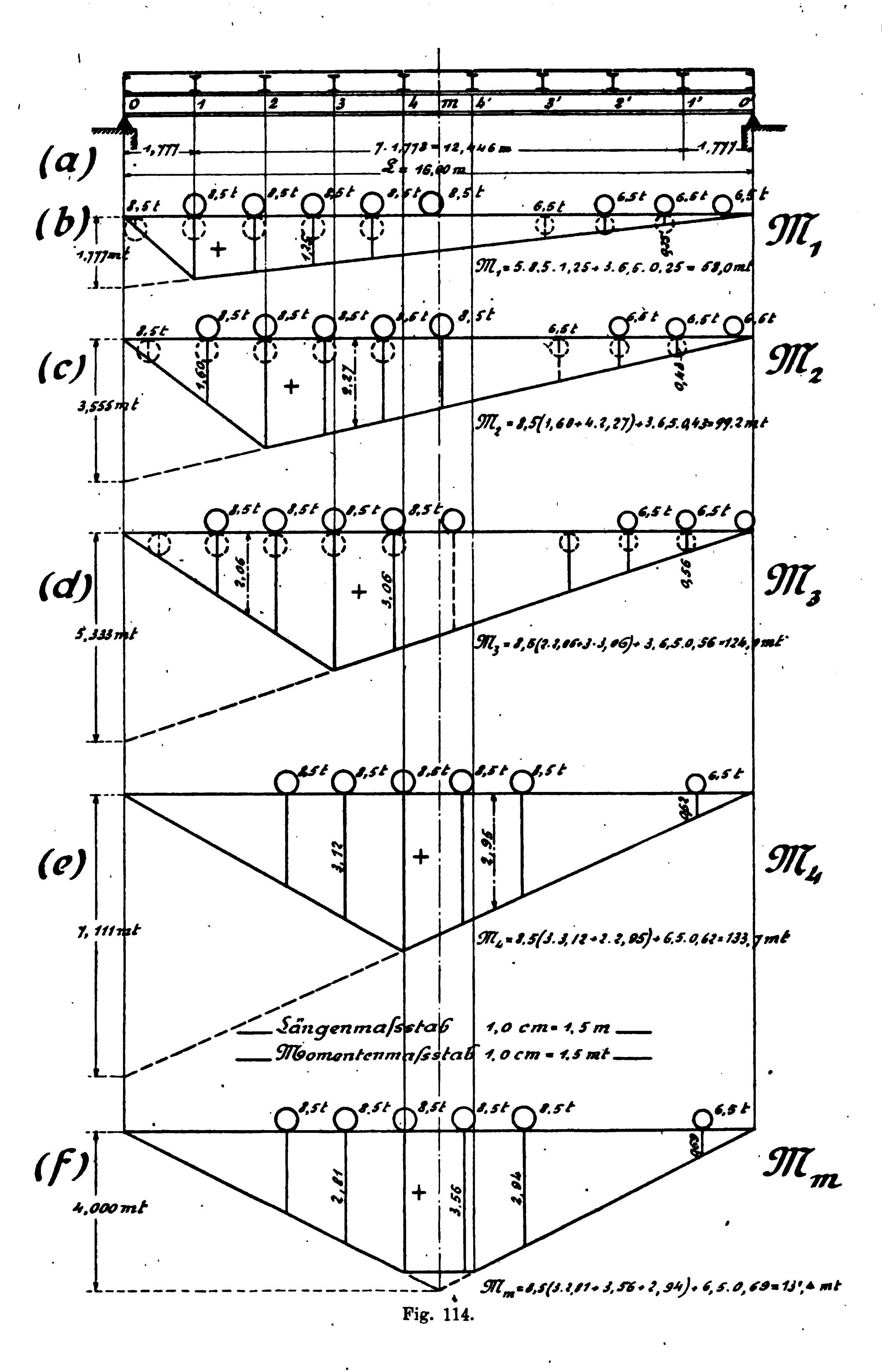


Fig. 114.

Digitized by Google

Die Ausrechnung der Werte der größten positiven und der größten negativen Kraftsummen der einzelnen Felder ist genau so durchgeführt wie bei der vorigen Aufgabe und wird ohne nochmalige Erklärung verständlich sein.

b) Bestimmung der Momente.

Die Momente ändern sich nicht nur von Feld zu Feld, sondern von Punkt zu Punkt. Um ein absolut genaues Bild von den größten Momentensummen zu erhalten, müßte man also theoretisch sämtliche Querschnitte des Balkens untersuchen. Natürlich ist dieses praktisch unmöglich. Man begnügt sich, einzelne Punkte herauszugreifen und nur für diese die größten Momentensummen zu bestimmen.

In Fig. 114 sind die Querschnitte *1*, *2*, *3*, *4* und *m* untersucht. (Für Querschnitt *o* ist die Momentensumme gleich Null.) Die Einflußlinien sind nach Fig. 110f entworfen: Zunächst sind sie für direkte Belastung gezeichnet und dann durch Hinunterloten der Belastungspunkte für indirekte Belastung gültig gemacht. Hierbei ergibt sich nur für den Querschnitt *m* ein Unterschied zwischen den Einflußlinien bei direkter und indirekter Belastung. Für die anderen Querschnitte, die direkt unter den Belastungspunkten liegen, ist kein Unterschied vorhanden.

Nach Aufzeichnen der Einflußlinien werden die gefährlichen Laststellungen aufgesucht. Im allgemeinen muß man hier einige Stellungen ausprobieren, um zu entscheiden, bei welcher die größte Momentensumme entsteht. Deshalb findet man auch in Fig. 114 b—d zwei Stellungen eingezeichnet: eine oberhalb und die andere unterhalb der Horizontalen. Durch Vergleich der Ordinaten mittels Stechzirkel kann man leicht die maßgebende Stellung auffinden, da ja ein Teil der Ordinaten sich beim Verschieben des Zuges nicht ändert, so daß es sich immer nur um den Vergleich einiger weniger Ordinaten handelt. Hat man dann durch Probieren die ungünstigste Stellung bestimmt, so wird das sich ergebende Resultat in der bekannten Weise neben die Einflußlinie hingeschrieben. Beim Ausrechnen der Produkte: Last mal Ordinate sind die einzelnen Kraftgruppen natürlich durch ihre Resultierenden ersetzt.

Zum leichteren Auffinden der gefährlichen Laststellungen sei noch einiges hinzugefügt: Über den tiefsten Knickpunkt einer Einflußlinie stelle man stets eine Last, und zwar eine möglichst schwere, auf. Die übrigen Lasten gruppiere man möglichst über den *großen* Ordinaten. In § 68 wird noch eine allgemeine Regel

Digitized by Google

abgeleitet werden, um die gefährliche Laststellung mathematisch zu bestimmen. Besser und einfacher ist es aber, die maßgebende Stellung durch Probieren zu finden, so wie es auch in Fig. 114 b—d angedeutet ist.

Übungsaufgabe: Bestimme für eine Eisenbahnbrücke von $6 \cdot 2{,}50 = 15{,}00$ m Stützweite die größten Kraft- und Momentensummen!

Dritte Aufgabe.

Für die in Fig. 115 und 116 gezeichnete Straßenbrücke sind die größten Querkräfte und Momentensummen zu bestimmen!

Die Belastung greift indirekt an. Sie besteht aus zwei Einzellasten (Straßenwalze) und anschließender verteilter Belastung (Menschengedränge). Die Belastungspunkte sind *0*, *1*, *2*, *3*, *4* und *5*. Denn eine Last, die sich zwischen den Punkten *0* und *5* befindet, kommt für den Träger *H* zur Wirksamkeit, und zwar wird sie an den Stellen *0*, *1*, . . ., *5* von den Längsträgern auf die Hauptkonstruktion übertragen.

Die Einflußlinien für die Querkräfte der Felder *a—1*, *1—2* und *2—3* des Trägers *H* sind in Fig. 115 b—d aufgetragen. Zunächst sind die beiden schrägen, parallelen Linien gezeichnet, entsprechend der Einflußlinie für direkte Belastung; dann sind die Belastungspunkte hinuntergelotet und schließlich die Endpunkte der hierdurch bestimmten Ordinaten durch gerade Linien verbunden. Hierdurch entstehen dann die Einflußlinien für die vorliegende indirekte Lastübertragung. In Fig. 115 c—d sind sie stark gezeichnet, während die Hilfslinien punktiert dargestellt sind.

Nach Aufzeichnung der Einflußlinien werden die Lasten in die ungünstigsten Stellungen gebracht. Man erkennt leicht aus der Form der Einflußlinien, wie die Lasten anzuordnen sind, um die gesuchten größten Querkräfte für die betreffenden Felder zu erzielen. Bei Ausrechnung der Produkte: Kraft mal Ordinate tritt bei der vorliegenden Aufgabe insofern etwas Neues auf, als außer den Einzellasten auch verteilte Belastung vorkommt. Aus § 23, II. Satz, wissen wir jedoch, wie in diesem Falle zu verfahren ist: Wir multiplizieren die Belastung pro Längeneinheit mit dem Inhalte der unter der Belastung liegenden Einflußfläche. Somit ergeben sich für die Kraftsummen der Felder *a—1*, *1—2* und *2—3* folgende Werte:

Digitized by Google

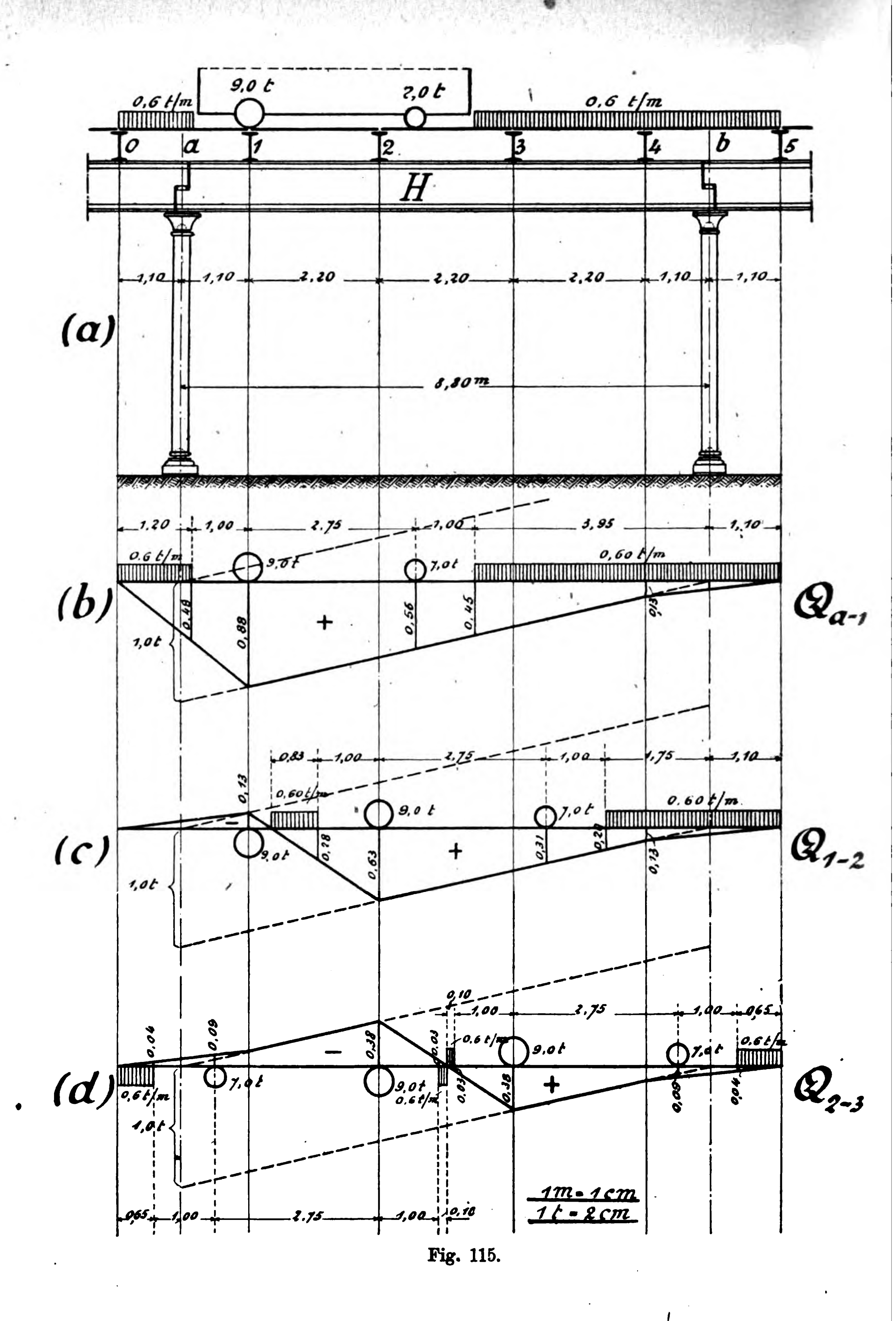


Fig. 115.

Digitized by Google

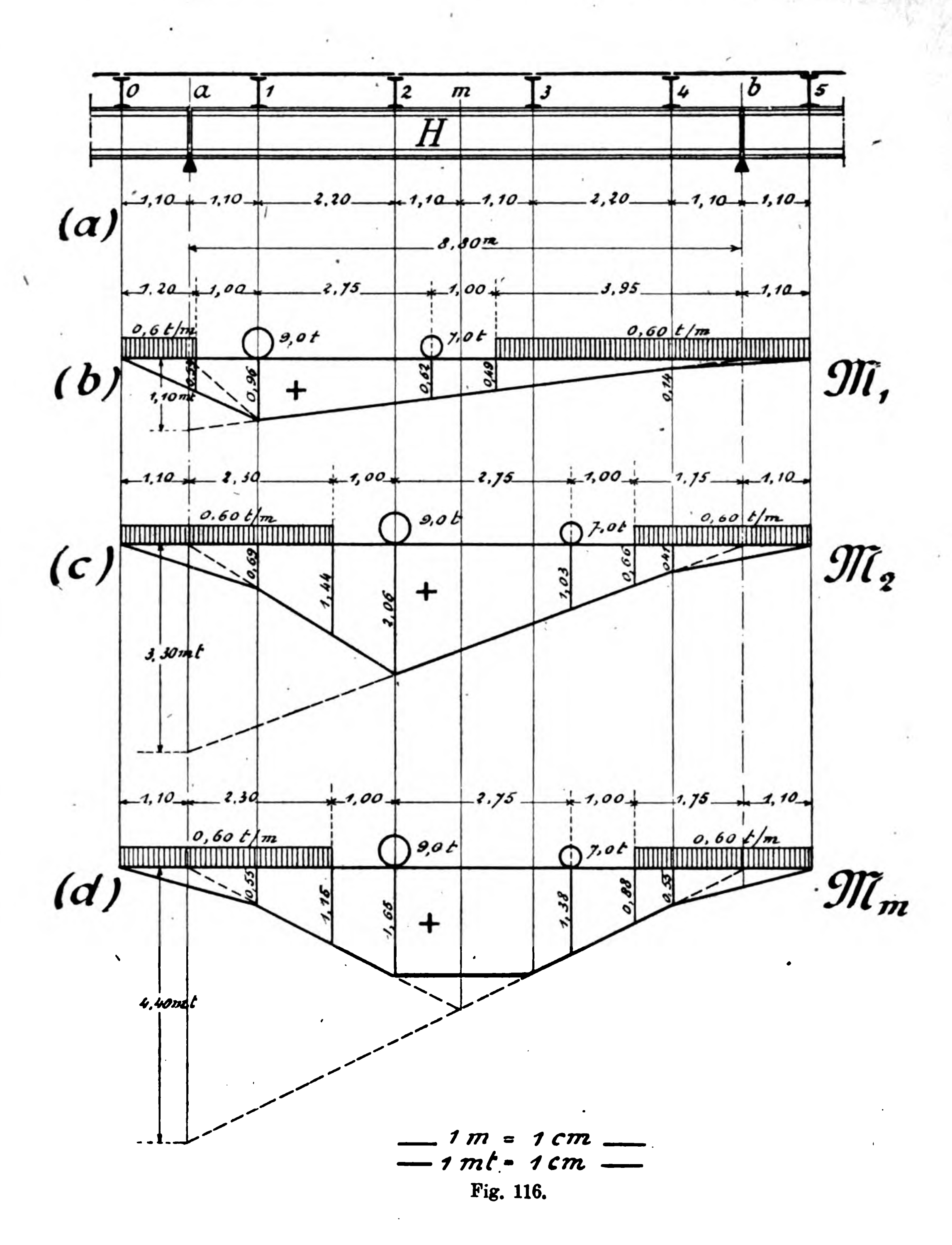


Fig. 116.

Digitized by Google

$$Q_{a-1} = +9{,}0 \cdot 0{,}88 + 7{,}0 \cdot 0{,}56 + 0{,}60 \left(\frac{1{,}20 \cdot 0{,}48}{2} + \frac{3{,}95 \cdot 0{,}45}{2} + \frac{1{,}10 \cdot 0{,}13}{2}\right)$$
$$= +12{,}6 \text{ t},$$
$$Q_{1-2} = +9{,}0 \cdot 0{,}63 + 7{,}0 \cdot 0{,}31 + \frac{0.60}{2}(0{,}83 \cdot 0{,}28 + 1{,}75 \cdot 0{,}20 + 1{,}10 \cdot 0{,}13)$$
$$= +8{,}1 \text{ t}$$

bzw.

$$Q_{1-2} = -9{,}0 \cdot 0{,}13 = -1{,}2 \text{ t},$$
$$Q_{2-3} = +9{,}0 \cdot 0{,}38 + 7{,}0 \cdot 0{,}09 + \frac{0{,}60}{2}(0{,}10 \cdot 0{,}03 + 0{,}65 \cdot 0{,}04) = +4{,}1 \text{ t}$$

bzw.

$$Q_{2-3} = -4{,}1 \text{ t}.$$

Man sieht, daß bei der Strecke *a—1* die Schubspannungen nur in positiver Anordnung auftreten können, während sie innerhalb der Felder *1—2* und *2—3* je nach der Laststellung positiv oder negativ auftreten.

In Fig. 116b—d sind in entsprechender Weise die größten Momente der Querschnitte *1*, *2* und *m* ermittelt. Es ergeben sich folgende Resultate:

$$M_1 = 9{,}0 \cdot 0{,}96 + 7{,}0 \cdot 0{,}62 + \frac{0{,}60}{2}(1{,}20 \cdot 0{,}53 + 3{,}95 \cdot 0{,}49 + 1{,}10 \cdot 0{,}14)$$
$$= 13{,}8 \text{ mt},$$
$$M_2 = 9{,}0 \cdot 2{,}06 + 7{,}0 \cdot 1{,}03 + \frac{0{,}60}{2}(2{,}30 \cdot 1{,}44 + 1{,}10 \cdot 0{,}69 + 1{,}75 \cdot 0{,}66 + 1{,}10 \cdot 0{,}41)$$
$$= 27{,}5 \text{ mt},$$
$$M_3 = 9{,}0 \cdot 1{,}65 + 7{,}0 \cdot 1{,}38 + \frac{0{,}60}{2}(2{,}30 \cdot 1{,}15 + 1{,}10 \cdot 0{,}55 + 1{,}75 \cdot 0{,}88 + 1{,}10 \cdot 0{,}55)$$
$$= 26{,}1 \text{ mt}.$$

Diese Momente sind sämtlich positiv, da bei einem Träger zwischen zwei Stützpunkten (ohne überkragende Enden) die Einflußlinie für die Momentensumme nur positiv ist.

Übungsaufgabe: Man nehme, bei derselben Querträgeranordnung und Belastung, die Spannweite der Brücke zu 12,00 m und bestimme die größten Querkräfte und Momente!

§ 67.

Zusammenfassung zu den Einflußlinien.

Der **allgemeine Arbeitsgang** bei den Einflußlinien ist stets folgender: 1. Aufzeichnung der betreffenden Einflußlinie; 2. Hinstellung der Belastung; 3. Multiplikation aus Last $\times$ Ordinate. Nach diesem Schema wird jede Einflußlinie behandelt.

An Besonderheiten ist noch folgendes zu merken:

I. Die Verschiedenheit der einzelnen Querschnitte.

a) Zu jedem Querschnitte gehört eine besondere Einflußlinie für die **Momentensumme**, gleichgültig, ob die Belastung direkt oder indirekt angreift. (Denn die Abstände x_m der einzelnen Quer-

Digitized by Google

schnitte sind verschieden, folglich auch die aufzutragenden Werte $x_m \cdot 1{,}0$; s. Fig. 110e.) Da man natürlich nicht alle Querschnitte des Balkens untersuchen kann, greift man eine Anzahl von Punkten heraus und bestimmt deren größte Momente. Falls indirekte Belastung vorliegt, wählt man zweckmäßig die unter den Belastungspunkten liegenden Querschnitte.

b) Bei *direkter* Belastung gehört ferner zu jedem Querschnitte eine besondere Einflußlinie für die **Querkraft** (da die Trennungslinie $E'F'$ in Fig. 110c für die verschiedenen Querschnitte verschieden liegt). Bei *indirekter* Belastung haben aber alle Querschnitte ein und desselben Feldes die gleiche Kraftsumme (denn die Einflußlinie für Q ist für alle Querschnitte eines Feldes die gleiche). Im letzteren Falle spricht man deshalb von der „Querkraft eines Feldes".

Zeichnet man bei einem Balken für zwei Querschnitte m und n, die zu verschiedenen Seiten, aber in gleichem Abstande von der vertikalen Mittellinie des Balkens liegen, die Einflußlinien, so ersieht man folgendes: Der positive Teil der Einflußlinie von Q_m ist gleich dem negativen Teil von Q_n, und umgekehrt. Die größte *positive* (bzw. negative) Kraftsumme eines Querschnittes ist also gleich der größten *negativen* (bzw. positiven) Kraftsumme des zu ihm spiegelbildlich gelegenen Schnittes.

II. Vorzeichen und gefährliche Laststellungen.

a) Die Einflußlinie für das **Moment** eines Querschnittes hat in ihrer ganzen Länge ein und dasselbe Vorzeichen (vorausgesetzt, daß der Träger nicht über die Auflagerpunkte hinauskragt). Um den Größtwert des Momentes zu erzielen, wird man also die ganze Strecke zwischen den Auflagern mit Lasten bestellen („**Vollbelastung**"). Die größte Last muß möglichst über der größten Ordinate der Einflußlinie stehen. (Bei direkter Belastung also unmittelbar über dem Querschnitte; bei indirekter Belastung über dem dem Querschnitte zunächstliegenden Belastungspunkte.)

b) Die Einflußlinie für die **Querkraft** eines Querschnittes ist in ihrem rechten Teile positiv, im linken Teile negativ. Für die Kraftsumme müssen also *zwei* Größtwerte angegeben werden: Der größte positive Wert entsteht dann, wenn die Lasten hauptsächlich auf der Strecke rechts vom Querschnitte bis zum Auflager B stehen. Die größte negative Kraftsumme wird hervorgerufen durch Belastung des Balkenteiles links vom Querschnitte bis zum Auflager A („**Teilbelastungen**"). Bei direkter Belastung müssen die

Digitized by Google

Lasten von der betreffenden Seite her meistens unmittelbar bis zu dem Querschnitte vorgeschoben werden; bei indirekter Belastung meistens nur bis zu den dem Querschnitte benachbarten Belastungspunkten. Es kommt aber auch vor, daß die Lasten noch weiter verschoben werden müssen. (Wenn vorn eine kleine Einzellast steht, kann man durch weiteres Verschieben *größere* dahinterstehende Lasten auf größere Ordinaten der Einflußlinie bringen.)

Im Prinzip merke man aber: Das größte Moment eines Querschnittes entsteht bei Vollbelastung; die größte positive bzw. negative Querkraft entsteht bei rechtsseitiger bzw. linksseitiger Teilbelastung. *Vollbelastung ist nicht maßgebend für die Querkraft eines Schnittes oder eines Feldes.*

III. Maßstäbe.

Wir haben drei zu wählende Maßstäbe: a) den Längenmaßstab zum Auftragen des Balkens und der Abstände der Lasten voneinander; b) den Kräftemaßstab zum Auftragen und Abmessen der Ordinaten der Einflußlinien für Q; c) den Momentenmaßstab zum Auftragen und Abmessen der Ordinaten der Einflußlinien für M.

Man nehme für die Längenabmessungen m (oder cm), für die Ordinaten der Kraftsummen t (oder kg), für die Ordinaten der Momentensummen mt (oder cmkg). Dann sind die Einzellasten in t (oder kg) und eine verteilte Belastung in t/m (oder kg/cm) einzuführen. Man hüte sich davor, im Laufe einer Rechnung ein und dieselbe Größe in verschiedenen Maßstäben zu nehmen!

§ 68.

Zweite Methode: Analytische Bestimmung von Q und M.

Die Schwierigkeit bei der Ermittlung von Kraft- und Momentensummen infolge einer Gruppe *beweglicher* Lasten besteht in der Aufsuchung der „gefährlichen Laststellung“. Die Einflußlinien haben den großen Vorteil, daß sie durch ihre Form hinweisen, wie man die Lasten aufstellen muß, um für die betreffende Kraft- bzw. Momentensumme den Größtwert zu erhalten. Im folgenden möge nun eine Methode abgeleitet werden, um auf rechnerischem Wege die „gefährlichen Laststellungen“ aufzufinden und die betreffenden größten Querkräfte und Momente zu bestimmen. Während aber die Einflußlinien für jede Belastungsart geeignet sind, paßt das rechnerische Verfahren hauptsächlich nur für gewisse, im folgenden zu besprechende Belastungsfälle.

Digitized by Google

Erster Belastungsfall: Direkt wirkende Einzellasten.

I. Bestimmung der Querkräfte.

Wir wissen aus § 65, daß eine Last *rechts* von einem Schnitte m eine *positive* und eine Last *links* vom Schnitte eine *negative* Querkraft Q_m hervorbringt. Um also die *größte positive* Querkraft zu erhalten, müssen soviel Lasten wie möglich auf der Strecke $\overline{mB}$ aufgestellt werden (Fig. 117a). Innerhalb dieser Strecke werden wir die Lasten aber möglichst nach links rücken, weil $Q = +A$ ist und der Auflagerdruck A um so größer ist, je näher die Lasten diesem Auflager sind. Wir kommen durch diese Überlegung zu der Laststellung (Fig. 117a) und wollen nun mathematisch untersuchen, ob diese Stellung wirklich den größten Wert von Q_m hervorruft oder ob er bei einer anderen Stellung auftreten wird.

In den Fig. 117b und c ist der Fall dargestellt, daß der Zug weiter vorgerückt ist, und zwar ist in Fig. 117c das Lastensystem

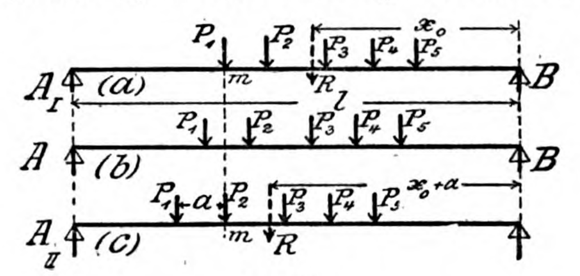


Fig. 117.

so weit vorgeschoben, daß jetzt die zweite Last über m steht. Vergleicht man zunächst Fig. 117b mit Fig. 117c, so ist in beiden Stellungen die Querkraft Q_m gleich dem Auflagerdruck A vermindert um die erste Last, P_1. Nun ist aber A in Fig. 117c größer als in Fig. 117b (da die Lasten näher am Auflager A stehen); folglich ist auch die Querkraft in Fig. 117c größer als in Fig. 117b. Da wir die *größte* Querkraft aufsuchen wollen, so scheidet also die Laststellung nach Fig. 117b aus, und es bleibt nur zu untersuchen, ob Fig. 117c oder Fig. 117a ein größeres Q ergeben wird.

In Fig. 117a ist

$$\text{(I)} \qquad Q_I = +A_I = +R \cdot \frac{x_0}{l},$$

wobei zur Berechnung des Auflagerdruckes A die fünf Lasten durch ihre Ersatzkraft $R = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5$ ersetzt sind. In Fig. 117c ist

$$\text{(II)} \qquad Q_{II} = +A_{II} - P_1 = +R \cdot \frac{x_0 + a}{l} - P_1.$$

(Hier ist das Lastensystem, und also auch seine Ersatzkraft, um a nach links gerückt.) Der Auflagerdruck A ist gewachsen; dafür müssen wir aber die erste Kraft, P_1, abziehen, da diese jetzt links vom Schnitte liegt. Der Unterschied zwischen Q_{II} und Q_I ergibt sich, indem wir Q_I von Q_{II} subtrahieren:

$$Q_{II} - Q_I = \left[R\left(\frac{x_0}{l} + \frac{a}{l}\right) - P_1\right] - R\frac{x_0}{l},$$

$$\text{(III)} \qquad Q_{II} - Q_I = R \cdot \frac{a}{l} - P_1 .$$

Hieraus ist nun folgendes zu ersehen: Ist

$$R \cdot \frac{a}{l} \quad \textit{größer} \text{ als } \quad P_1,$$

so steht auf der rechten Seite der obigen Gleichung ein *positiver* Wert. Folglich ist auch $Q_{II} - Q_I$ ein *positiver* Wert, d. h. es ist Q_{II} *größer* als Q_I.

Ist aber

$$R \cdot \frac{a}{l} \quad \textit{kleiner} \text{ als } \quad P_1,$$

so ist $Q_{II} - Q_I$ ein *negativer* Wert, d. h. in diesem Falle ist Q_{II} *kleiner* als Q_1. Auf diese Weise können wir entscheiden, ob wir in Fig. 117a oder in Fig. 117c eine größere Querkraft erhalten.

Die Stellung Fig. 117a heißt die „*Grundstellung*", die Stellung Fig. 117c die „*vorgezogene Stellung*". Wir werden später sehen, daß bei direkt wirkender Belastung die größte Kraftsumme eines Querschnittes fast immer bei Grundstellung entsteht.

Hat man nun entschieden, ob für den betreffenden Querschnitt die „Grundstellung" oder die „vorgezogene Stellung" die größere Kraftsumme ergibt, so ist es ein leichtes, den betreffenden Wert Q_m selbst zu berechnen: Im ersteren Falle ist Q_m direkt gleich dem Auflagerdruck A_I (A_I = Auflagerdruck bei Grundstellung); im zweiten Falle ist Q_m gleich dem Auflagerdruck A_{II} vermindert um die Last P_1 (A_{II} = Auflagerdruck bei vorgezogener Stellung).

II. Bestimmung der Momente.

Während wir bei den Querkräften je nach der Laststellung einen positiven oder einen negativen Wert bekamen, stellte sich bei der Untersuchung der Momente heraus, daß eine Last rechts vom Schnitte ein positives Moment und eine Last links vom Schnitte ebenfalls ein positives Moment ergibt. Wir werden also,

Digitized by Google

um für m (Fig. 118a) das größte Moment zu erhalten, die Lasten nicht einseitig (wie bei der Querkraftbestimmung), sondern möglichst symmetrisch zu dem Schnitte aufstellen und wollen ein mathematisches Kennzeichen für die Stellung, bei der der Maximalwert von M auftritt, ableiten. In Fig. 118a ist das Moment der Stelle m:

$$M_I = +A_I \cdot x_m - P_1 \cdot p_1 - P_2 \cdot p_2 ,$$

$$M_I = +R\frac{x_0}{l} \cdot x_m - P_1 \cdot p_1 - P_2 \cdot p_2 .$$

Verschieben sich nun die Lasten um eine beliebige Strecke, β, nach links, so wird das Moment für den Punkt m (Fig. 118b):

$$M_{II} = +A_{II} \cdot x_m - P_1(p_1 + \beta) - P_2(p_2 + \beta) - P_3 \cdot \beta ,$$

$$M_{II} = +R\frac{x_0 + \beta}{l} \cdot x_m - P_1(p_1 + \beta) - P_2(p_2 + \beta) - P_3 \cdot \beta .$$

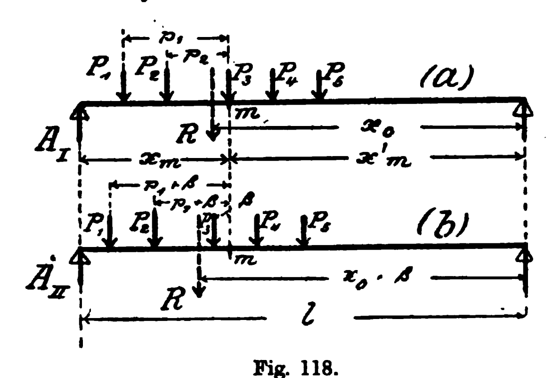


Fig. 118.

Um zu entscheiden, ob M_{II} größer oder kleiner ist als M_I, bilden wir wieder den Unterschied zwischen M_{II} und M_I:

$$M_{II} - M_I = \left(+R\frac{x_0}{l} \cdot x_m + R\frac{\beta}{l} \cdot x_m - P_1 p_1 - P_1 \beta - P_2 p_2 - P_2 \beta - P_3 \beta\right) - \left(+R\frac{x_0}{l} \cdot x_m - P_1 p_1 - P_2 p_2\right),$$

$$M_{II} - M_I = +R\frac{\beta}{l} \cdot x_m - P_1 \beta - P_2 \beta - P_3 \beta = \beta\left[+R\frac{x_m}{l} - (P_1 + P_2 + P_3)\right].$$

Hieraus folgt: Ist

$$R\frac{x_m}{l} > (P_1 + P_2 + P_3) ,$$

Digitized by Google

so ist der Unterschied zwischen M_{II} und M_I positiv, d. h. es ist $M_{II} > M_I$.

Ist aber

$$R\frac{x_m}{l} < (P_1 + P_2 + P_3),$$

so ist $M_{II} < M_I$.

Hiermit ist entschieden, ob durch eine Lastverschiebung nach *links* das ursprüngliche Moment des Punktes *m* (Fig. 118a) vergrößert oder verkleinert werden würde. Genau so wird untersucht, welche Wirkung eine Verschiebung nach *rechts* hätte: Ist

$$R\frac{x'_m}{l} > (P_5 + P_4 + P_3),$$

so gibt die nach rechts verschobene Stellung ein größeres Moment als Fig. 118a, und ist

$$R\frac{x'_m}{l} < (P_5 + P_4 + P_3),$$

so ergibt die nach rechts verschobene Stellung ein kleineres M_m. Wenn also die beiden Bedingungen: $R\frac{x_m}{l} < (P_1 + P_2 + P_3)$ und $R\frac{x'_m}{l} < (P_5 + P_4 + P_3)$ erfüllt sind, darf die Belastung weder nach links noch nach rechts verschoben werden, ***dann entsteht bei der Stellung Fig. 118a das größte Moment M_m.*** **Ist aber eine von den beiden Bedingungen nicht erfüllt, so muß eine neue Stellung angenommen und diese dann in derselben Weise untersucht werden.**

Sobald dann die für das Moment M_m „gefährliche Laststellung" bestimmt ist, wird der Wert von M_m in derselben Weise ermittelt wie bei feststehender Belastung.

Zweiter Belastungsfall: Indirekt wirkende Einzellasten.

I. Querkräfte.

Zunächst werde daran erinnert, daß bei indirekter Belastung alle Schnitte, die innerhalb ein und desselben Feldes liegen, die gleiche Querkraft haben (§ 67, I). Es sei nun z. B. für das Feld *u—v* von Fig. 118° die größte Querkraft zu bestimmen.

Wir beginnen mit „Grundstellung" dieses Feldes (d. h. die Lasten nur einseitig vom Felde; Fig. 118°a). Hierfür ist die Querkraft:

$$Q_I = A_I = \frac{Rx_0}{l}.$$

Digitized by Google

Rückt nun der Zug in die vorgezogene Stellung (Fig. 118°b), so daß sich das ganze Belastungsschema um a verschiebt, so übt die erste Kraft, P_1, einen Druck $P' = P_1 \frac{a}{\lambda}$ auf den Querträger u aus. Wir haben also jetzt links von m *zwei* Kräfte, nämlich A_{II} und P', von denen die eine aufwärts und die andere abwärts wirkt. In Fig. 118°b ist demnach die Summe aller Kräfte links vom m:

$$Q_{II} = A_{II} - P' = A_{II} - P_1 \frac{a}{\lambda}$$

$$= R \frac{x_0 + a}{l} - P_1 \frac{a}{\lambda}.$$

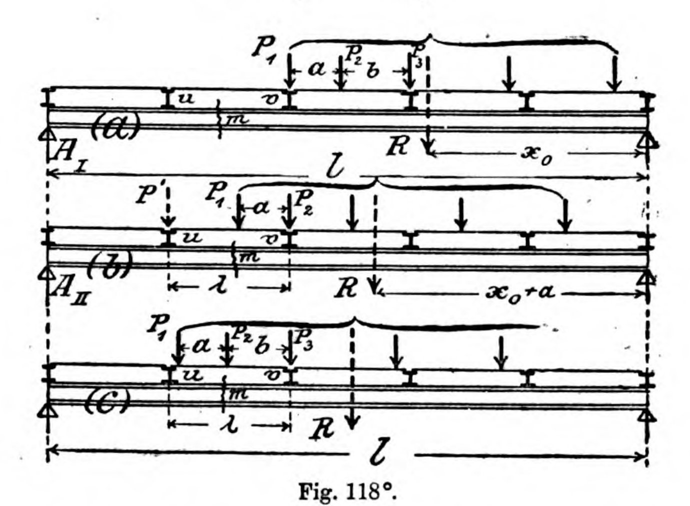


Fig. 118°.

Durch das Vorschieben der Lasten hat demnach die Querkraft zugenommen um

$$Q_{II} - Q_I = R \frac{a}{l} - P_1 \frac{a}{\lambda}.$$

Ist nun

$$R \frac{a}{l} \text{ größer als } P_1 \frac{a}{\lambda},$$

so ist die Zunahme der Querkraft positiv. Ist aber

$$R \frac{a}{l} \text{ kleiner als } P_1 \frac{a}{\lambda},$$

dann ist der Zuwachs negativ; dann ist also die Querkraft in vorgezogener Stellung (Fig. 118°b) kleiner als in Grundstellung (Fig. 118°a). Kürzen wir die obigen Ausdrücke noch durch a, so erhalten wir nach einer einfachen Umformung die beiden Fälle:

Digitized by Google

$$
\text{(IV)} \quad \begin{cases} \text{a)}\ R < P_1 \dfrac{l}{\lambda}: & \textit{Grundstellung ergibt größere Querkraft;} \\ \text{b)}\ R > P_1 \dfrac{l}{\lambda}: & \textit{vorgezogene St.} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \; . \end{cases}
$$

Hierin ist R gleich der Summe aller Lasten, die sich bei Grundstellung auf der Brücke befinden.

Falls die Bedingung (IVb) erfüllt ist, d. h. falls vorgezogene Stellung maßgebend ist, muß untersucht werden, ob durch ein noch weiteres Vorziehen vielleicht noch eine weitere Vergrößerung der Querkraft eintritt. Auf diese Weise entsteht dann die zweimal vorgezogene Stellung Fig. 118°c. In genau entsprechender Weise läßt sich hierfür ableiten:

$$
\text{(V)} \quad \begin{cases} \text{a)}\ R' < (P_1 + P_2) \dfrac{l}{\lambda}: & \textit{einmal} \text{ vorgezog. St. ergibt größere Querkraft.} \\ \text{b)}\ R' > (P_1 + P_2) \dfrac{l}{\lambda}: & \textit{zweimal} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \end{cases}
$$

Hierin ist R' gleich der Summe aller Lasten, die sich bei einmal vorgezogener Stellung auf der Brücke befinden. Falls durch das Vorschieben keine neue Last auf die Brücke gelangt ist, ist also $R' = R$. Überhaupt genügt es, nur die Summe R zu bestimmen und diese dann auch für die Bedingungen (V) zu benutzen. Es sei noch darauf aufmerksam gemacht, daß, falls $P_1 = P_2$ ist, $(P_1 + P_2) \frac{l}{\lambda} = 2 P_1 \frac{l}{\lambda}$ ist. In diesem Falle läßt sich die Bedingung (V) also auch so schreiben:

$$
\text{(V')} \quad \begin{cases} R' < 2 P_1 \dfrac{l}{\lambda}, \\ R' > 2 P_1 \dfrac{l}{\lambda}. \end{cases}
$$

Der gesamte Rechnungsgang ist also folgender: Man nimmt die Lasten zunächst in Grundstellung an und sieht nach, welche der beiden Bedingungen (IVa) und (IVb) erfüllt ist. Ist die erste erfüllt, so bleibt es bei Grundstellung. Trifft die zweite zu, so kommt vorgeschobene Stellung in Betracht. Dann muß aber noch nachgesehen werden, welche der beiden Bedingungen (Va) und (Vb) erfüllt wird. Hierdurch ergibt sich, ob ein- oder zweimal vorgezogene Stellung zu nehmen ist. Meistens ist es so, daß für die ersten Felder vom linken Auflager aus einmal vorgezogene Stellung maßgebend ist, für die anderen Grundstellung.

Digitized by Google

Zusatz: Der obigen Untersuchung haftet insofern eine Ungenauigkeit an, als während des Vorschiebens auch neue Lasten auf den Träger hinaufkommen können. Es ist leicht, auch diese zu berücksichtigen; doch werden die Formeln dadurch unnötig kompliziert.

Sobald nun die Laststellung, bei der die größte Querkraft auftritt, erkannt ist, ist es leicht, letztere selbst zu berechnen:

$$\text{(VI)} \begin{cases} \text{falls Grundstellg. maßgebend:} & \underset{+}{Q} = +A_I, \\ \text{,, vorgezog. St. ,,} & : \underset{+}{Q} = +A_{II} - P_1 \cdot \dfrac{a}{\lambda}, \\ & \text{bzw.} \quad = +A_{III} - \dfrac{P_1(a+b) + P_2 b}{\lambda}. \end{cases}$$

Auf diese Weise ergibt sich die größte positive Querkraft des betreffenden Feldes. Um die größte negative Kraftsumme zu erhalten, läßt man den Zug entsprechend von A aus vorrücken. Statt dessen geht man bei symmetrisch angeordneten Feldern meistens so vor, daß man für alle Felder des Trägers nur die größten positiven Werte Q berechnet. Dann hat man nämlich auch die größten negativen Querkräfte. Denn es ist z. B. die größte negative Querkraft für das vorletzte Feld links gleich der größten positiven Querkraft für das vorletzte Feld rechts; usw. (vergl. § 67, I).

II. Momente.

Die Momente berechnet man zunächst für die Querschnitte, die in den Belastungspunkten liegen. Denn für einen Belastungspunkt ist das Moment bei indirekter Belastung genau so groß wie bei direkter Belastung (vgl. die betreffenden Einflußlinien). Für einen solchen Punkt gilt also auch bei indirekter Belastung die vorhin (für direkte Belastung) aufgestellte Regel zur Erzielung der größten Momentensumme (Fig. 118):

Eine Last, z. B. P_3, wird direkt über den betreffenden Punkt m gestellt. Die übrigen werden möglichst zu beiden Seiten von m angeordnet, und dann wird untersucht, ob

$$\begin{cases} 1. \quad R\dfrac{x_m}{l} < P_1 + P_2 + P_3, \quad \text{und} \\ 2. \quad R\dfrac{x'_m}{l} < P_5 + P_4 + P_3 \end{cases}$$

ist. Sind diese beiden Bedingungen erfüllt, so darf die Belastung weder nach links noch nach rechts verschoben werden;

Digitized by Google

d. h. dann ergibt die angenommene Laststellung tatsächlich das größte Moment für den Punkt m.

Ist aber eine von den beiden Bedingungen nicht erfüllt, so ergibt die eingezeichnete Laststellung nicht das größte Moment für den betreffenden Punkt. Dann muß also eine neue Stellung ausprobiert werden (indem man eine andere Last über Punkt m stellt, usw.). Und zwar hatte sich gezeigt: Ist die erste Bedingung nicht erfüllt, so müssen die Lasten nach links verschoben werden; andernfalls nach rechts.

Auf diese Weise werden für die Belastungspunkte die größten Momente berechnet.

Für die anderen Balkenpunkte müßte hinsichtlich der gefährlichen Laststellungen eine besondere Untersuchung erfolgen. Wenn man aber die Momente für die Belastungspunkte hat, trägt man sie in den einzelnen Punkten auf, verbindet einfach die Endpunkte dieser Strecken durch gerade Linien und hat hiermit für alle Balkenpunkte das größte Moment. (Für die Zwischenpunkte ist dies zwar nicht mathematisch genau, da im allgemeinen jeder Zwischenpunkt eine besondere Laststellung hat [§ 67, I]; aber ausreichend.)

Dritter Belastungsfall: Direkte, gleichmäßig verteilte Last.

Die gefährlichsten Laststellungen ergeben sich am einfachsten durch einen Rückblick auf die Einflußlinien.

I. Querkräfte.

Aus der Einflußlinie für die Querkraft eines Balkenpunktes m für direkte Belastung ist folgendes ersichtlich (Fig. 118⁺b): Die größte positive Querkraft für den Schnitt m infolge einer gleichmäßig verteilten Last p wird dann entstehen, wenn die Last von B bis m aufgestellt ist; und die größte negative Querkraft entsteht bei Laststellung von A bis m.

Diese Laststellungen sind in Fig. 118⁺a eingezeichnet. Die betreffenden größten Querkräfte ergeben sich dann sofort:

$$\begin{cases} \underset{+}{Q} = A = p\,x_m' \cdot \dfrac{x_m'}{2} \cdot \dfrac{1}{l} = \dfrac{p}{2l} \cdot x_m'^2, \\[2ex] \underset{-}{Q} = B = p\,x_m \cdot \dfrac{x_m}{2} \cdot \dfrac{1}{l} = \dfrac{p}{2l} \cdot x_m^2. \end{cases}$$

Zusatz: Man bestimme diese Werte auch durch Ausrechnung aus den Einflußlinien! $(\underset{+}{Q} = p \cdot \underset{+}{F} = \ldots)$

Digitized by Google

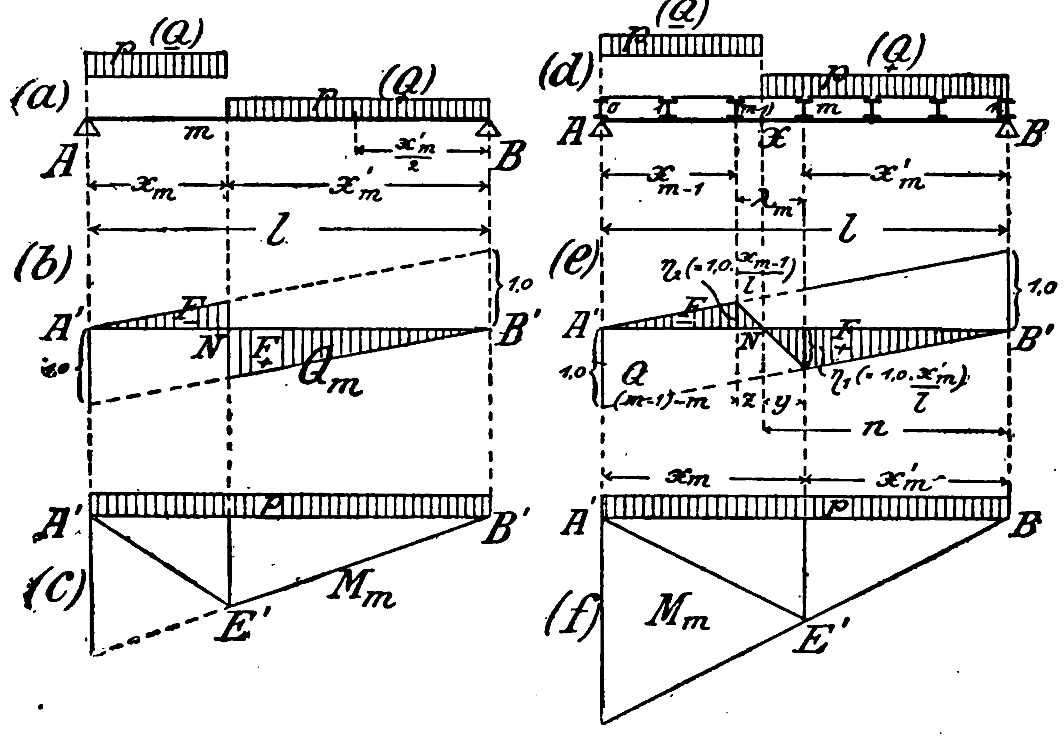


Fig. 118+.

II. Momente.

Ein Blick auf die Einflußlinie zeigt, daß zur Erzielung des größten Momentes für einen Schnitt m der ganze Träger mit der gleichmäßig verteilten Last voll gestellt werden muß (Fig. 118+c). Es kommt also derselbe Belastungsfall heraus wie bei einer ständigen, sich über den ganzen Träger erstreckenden Belastung. Folglich kann auch das größte Moment für den Schnitt m nach der für gleichmäßige Vollbelastung aufgestellten Formel berechnet werden (§ 59, 60):

$$_{\max} M_m = \frac{p}{2} x_m \cdot x'_m .$$

Trägt man für alle Querschnitte ihre größten Momente auf, so ergibt sich als Kurve der Maximalmomente eine Parabel.

Vierter Belastungsfall: Indirekte, gleichmäßig verteilte Last.

Um die Formeln für die größten Werte Q und M eines Schnittes zu erhalten, nehmen wir wieder vorübergehend die Einflußlinien zur Hilfe.

Digitized by Google

I. Querkräfte.

Die größte positive Querkraft für ein Feld $(m-1)-m$ entsteht bei Belastung von B bis zum Punkte x, senkrecht über dem Nullpunkte N der Einflußlinie. Um diese gefährliche Laststellung rechnerisch zu bestimmen, muß man also die Lage des Punktes N ermitteln. Diese ergibt sich durch geometrische Betrachtung der Einflußfläche Fig. 118⁺e: Es ist zunächst

$$y : z = \eta_1 : \eta_2 = \frac{1{,}0 \cdot x'_m}{l} : \frac{1{,}0 \cdot x_{m-1}}{l} = x'_m : x_{m-1}.$$

Also ist auch

$$y : (y+z) = x'_m : (x'_m + x_{m-1}),$$

$$y = \frac{x'_m}{(x'_m + x_{m-1})} \cdot (y+z).$$

Nun ist aber nach der Figur:

$$(y+z) = \lambda_m \qquad (=\text{Feldweite des untersuchten Feldes});$$

$$(x'_m + x_{m-1}) = l - \lambda_m.$$

Hiermit erhalten wir zur Bestimmung des Lage des Punktes N:

$$y = x'_m \cdot \frac{\lambda_m}{l-\lambda_m}, \quad \text{und}$$

$$n = x'_m + y = x'_m + x'_m \cdot \frac{\lambda_m}{l-\lambda_m} = \frac{x'_m \cdot l}{l-\lambda_m}.$$

Somit ist die Strecke n, d. h. die gefährliche Laststellung für das Feld $(m-1)-m$, rechnerisch bestimmt.

Die Querkraft selbst finden wir nun am einfachsten, indem wir die Belastung p multiplizieren mit dem Inhalte der darunter liegenden Einflußfläche:

$$\underset{+}{Q} = p \cdot \underset{+}{F} = p \cdot \frac{n \cdot \eta_1}{2} = \frac{p}{2} \frac{x'_m \cdot l}{l-\lambda_m} \cdot \frac{1{,}0 \cdot x'_m}{l}$$

$$\underset{+}{Q} = \frac{p}{2} \frac{x'^2_m}{l-\lambda_m}.$$

Hiermit ist die größte **positive** Querkraft für das Feld $(m-1)-m$ infolge einer indirekt wirkenden Belastung p bestimmt.

Die größte **negative** Querkraft desselben Feldes ergibt sich leicht durch entsprechende Betrachtung des linken Teiles:

$$\underset{-}{Q} = \frac{p}{2} \frac{x^2_{m-1}}{l-\lambda_m}.$$

Zusatz: Meistens sind alle Felder eines Trägers gleich lang. Man hat dann also: $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda$. Ist dann ferner:

n = Anzahl der Felder (also $l = n \cdot \lambda$),

Digitized by Google

so ist für ein Feld mit den Ordnungsnummern $(m-1)-m$:

$$l-\lambda_m = n\lambda - \lambda = (n-1)\lambda$$
$$x'_m = l - x_m = n\lambda - m\lambda = (n-m)\lambda$$
$$x_{m-1} = (m-1)\lambda.$$

Mit diesen Vereinfachungen ergeben sich die Ausdrücke für die Querkräfte:

$$\underset{+}{Q} = \frac{p}{2}\frac{(n-m)^2\lambda^2}{(n-1)\lambda},$$

$$\begin{cases} \underset{+}{Q} = \dfrac{p\lambda}{2(n-1)}\cdot(n-m)^2 & [(n-m) = \text{Felderzahl rechts vom Schnitt}], \\ \underset{-}{Q} = \dfrac{p\lambda}{2(n-1)}\cdot(m-1)^2 & [(m-1) = \text{„ links „ „ }]. \end{cases}$$

Der Faktor $\frac{p\lambda}{2(n-1)}$ wird ein für allemal bestimmt, wodurch die ganze Berechnung sehr einfach wird.

Für je zwei gleich große Felder, die symmetrisch zur Mitte des Trägers liegen, gilt natürlich die Beziehung: Die größte positive (negative) Kraftsumme des einen Feldes ist gleich der größten negativen (positiven) Kraftsumme des anderen Feldes.

II. Momente.

Maßgebend ist Vollbelastung, wie die Einflußlinie zeigt. Für einen Belastungspunkt folgt also direkt:

$$M = \frac{p}{2}x_m \cdot x'_m.$$

Durch Auftragen der für die Belastungspunkte gefundenen Werte und (geradlinige) Verbindung ergeben sich dann auch die Maximalmomente für die anderen Punkte.

Zusammenfassung zu § 68.

In diesem Paragraphen haben wir verschiedene Fälle untersucht, in denen man die größten Querkräfte und Momente auch recht bequem rechnerisch bestimmen kann. Es zeigte sich, daß man je nach der Belastungsart verschieden vorgehen muß. Für folgende 4 Fälle haben wir bestimmte Methoden, bzw. Formeln ausgearbeitet:

1. Direkt wirkende Einzellasten.

a) Querkräfte. Wir nehmen die Lasten zunächst in „**Grundstellung**“ an (d. h. einseitig vom Schnitte) und untersuchen dann, ob

$$R\frac{a}{l} < \text{ oder } > P_1$$

Digitized by Google

ist. Im ersteren Falle ergibt die Grundstellung tatsächlich die größere Querkraft. Im zweiten Falle ist Grundstellung nicht maßgebend, sondern es muß (um eine Last) vorgezogen werden.

Sobald auf diese Weise die ungünstigste Laststellung bestimmt ist, erfolgt die Ausrechnung von Q in gewöhnlicher Weise:

$Q = A_I$ (falls Grundstellung maßgebend war)

bzw. $Q = A_{II} - P_1$ („ vorgezog. Stellg. „ „).

Zusatz: Augenscheinlich wird bei direkten Einzellasten fast stets Grundstellung maßgebend sein. Nur wenn die erste Last sehr klein ist im Verhältnis zur Lastensumme R, kann vorgezogene Stellung maßgebend werden. Der Fall, ob *zwei*mal vorgezogene Stellung eine noch größere Querkraft ergibt, ist entsprechend zu untersuchen; doch kommt er praktisch kaum vor. [Es müßte dann sein: $R\frac{a}{l} > (P_1 + P_2)$.]

b) Momente. Wir nehmen die Lasten beiderseitig von dem betreffenden Punkte m an, und zwar eine Last direkt in m, und untersuchen dann, ob die Bedingungen erfüllt sind:

$$\begin{cases} 1. \quad R\frac{x_m}{l} < P_1 + P_2 + \ldots P_m, \\ 2. \quad R\frac{x'_m}{l} < P_n + P_{n-1} + \ldots P_m. \end{cases}$$

[Hierin bedeutet $P_1 + P_2 + \ldots + P_m$ die Summe der Lasten von links bis einschließlich Punkt m; $P_n + P_{n-1} + \ldots + P_m$ bedeutet die Lasten von rechts bis einschließlich m. Die Längen x_m und x'_m sind die Abstände des betreffenden Punktes vom linken bzw. rechten Auflager. R ist die Summe aller Lasten.]

Sind beide Bedingungen erfüllt, so ergibt die angenommene Laststellung tatsächlich das größte Moment für den betreffenden Punkt. Andernfalls muß nach links, bzw. rechts verschoben werden.

2. Indirekt wirkende Einzellasten.

a) Querkräfte. Mit Grundstellung wird angefangen. Dann sind folgende Fälle möglich:

1. $R < P_1\frac{l}{\lambda}$: es bleibt bei Grundstellung;

2. $R > P_1\frac{l}{\lambda}$: vorziehen
   - a) $R' < (P_1 + P_2)\frac{l}{\lambda}$: *ein*mal vorziehen,
   - b) $R' > (P_1 + P_2)\frac{l}{\lambda}$: *zwei*mal vorziehen.

[R-Summe aller Lasten bei Grundstellung; R' = Lastensumme bei vorgezogener Stellung, (kann auch einfach gleich R genommen werden).]

Sobald dann über die maßgebende Stellung entschieden ist, ergibt sich die zugehörige Querkraft (vgl. Fig. 118°):

$\underset{+}{Q} = A_I$ (im Falle 1)

bzw. $\underset{+}{Q} = A_{II} - P_1\frac{a}{\lambda}$ („ „ 2a)

bzw. $\underset{+}{Q} = A_{III} - \frac{P_1(a+b) + P_2 b}{\lambda}$ („ „ 2b).

Digitized by Google

Zusatz: In entsprechender Weise ist die — praktisch kaum vorkommende — dreimal vorgezogene Stellung zu untersuchen; usw.

b) Momente. Es werden zunächst die Momente an den Belastungspunkten untersucht, und zwar genau so wie bei direkter Belastung. Falls auch ein Zwischenmoment verlangt wird, ergibt sich dieses durch (geradlinige) Einschaltung zwischen die beiden benachbarten Belastungspunkte.

3. Direkt wirkende gleichmäßig verteilte Last.

a) Querkräfte. Stets Grundstellung, und zwar kann man sofort hinschreiben:

$$\underset{+}{Q} = \frac{p}{2l} x_m'^2; \quad \underset{-}{Q} = \frac{p}{2l} x_m^2,$$

[x_m' und x_m sind die Abstände des betreffenden Punktes nach rechts, bzw. links.]

b) Momente. Vollbelastung. Für irgendeine Stelle m ist also:

$$M = \frac{p}{2} x_m \cdot x_m'. \quad \left(\text{In der Mitte: } M = \frac{pl^2}{8}\right).$$

Kurve der Maximalmomente ist eine Parabel.

4. Indirekt wirkende gleichmäßig verteilte Last.

a) Querkräfte. Stets vorgezogene Stellung, und zwar ergibt sich für ein Feld:

$$\underset{+}{Q} = \frac{p}{2} \frac{x_m'^2}{l - \lambda_m}; \quad \underset{-}{Q} = \frac{p}{2} \frac{x_{m-1}^2}{l - \lambda_m}.$$

[x_m' und x_{m-1} sind die Abstände des Feldes $(m-1) - m$ nach rechts, bzw. links.]

Bei n gleichen Feldern ist:

$$\underset{+}{Q} = \frac{p\lambda}{2(n-1)} (n-m)^2; \quad \underset{-}{Q} = \frac{p\lambda}{2(n-1)} (m-1)^2.$$

b) Momente. Die Belastungspunkte herausgreifen, nach Belastungsfall 3 berechnen und dann geradlinig verbinden.

Schlußbetrachtung: Es sei nochmals das Charakteristische bei der Bestimmung von Q und M hervorgehoben: Bei Q ist einseitige Stellung, bei M ist beiderseitige Stellung der Lasten maßgebend. Bei gleichmäßig verteilter Last kann man auch die betreffende genaue Stellung sofort angeben. Bei Einzellasten muß man im allgemeinen etwas probieren. (Bei angenäherter Berechnung von Q genügt es schließlich, auch bei Einzellasten nur mit Grundstellung zu arbeiten.)

Außer diesen 4 Fällen ist die rechnerische Bestimmung von Q und M namentlich bei Eisenbahnbrücken sehr angebracht. Hierüber s. Band II, § 32.

§ 68a.

Beispiele zu § 68.

Erste Aufgabe.

Für den Träger Fig. 117, 118 sind für den Querschnitt m die größte Querkraft und das größte Moment zu bestimmen!

Digitized by Google

Zahlenwerte:

$P_1 = P_2 = \ldots = 10{,}0\,\text{t}$ in Abständen von je 3,0 m;
$l = 25{,}0\,\text{m}; \quad x_m = 11{,}0\,\text{m}; \quad x'_m = 14{,}0\,\text{m}.$

a) **Querkraft.** Von Grundstellung wird ausgegangen. Hierfür ist:

$$\left.\begin{aligned} R\frac{a}{l} &= 5 \cdot 10{,}0 \cdot \frac{3{,}0}{25{,}0} = 6{,}0\,\text{t} \\ P_1 &= 10{,}0\,\text{t} \end{aligned}\right\} \text{ also ist } R\frac{a}{l} < P_1.$$

Es bleibt somit bei Grundstellung, und zwar wird:

$$Q = A = R\frac{x_0}{l} = 50{,}0 \cdot \frac{8{,}0}{25{,}0} = 16{,}0\,\text{t}.$$

b) **Moment.** Wir nehmen zunächst die Stellung Fig. 118ᵃ als die wahrscheinlich am ungünstigsten an. Hierfür ist:

$$\left.\begin{aligned} R\frac{x_m}{l} &= 50{,}0 \cdot \frac{11{,}0}{25{,}0} = 22{,}0\,\text{t} \\ P_1 + P_2 + P_3 &= 30{,}0\,\text{t} \end{aligned}\right\} \text{ also ist 1. } R\frac{x_m}{l} < P_1 + P_2 + P_3;$$

$$\left.\begin{aligned} R\frac{x'_m}{l} &= 50{,}0 \cdot \frac{14{,}0}{25{,}0} = 28{,}0\,\text{t} \\ P_5 + P_4 + P_3 &= 30{,}0\,\text{t} \end{aligned}\right\} \text{ also ist 2. } R\frac{x'_m}{l} < P_5 + P_4 + P_3.$$

Die angenommene Stellung ist also tatsächlich diejenige, die für die Stelle m das größte Moment abgibt. Letzteres wird nun in gewöhnlicher Weise berechnet:

$$_{\max}M_m = A \cdot x_m - P_1 \cdot p_1 - P_2 \cdot p_2 = 218\,\text{mt}.$$

Zweite Aufgabe.

Derselbe Träger wie vorhin. Nur sei die Belastung:
$P_1 = 2{,}5\,\text{t}; \quad P_2 = P_3 = P_4 = 10{,}0\,\text{t}; \quad P_5 = 2{,}5\,\text{t}$ (also $\Sigma P = 35{,}0\,\text{t}$); *und die Lage des Punktes m sei:*

$$x_m = 7{,}0\,\text{m}; \quad x'_m = 18{,}0\,\text{m}.$$

a) **Querkraft.** Bei zunächst angenommener Grundstellung ist:

$$\left.\begin{aligned} R\frac{a}{l} &= 35{,}0 \cdot \frac{3{,}0}{25{,}0} = 4{,}2\,\text{t} \\ P_1 &= 2{,}5\,\text{t} \end{aligned}\right\} \text{ also ist } R\frac{a}{l} > P_1;$$

d. h. Grundstellung gibt nicht die größte Querkraft, sondern vorgezogene Stellung. Für diese finden wir dann:

$$Q = A_{II} - P_1 = \frac{35{,}0 \cdot 15{,}0}{25{,}0} - 2{,}5 = 18{,}5\,\text{t}.$$

(Bei Grundstellung würde sich nur ergeben:

$$Q = A_I = \frac{35{,}0 \cdot 12{,}0}{25{,}0} = 16{,}8\,\text{t}.)$$

Digitized by Google

b) Moment. Wir nehmen zunächst die Stellung Fig. 118a an (Last P_3 über dem zu untersuchenden Querschnitt) und untersuchen, ob für diese Stellung

$$1.\quad R\frac{x_m}{l} < P_1 + P_2 + P_3, \qquad 2.\quad R\frac{x'_m}{l} < P_5 + P_4 + P_3$$

ist. Die Ausrechnung ergibt:

$$\left.\begin{aligned} R\frac{x_m}{l} &= 35{,}0 \cdot \frac{7{,}0}{25{,}0} = 9{,}8\,\text{t} \\ P_1 + P_2 + P_3 &= 22{,}5\,\text{t} \end{aligned}\right\}\ \text{die 1. Bedingung ist erfüllt;}$$

$$\left.\begin{aligned} R\frac{x'_m}{l} &= 35{,}0 \cdot \frac{18{,}0}{25{,}0} = 25{,}2\,\text{t} \\ P_5 + P_4 + P_3 &= 22{,}5\,\text{t} \end{aligned}\right\}\ \text{die 2. Bedingung ist nicht erfüllt.}$$

Die angenommene Laststellung ergibt also nicht das größte Moment für den Punkt m. Sondern es muß verschoben werden, und zwar nach *rechts*, da die *zweite* Bedingung nicht erfüllt ist.

Wir stellen also die Lasten so, daß P_2 über m steht. Diese Laststellung ergibt dann tatsächlich das größte Moment für den Punkt m.

Dritte Aufgabe.

Bei dem Träger Fig. 118° ist für das Feld u—v die größte positive Querkraft und ferner für den Belastungspunkt v das größte Moment zu berechnen!

Zahlenwerte:

$$P_1 = P_2 = \ldots = 10{,}0\,\text{t in Abständen von je } 3{,}0\,\text{m};$$

$$\text{Feldweite } \lambda = 5{,}0\,\text{m}; \quad \text{Spannweite } l = 5 \cdot \lambda = 5 \cdot 5{,}0 = 25{,}0\,\text{m}.$$

a) Querkraft. Von Grundstellung für das Feld wird ausgegangen. Hierfür ergibt dann die Gegenüberstellung der Werte:

$$\left.\begin{aligned} R &= 50{,}0\,\text{t} \\ P_1\frac{l}{\lambda} &= 10{,}0 \cdot 5 = 50{,}0\,\text{t} \end{aligned}\right\}\ \text{also ist gerade } R = P_1\frac{l}{\lambda}.$$

Es hat sich zufällig ergeben, daß R weder kleiner noch größer als $P_1\frac{l}{\lambda}$, sondern gleich $P_1\frac{l}{\lambda}$ ist. Dies bedeutet, daß für das Feld (u—v) die Grundstellung und die vorgezogene Stellung die gleiche Querkraft liefern.

Letztere ergibt sich nun durch einfache Ausrechnung:

$$Q_{u-v} = A = 18{,}0\,\text{t}.$$

b) Moment. Wir stellen die Lasten so, daß P_3 über v steht. Hierfür ist

Digitized by Google

$$\left.\begin{array}{l} R\frac{x}{l} = 50{,}0 \cdot \frac{2\lambda}{5\lambda} = 20{,}0\,\text{t} \\ P_1 + P_2 + P_3 = 30{,}0\,\text{t} \end{array}\right\} \text{ also ist 1. } R\frac{x}{l} < P_1 + P_2 + P_3,$$

$$\left.\begin{array}{l} R\frac{x'}{l} = 50{,}0 \cdot \frac{3}{5} = 30{,}0\,\text{t} \\ P_5 + P_4 + P_3 = 30{,}0\,\text{t} \end{array}\right\} \text{ also ist 2. } R\frac{x'}{l} = P_5 + P_4 + P_3.$$

Es braucht also weder nach links noch nach rechts verschoben zu werden. Die Ausrechnung von M erfolgt dann in gewöhnlicher Weise:

$$M = A \cdot x - P_1 \cdot p_1 - P_2 \cdot p_2 = \ldots$$

Vierte Aufgabe.

Bei dem Träger Fig. 118⁺d sind für das Feld $(m-1)-m$ die größten Querkräfte (positiv und negativ) und für den Punkt m das größte Moment zu bestimmen!

Zahlenwerte:

$$l = 6\lambda = 6 \cdot 3{,}0 = 18{,}0\,\text{m}; \quad p = 2{,}5\,\text{t/m}.$$

a) Querkräfte.

$$\underset{+(m-1)-m}{Q} = \frac{p}{2}\,\frac{x_m'^2}{l-\lambda_m} = \frac{2{,}5}{2}\,\frac{9{,}0^2}{15{,}0} = +6{,}75\,\text{t},$$

$$\underset{-(m-1)-m}{Q} = \frac{p}{2}\,\frac{x_{m-1}^2}{l-\lambda_m} = \frac{2{,}5}{2}\,\frac{6{,}0^2}{15{,}0} = -3{,}00\,\text{t}.$$

Statt dessen kann man auch, da der Träger gleiche Feldweiten hat, die Formeln anwenden:

$$\underset{+}{Q} = \frac{p\lambda}{2(n-1)}(n-m)^2 = \frac{2{,}5 \cdot 3{,}0}{2(6-1)} \cdot 3^2 = 0{,}75 \cdot 3^2 = +6{,}75\,\text{t},$$

$$\underset{-}{Q} = 0{,}75 \cdot 2^2 = -3{,}00\,\text{t}.$$

b) Moment. Es ist

$$_{\max}M_m = \frac{pl^2}{8} = \frac{2{,}5 \cdot 18{,}0^2}{8} = 101{,}25\,\text{mt}.$$

§ 68b.

Berechnung eines Kranträgers mit 2 Lasten.

Für den wichtigen Spezialfall: Kranträger mit 2 Lasten (Laufkatże) gestaltet sich die rechnerische Bestimmung der Querkräfte und Momente besonders einfach und ist jeder anderen Methode vorzuziehen. Es gilt nämlich für diesen Fall folgender Satz: *Die größte Kraft- und die größte Momentensumme eines Querschnittes entstehen bei derselben Laststellung, und zwar dann, wenn das eine (schwerere) Rad direkt über dem Querschnitte und das andere nach der Mitte des Trägers zu steht.*

[Eigentlich gehören allerdings zu jedem Querschnitte zwei „größte Kraftsummen" (die größte positive und die größte negative).]

Digitized by Google

Im obigen Satze ist unter „größte Kraftsumme" die zahlenmäßig größere der beiden gemeint, ohne Berücksichtigung des Vorzeichens. Für viele Aufgaben kommt es nämlich nur auf überhaupt größte Querkraft des betreffenden Schnittes an, so namentlich bei der Berechnung von Nietteilungen.

Der Beweis des obigen Satzes folgt direkt durch Betrachtung der für einen solchen Belastungsfall gezeichneten Einflußlinien Fig. 111 und 112. Natürlich ergibt er sich auch aus dem vorigen Paragraphen.

Als Beispiel für diesen Spezialfall wollen wir die erste Aufgabe des § 66 in dieser analytischen Weise behandeln. Die Rechnung wird am übersichtlichsten in Form einer Tabelle durchgeführt. In der folgenden Tabelle bedeutet:

x die Entfernung des zu untersuchenden Querschnittes vom linken Auflager;

x' die entsprechende Entfernung vom rechten Lager;

x_0 den Abstand der Resultierenden R der beiden Räder der Katze von B, wenn jene sich für den betreffenden Querschnitt in „gefährlicher Laststellung" befindet;

A der bei dieser gefährlichen Laststellung entstehende Auflagerdruck;

Q und M die größte Kraft- bzw. Momentensumme des betreffenden Querschnittes.

Dann ergibt sich folgende Ausrechnung (zur Sicherheit zeichne man die sechs gefährlichen Laststellungen auf!):

Querschnitt	Abstand x vom Lager A (m)	Abstand x' vom Lager B (m)	Abstand x_0 der Resultierenden von B ($x_0 = x' - 0{,}65$) (m)	Auflagerdruck A = Querkraft Q $\left(A = \frac{R \cdot x_0}{l} = \frac{12{,}0 \cdot x_0}{9{,}0} = \frac{4}{3} x_0\right)$ (t)	Moment M ($M = A \cdot x$) (mt)
0	0,00	9,00	8,35	$\frac{33{,}40}{3} = 11{,}13$	0,00
1	0,90	8,10	7,45	$\frac{29{,}80}{3} = 9{,}93$	$\frac{29{,}80}{3} \cdot 0{,}90 = 8{,}94$
2	1,80	7,20	6,55	$\frac{26{,}20}{3} = 8{,}73$	$\frac{26{,}20}{3} \cdot 1{,}80 = 15{,}72$
3	2,70	6,30	5,65	$\frac{22{,}60}{3} = 7{,}53$	$\frac{22{,}60}{3} \cdot 2{,}70 = 20{,}34$
4	3,60	5,40	4,75	$\frac{19{,}00}{3} = 6{,}33$	$\frac{19{,}00}{3} \cdot 3{,}60 = 22{,}80$
5	4,50	4,50	3,85	$\frac{15{,}40}{3} = 5{,}13$	$\frac{15{,}40}{3} \cdot 4{,}50 = 23{,}10$

Digitized by Google

Man muß eine solche Tabelle so einrichten, daß möglichst keine Nebenrechnungen — auf später nicht mehr auffindbaren Zetteln — nötig sind. Dann ist diese analytische Methode bei zwei Lasten recht empfehlenswert. Die kleinen Unterschiede der Resultate gegenüber Fig. 111 und 112 kommen natürlich von Abrundungen her.

§ 69.

Dritte Methode: Bestimmung von Q und M mittels Seilpolygon.

Diese Methode hat viel von ihrer früheren Beliebtheit verloren, namentlich, seitdem man die Übersichtlichkeit der Einflußlinien schätzen gelernt hat. Immerhin verdient sie, erwähnt zu werden. Der Einfachheit wegen beschränken wir uns auf direkt wirkende Belastung.

I. Bestimmung der Querkräfte.

Bei der Berechnung von Q kommt es vor allen Dingen darauf an, den Auflagerdruck A zu bestimmen. Hierzu haben wir in dem A-Polygon (§ 21) eine sehr brauchbare Methode kennen ge-

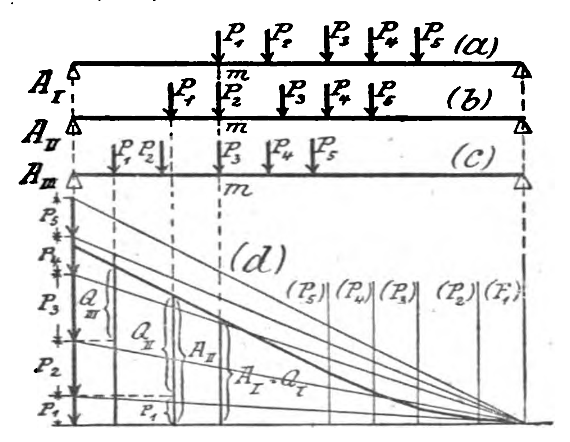


Fig. 119.

lernt. In Fig. 119d ist zu den Lasten $P_1, \ldots, P_5$ das A-Polygon konstruiert. Um nun für die „Grundstellung" (Fig. 119a) die Querkraft zu finden, haben wir, da $Q_I = +A_I$ ist, nur die Strecke unter der Last P_1 abzumessen und finden damit Q_I. Für die vorgezogene Stellung ist $Q_{II} = +A_{II} - P_1$. A_{II} liegt im A-Polygon unter der ersten Last. P_1 ziehen wir davon ab, indem wir die

Digitized by Google

(punktiert gezeichnete) horizontale Linie durch den Anfangspunkt von P_1 im Kräftepolygon zeichnen. Wir erhalten somit die Querkraft infolge der vorgezogenen Stellung dargestellt durch die mit Q_{II} bezeichnete Strecke. Hier ist auch der Fall behandelt, daß die Lasten noch weiter vorgerückt sind. Dann ist $Q_{III} = +A_{III} - P_1 - P_2$. Wir finden diese Größe, indem wir im A-Polygon von der unter der ersten Last gemessenen Ordinate, A_{III}, die beiden Kräfte P_1 und P_2 abziehen (Fig. 119d). Übrigens wird diese zweimal vorgezogene Stellung bei direkter Belastung wohl kaum jemals maßgebend sein.

Auf jeden Fall kann man nach Fig. 119 für jeden Querschnitt diejenige Stellung, bei der die größte Kraftsumme entsteht, auffinden und dann letztere aus der Figur abgreifen.

II. Bestimmung der Momente.

Auch diese Arbeit besteht in einem Ausprobieren von verschiedenen Stellungen. Um zunächst für die Stellung Fig. 120a das Moment eines Schnittes m zu finden, verfahren wir nach

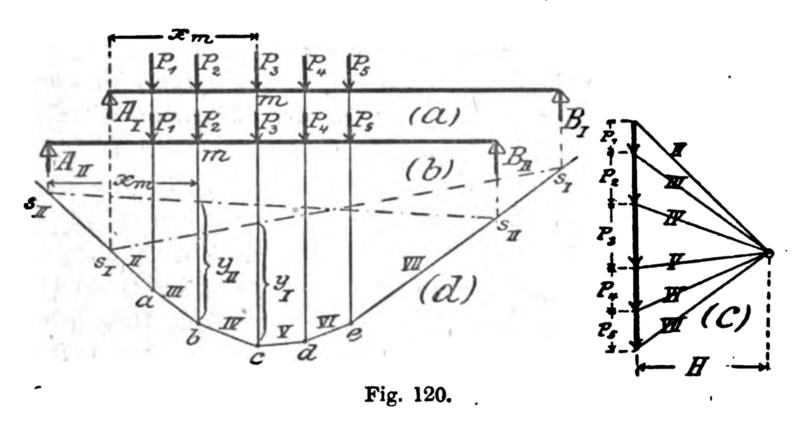


Fig. 120.

§ 56, II: Wir reihen die Kräfte zu einem Kräftepolygon aneinander und ziehen die Pol- und die Seilstrahlen (Fig. 120c und d). Dann bestimmen wir die Schnittpunkte s_I, s_I der Strahlen II und VII mit A_I und B_I, ziehen die Schlußlinie $\overline{s_I s_I}$ und haben das Polygon s_I, a, b, c, d, e, s_I als Momentenfläche für die Laststellung Fig. 120a (vgl. Fig. 93). Das Moment am Punkte m ist dann:

$$M_I = H \cdot y_I .$$

Nun sind die Lasten aber nicht fest auf dem Träger, wie bei Fig. 93, sondern beweglich. In Fig. 120b ist deshalb auch der

Digitized by Google

Fall vorgesehen, daß die Last P_2 über m steht. Hierbei ist von demselben Kunstgriffe Gebrauch gemacht, wie bei der Ableitung des A-Polygons in § 21: Die Linien, die die Lasten darstellen, sind an ihrer früheren Stelle gelassen, dafür ist aber der Träger etwas nach links verschoben gezeichnet, so daß auf diese Weise P_2 über m zu stehen kommt. Jetzt können wir dasselbe Kräfte- und Seilpolygon benutzen; wir haben nur die neuen Schnittpunkte s_{II}, s_{II} der Strahlen II und VII mit den neuen Auflagerkräften A_{II} und B_{II} zu bestimmen, die Schlußlinie $\overline{s_{II}\, s_{II}}$ einzutragen und finden dann aus der Momentenfläche $s_{II}, a, b, c, d, e, s_{II}$ das bei dieser Stellung entstehende Moment:

$$M_{II} = H \cdot y_{II}\,.$$

Um festzustellen, welches von den beiden Momenten das größere ist, brauchen wir nur (mittels Stechzirkel) y_I und y_{II} zu vergleichen. Indem man auf diese Weise die verschiedenen Stellungen ausprobiert, findet man das Maximalmoment für den untersuchten Querschnitt m.

§ 69a.

Beispiel zu § 69.

Die Belastung einer Feldbahnbrücke von $l = 12{,}00$ m Spannweite bestehe aus einer Lokomotive nach Fig. 121a und aus Güterwagen nach Fig. 121b. Letztere können sich in beliebiger Anzahl sowohl vor als auch hinter der Maschine befinden. Die größten Querkräfte und Momente der Brücke sind zu bestimmen!

a) **Querkräfte.** Um für irgendeinen Schnitt des Balkens die größte positive Kraftsumme zu finden, müssen bekanntlich die Lasten rechts von diesem Schnitte aufgestellt werden. Die schwerste Last muß hierbei an der Spitze des Zuges sein, um den Auflagerdruck A (der ja hauptsächlich die Kraftsumme bildet) möglichst groß zu machen. Zur Erzielung der größten positiven Querkräfte werden wir also Lokomotive und Wagen in folgender Anordnung nehmen: Lokomotive an der Spitze, Wagen nur einseitig, und zwar rechts von der Lokomotive, angehängt. Somit ist die Frage der Lastenzusammenstellung erledigt.

In Fig. 121g ist nun zu diesem Lastenzuge das A-Polygon gezeichnet: Auf dem Balken haben sieben Lasten Platz (Fig. 121d). Diese werden vertikal unter A aufgetragen, die vorderste zu unterst (Fig. 121g). Dann werden zu diesen Lasten die Polstrahlen I—VIII gezeichnet. Hierauf werden die Abstände der Lasten von rechts nach links aufgetragen, Fig. 121f (der Zug wird also in umge-

Digitized by Google

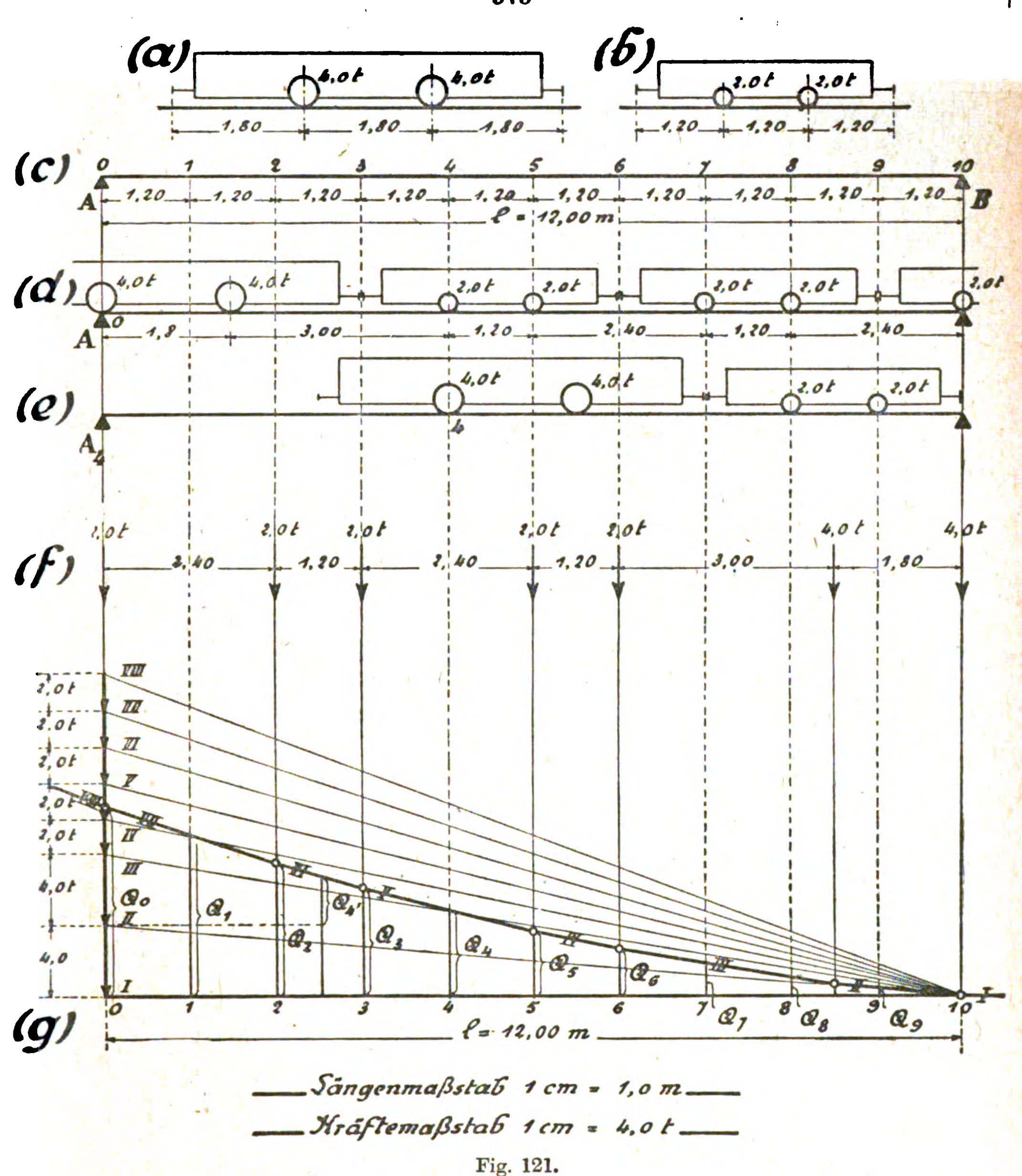


Fig. 121.

drehter Stellung noch einmal aufgezeichnet), durch die Lasten die Vertikallinien gezogen und zwischen diese Vertikallinien parallel zu den Polstrahlen die Seilstrahlen *I—VIII* eingezeichnet. Dann ist das Seilpolygon *I—VIII* das *A*-Polygon des vorliegenden Trägers (vgl. § 21).

Digitized by Google

Befindet sich nun der Lastenzug beispielsweise für den Querschnitt *4* in rechtsseitiger Grundstellung (Fig. 121e), so ist die Kraftsumme Q_4 gleich dem Auflagerdruck A_4. Letzterer ist aber in dem A-Polygon durch die Ordinate Q_4 dargestellt. Wir erhalten also

$$Q_4 = A_4 = 4{,}80 \text{ t}.$$

Die vorgezogene Stellung kommt für Q_4 nicht in Betracht. Denn, wenn man für diesen Fall die Kraftsumme ermittelt (Q_4' in Fig. 121g), so zeigt sich, daß sie bedeutend kleiner ist als der Wert Q_4 bei Grundstellung.

In derselben Weise sind in Fig. 121g für die anderen Querschnitte die größten positiven Kraftsummen gefunden. Überall ist Grundstellung maßgebend. Das Seilpolygon in Fig. 121g stellt also die Kurve der größten positiven Querkräfte dar.

Aber auch die größten negativen Querkräfte der einzelnen Querschnitte lassen sich aus Fig. 121g ablesen. In § 67, I ist gezeigt, daß zum Beispiel für die beiden Schnitte *2* und *8* von Fig. 121c hinsichtlich der Kraftsummen die Beziehung gilt: Die größte positive Querkraft von Schnitt *8* ist gleich der größten negativen Querkraft von Schnitt *2*. Wenden wir diese Beziehung auf je zwei spiegelbildlich gelegene Schnitte an, so ergibt sich für eine Balkenhälfte folgende Zusammenstellung von größten positiven und negativen Kraftsummen:

$$\begin{array}{llll}
Q_0 = +10{,}6 \text{ t}; & \text{bzw.} & = -0{,}0 \text{ t}, \\
Q_1 = +\ \ 9{,}0 \text{ t}; & \text{"} & = -0{,}4 \text{ t}, \\
Q_2 = +\ \ 7{,}4 \text{ t}; & \text{"} & = -1{,}0 \text{ t}, \\
Q_3 = +\ \ 6{,}0 \text{ t}; & \text{"} & = -1{,}8 \text{ t}, \\
Q_4 = +\ \ 4{,}8 \text{ t}; & \text{"} & = -2{,}6 \text{ t}, \\
Q_5 = +\ \ 3{,}6 \text{ t}; & \text{"} & = -3{,}6 \text{ t}.
\end{array}$$

Hiermit sind die Querkräfte vollständig ermittelt.

b) Momente. Für Momente gilt „Vollbelastung“, und zwar müssen die schweren Lasten über dem zu untersuchenden Querschnitte, die leichten Lasten seitlich davon stehen. Durch diese Überlegung kommen wir zu der Zuganordnung Fig. 122a.

Zu diesen Lasten wurde nun (Fig. 122b) das Kräftepolygon und (Fig. 122g) das Seilpolygon gezeichnet. Als Maßstab für die Lasten ist 4,0 t = 1 cm und für die Längen 1,0 m = 1 cm gewählt. Die Polweite H des Kräftepolygons wollen wir im Längenmaßstab und die Ordinaten y des Seilpolygons im Kräftemaßstab

Digitized by Google

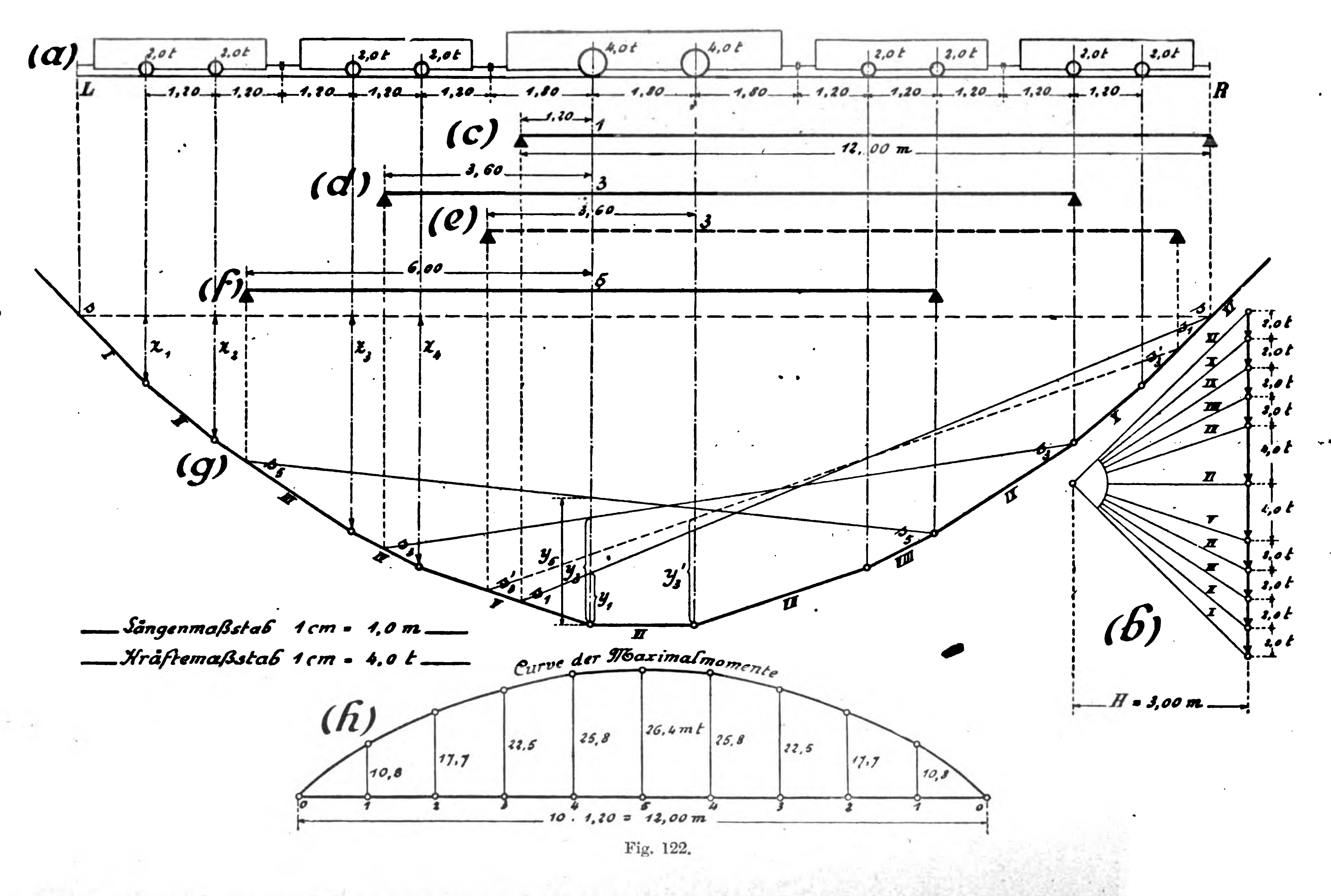


Fig. 122.

Digitized by Google

messen. Der Lastenzug muß so lang genommen werden, daß der Balken in verschiedenen Stellungen eingezeichnet werden kann.

Um nun für den Querschnitt *1* des Balkens das größte Moment zu erhalten, zeichnen wir den Träger so, daß der Schnitt *1* unter dem linken Lokomotivrade steht (Fig. 122c). Durch Hinunterloten der Lagerpunkte wird die Schlußlinie s_1—s_1 bestimmt, die Ordinate y_1 abgemessen ($y_1 = 0{,}9$ cm $= 0{,}9 \cdot 4 = 3{,}6$ t) und hierauf

$$M_1 = H \cdot y_1 = 3{,}0 \text{ m} \cdot 3{,}6 \text{ t}$$
$$= 10{,}8 \text{ mt}$$

gefunden. Somit ist für die Laststellung Fig. 122c (linkes Lokomotivrad über Schnitt *1*) das Moment M_1 bestimmt. Wenn man nun an die Form der Einflußlinie für M_1 denkt, erkennt man, daß eine andere Laststellung für den Schnitt *1* nicht in Frage kommen kann. Somit ist das größte Moment M_1 endgültig gefunden.

Für den Querschnitt *3* des Balkens sind in Fig. 122d und e die beiden Stellungen gezeichnet, daß einmal das linke und dann das rechte Lokomotivrad sich über *3* befindet. (Außerdem sind natürlich die anderen Lasten vorhanden.) Beide Stellungen müssen ausprobiert werden. Die Schlußlinien sind s_3—s_3 bzw. s_3'—s_3'; die zum Schnitte gehörigen Ordinaten sind y_3 bzw. y_3'. Der Vergleich zeigt, daß erstere die größere ist, und zwar wird

$$M_3 = H \cdot y_3 = 3{,}00 \text{ m} \cdot 7{,}5 \text{ t}$$
$$= 22{,}5 \text{ mt.}$$

In derselben Weise ist dann noch durch Fig. 122f für den Querschnitt *5* die größte Momentensumme bestimmt:

$$M_5 = H \cdot y_5 = 3{,}00 \text{ m} \cdot 8{,}8 \text{ t}$$
$$= 26{,}4 \text{ mt.}$$

Ein Ausprobieren verschiedener Stellungen ist bei M_5 augenscheinlich nicht nötig.

In Fig. 122h sind für sämtliche Querschnitte die größten Momente zusammengestellt. Für die Querschnitte *2* und *4*, die in Fig. 122 nicht untersucht sind, führe man die Ermittlung selber durch!

Die Methode geht recht schnell vonstatten, zeitigt aber auch ein ziemliches Liniengewirr. Außerdem muß man schon einen gewissen Überblick über die gefährlichen Laststellungen haben, da man sonst sehr leicht Fehler machen wird.

Digitized by Google

Zusatz: Zeichnet man in Fig. 122g die Linie $s-s$ ein, so kann augenscheinlich die zwischen der Linie $s-s$ und dem Seilpolygon gelegene Fläche als die Momentenfläche eines (gedachten) Balkens angesehen werden, der sich in Fig. 122a zwischen der äußersten linken und der äußersten rechten Last erstreckt und nach Fig. 122a belastet ist. (Denn für einen solchen Balken LR würde man ja durch Fig. 122b und g die Momentenfläche graphisch finden; vgl. § 56, II.) Daraus folgt, daß sich die Abstände z_1, z_2 usw. zwischen der Linie $s-s$ und den Knickpunkten des Seilpolygons auch rechnerisch ermitteln lassen: Man berechnet für den (gedachten) Balken LR mit der Belastung Fig. 122a die Momente unter den Lasten. Diese Momente sind dann gleich den Abständen z_1, z_2 usw. (Die Polweite H ist für diesen Fall gleich 1,0 zu setzen.) Auf diese Weise erspart man Fig. 122b und erhält außerdem ein sehr genaues Seilpolygon. Die Rechenarbeit ist auch nicht besonders groß, wenn man nach § 57, II die Momente des Balkens LR auseinander entwickelt.

§ 70.

Das absolute Maximalmoment.

In den letzten Paragraphen haben wir die Aufgabe behandelt, für einen bestimmten Querschnitt eines Balkens die größte Kraft- und Momentensumme zu bestimmen. Jetzt wollen wir uns die Frage vorlegen: Wie groß ist das größte Moment, das infolge einer vorgeschriebenen Belastung überhaupt an einem bestimmten Träger auftreten kann? Dieses Moment — es werde das „*absolute Maximalmoment* M_{abs}“ des betreffenden Balkens genannt — kann natürlich gefunden werden, indem man verschiedene Querschnitte durchprobiert. Für viele Belastungen kann man jedoch systematischer nach den folgenden zu entwickelnden Methoden vorgehen.

I. Belastung durch eine Last.

Wenn sich nur *eine* Last auf dem Träger bewegt (Fig. 123a), so entsteht das größte Biegungsmoment am Balken, wenn die Last in der Mitte steht, und zwar ist dann

$$M_{abs} = +A \cdot \frac{l}{2} = \frac{P}{2} \cdot \frac{l}{2} = \frac{Pl}{4}.$$

II. Belastung durch zwei gleich schwere Lasten.

Bei *zwei gleich schweren* Lasten wollen wir folgenden Weg einschlagen. Zunächst untersuchen wir die Stellung, bei der die

Digitized by Google

erste Last in Trägermitte steht (Fig. 123b). Bei dieser Stellung entsteht das größte Moment am Punkte m (da hier die Querkraft aus dem Positiven in das Negative übergeht), und zwar hat dieses die Größe:

$$M_I = +A_I \cdot \frac{l}{2} = R\frac{x_0}{l} \cdot \frac{l}{2},$$

$$\text{(I)} \qquad M_I = \frac{R}{l}\,\frac{x_0 \cdot l}{2}.$$

Nun verschieben wir die Lasten um eine beliebige Strecke β nach links (Fig. 123c). Das größte Moment, das bei dieser Laststellung entsteht, tritt bei n auf und ist

$$M_{II} = +A_{II}\left(\frac{l}{2} - \beta\right) = R\,\frac{x_0 + \beta}{l}\left(\frac{l}{2} - \beta\right),$$

$$\text{(II)} \qquad M_{II} = \frac{R}{l}\left(x_0 \cdot \frac{l}{2} + \beta \cdot \frac{l}{2} - x_0 \cdot \beta - \beta^2\right).$$

Wir haben also in Gleichung (I) das größte Moment, das bei der Laststellung Fig. 123b auftritt, und in Gleichung (II) das

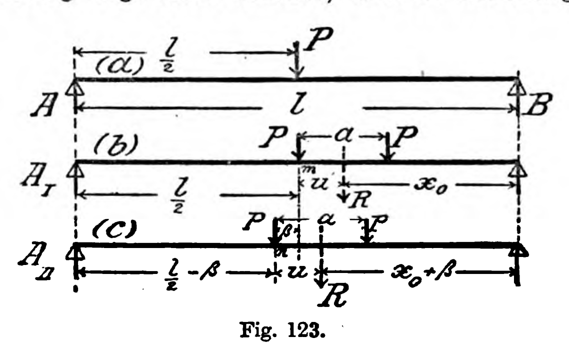


Fig. 123.

größte Moment für Laststellung Fig. 123c. Aus dem Vergleiche der beiden Werte ergibt sich der Unterschied

$$M_{II} - M_I = \frac{R}{l}\left(\beta \cdot \frac{l}{2} - x_0 \cdot \beta - \beta^2\right),$$

$$\text{(III)} \qquad M_{II} - M_I = \frac{R}{l} \cdot \beta\left(\frac{l}{2} - x_0 - \beta\right).$$

Bezeichnen wir die Strecke $\frac{l}{2} - x_0$ (Fig. 123b), die die Entfernung der Ersatzkraft von der ersten Last darstellt, mit u, so geht die Gleichung über in:

$$\text{(IV)} \qquad M_{II} - M_I = \frac{R}{l} \cdot \beta(u - \beta).$$

Digitized by Google

Hierin ist $\frac{R}{l} = \frac{P+P}{l}$ für jeden einzelnen Fall ein bestimmter, unveränderlicher Wert. Je nach der Größe der Strecke β, um die wir die Lasten verschoben haben, wird der Unterschied $M_{II} - M_I$ verschieden ausfallen, und zwar ist der Unterschied um so größer, je größer das Produkt $\beta(u - \beta)$ ist. Am übersichtlichsten wird die Untersuchung, wenn wir β in Bruchteilen von u ausdrücken. Ist z. B. $\beta = 0{,}1\,u$, so wird $\beta(u - \beta) = 0{,}1\,u \cdot 0{,}9\,u = 0{,}09\,u^2$. Wir wollen nun für verschiedene β das Produkt $\beta(u - \beta)$ ausrechnen, um auf diese Weise denjenigen Wert von β zu finden, bei dem $M_{II} - M_I$ am größten wird:

$\beta = 0{,}1\,u$:)	$\beta(u - \beta) = 0{,}09\,u^2$,	$\beta = 0{,}6\,u$:)	$\beta(u - \beta) = 0{,}24\,u^2$,
$= 0{,}2\,u$	$= 0{,}16\,u^2$,	$= 0{,}7\,u$	$= 0{,}21\,u^2$,
$= 0{,}3\,u$	$= 0{,}21\,u^2$,	$= 0{,}8\,u$	$= 0{,}16\,u^2$,
$= 0{,}4\,u$	$= 0{,}24\,u^2$,	$= 0{,}9\,u$	$= 0{,}09\,u^2$,
$= 0{,}5\,u$	$= 0{,}25\,u^2$,	$= 1{,}0\,u$	$= 0{,}00\,u^2$.

Aus dieser Zusammenstellung ist folgendes zu ersehen: Verschieben wir die Lasten zunächst um eine kleine Strecke, z. B. $\beta = 0{,}1\,u$, so wächst das Moment um $\frac{R}{l} \cdot 0{,}09\,u^2$. *Den größten Zuwachs erfährt das Moment dann, wenn $\beta = 0{,}5\,u$ ist.* Wird β größer als $0{,}5\,u$, so wird der Zuwachs wieder kleiner, bis bei $\beta = 1{,}0\,u$ der Zuwachs gleich Null ist; d. h. bei dieser Stellung wäre das Moment ebenso groß wie bei der Stellung Fig. 123b, von der wir ausgegangen sind. Würden wir noch weiter verschieben, so würde der Zuwachs $\beta(u - \beta)$ negativ werden, d. h. das Moment ist dann kleiner als unser ursprüngliches Moment M_I. *Um also das größte Moment zu erhalten, stellen wir die Lasten so auf, daß $\beta = 0{,}5\,u$ ist.* Nun geht bei zwei gleich schweren Lasten die Ersatzkraft R durch die Mitte zwischen den beiden Kräften; es ist also $u = 0{,}5\,a$ (Fig. 123b). Setzen wir diesen Wert in die Gleichung für β ein, so wird

$$\beta = 0{,}5\,u = \frac{a}{4}.$$

Wir haben also zur Aufsuchung des absoluten Maximalmomentes den Satz:

Um bei zwei gleichen Lasten das absolute Maximalmoment M_{abs} zu erhalten, müssen wir die Lasten so stellen, daß die erste um ein Viertel des Abstandes der beiden Lasten über die Trägermitte hinausgeschoben steht.

Digitized by Google

Die Größe des bei dieser Stellung entstehenden Momentes ist:

$$M_{abs} = R\frac{x_0 + \beta}{l}\left(\frac{l}{2} - \beta\right)$$

$$= \frac{R}{l}\left(\frac{l}{2} - \frac{a}{2} + \frac{a}{4}\right)\left(\frac{l}{2} - \frac{a}{4}\right)$$

$$= \frac{R}{l}\left(\frac{l}{2} - \frac{a}{4}\right)\left(\frac{l}{2} - \frac{a}{4}\right),$$

$$M_{abs} = \frac{2P}{l}\left(\frac{l}{2} - \frac{a}{4}\right)^2.$$

Hiermit ist für den Fall zweier gleich schwerer Lasten P, die im Abstande a voneinander wirken, das größte aller am Balken vorkommenden Momente durch eine einfache Formel bestimmt. Es tritt also nicht in der Balkenmitte auf, sondern in den Entfernungen $\frac{1}{4}a$ seitlich (links und rechts) von der Mitte.

III. Belastung durch eine beliebige Gruppe von Einzellasten.

Wir wollen nun in derselben Weise für ein beliebiges Lastensystem die Stellung aufsuchen, bei der M_{abs} entsteht. Hier ist die Schwierigkeit, daß man nicht von vornherein angeben kann,

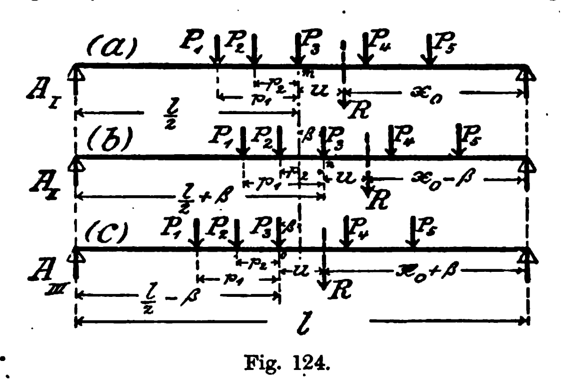


Fig. 124.

unter welcher Last das absolute Moment auftreten wird. Daß das größte Moment *unter* einer Last und nicht etwa *zwischen* zwei Lasten entstehen wird, ist allerdings sicher. Meistens sieht man auch sofort, unter welcher Last das absolute Moment zu erwarten ist. In manchen Fällen müssen aber auf Grund des jetzt zu entwickelnden Verfahrens mehrere Lasten ausprobiert werden.

Wenn in Fig. 124a alle Lasten annähernd gleich groß sind, oder P_3 wenigstens nicht ganz bedeutend kleiner ist als die übrigen, wird M_{abs} unter der mittleren Last, P_3, auftreten. Nun stellen

Digitized by Google

wir die Lasten so, daß P_3 über Trägermitte steht und bestimmen das bei dieser Laststellung entstehende größte Moment

$$M_I = + A_I \cdot \frac{l}{2} - P_1 p_1 - P_2 p_2 \,,$$

$$\text{(I)} \qquad M_I = + R \frac{x_0}{l} \frac{l}{2} - P_1 p_1 - P_2 p_2 \,.$$

Hierauf verschieben wir die Lasten einmal nach der Seite, auf der sich R befindet (Fig. 124b), und dann nach der anderen Seite (Fig. 124c) und sehen nach, ob die jetzt unter P_3 entstandenen Momente größer oder kleiner als M_I sind. Verschieben wir um β nach rechts, so entsteht (am Querschitte n):

$$M_{II} = + A_{II}\left(\frac{l}{2} + \beta\right) - P_1 p_1 - P_2 p_2 \,,$$

$$\text{(II)} \qquad M_{II} = + R \frac{x_0 - \beta}{l}\left(\frac{l}{2} + \beta\right) - P_1 p_1 - P_2 p_2 \,.$$

Hieraus finden wir (nach Auflösung der Klammern usw.):

$$M_{II} - M_I = \frac{R}{l}\left(-\beta \frac{l}{2} + \beta x_0 - \beta^2\right),$$

$$\text{(III)} \qquad M_{II} - M_I = \frac{R}{l} \cdot \beta\left(x_0 - \frac{l}{2} - \beta\right).$$

Hieraus sieht man, daß der Ausdruck in der Klammer negativ ist $\left(\text{da } x_0 \text{ kleiner als } \frac{l}{2} \text{ ist}\right)$; folglich ist auch $M_{II} - M_I$ negativ, d. h. M_{II} ist kleiner als M_I. Die Laststellung Fig. 124b kommt also nicht in Frage.

Nun verschieben wir den Zug um β nach links, und zwar so, daß P_3 *links* von Trägermitte kommt, während R *rechts* davon bleibt. Dann ist das Moment unter P_3 (Querschnitt o):

$$M_{III} = + A_{III}\left(\frac{l}{2} - \beta\right) - P_1 p_1 - P_2 p_2$$

$$= + R \frac{x_0 + \beta}{l}\left(\frac{l}{2} - \beta\right) - P_1 p_1 - P_2 p_2 \,.$$

Der Unterschied zwischen diesem Momente und dem ursprünglichen, M_I, ist:

$$M_{III} - M_I = \frac{R}{l}\left(\beta \frac{l}{2} - \beta x_0 - \beta^2\right),$$

$$\text{(IV)} \qquad M_{III} - M_I = \frac{R}{l} \cdot \beta\left(\frac{l}{2} - x_0 - \beta\right).$$

Digitized by Google

Nun ist $\frac{l}{2} - x_0$ die Entfernung der Last P_3 von der Ersatzkraft R des gesamten Lastensystems (Fig. 124a). Nennen wir diesen Wert u, so ergibt sich

$$\text{(IV a)} \qquad M_{III} - M_I = \frac{R}{l} \cdot \beta(u - \beta),$$

d. i. *dieselbe Formel wie vorhin bei zwei gleich großen Lasten.* Wir können also die am Anfange dieses Paragraphen aufgestellten Untersuchungen hier verwenden. Wir hatten gesehen: Der Unterschied der beiden Momente wird um so größer, je größer β ist, und zwar gilt dieses bis zu dem Werte $\beta = 0{,}5\,u$. Wird β größer als $0{,}5\,u$, so wird der Unterschied wieder kleiner, d. h. der Wert von M_{III} nähert sich wieder dem Werte von M_I. Bei $\beta = u$ ist der Unterschied gleich Null, dann sind die beiden Werte einander gleich. Wird β größer als u (d. h. verschieben wir die Lasten so weit, daß die Ersatzkraft über Trägermitte kommt), so wird der Unterschied negativ, dann wird M_{III} kleiner als M_I. *Der größte Wert, den das Moment unter der Last P_3 überhaupt erreichen kann, entsteht also dann, wenn P_3 um $0{,}5\,u$ vor Trägermitte steht, d. h. wenn die Trägermitte den Abstand zwischen P_3 und R halbiert.*

Wenn man nun im Zweifel ist, ob das absolute Maximalmoment z. B. unter P_3 oder unter P_2 entstehen wird, muß man sowohl für P_3 als auch für P_2 die Werte für M_{abs} ausrechnen und vergleichen.

§ 70a.

Beispiele zu § 70.

Erste Aufgabe.

Ein Laufkran von $l = 8{,}00$ m Spannweite ist für eine Belastung von 12,00 t (Nutzlast + Gewicht der Katze usw.) zu berechnen! (Fig. 125a.)

Das Eigengewicht des Trägers schätzen wir zu $g = 100$ kg pro Meter. Der Radstand betrage 1,20 m. Auf jedes der vier Räder der Katze entfällt eine Last $P = \frac{1}{4} \cdot 12{,}00 = 3{,}00$ t. Wir haben also jeden der beiden Laufbahnträger zu berechnen: a) für eine ruhende, gleichmäßig verteilte Last $g = 100$ kg/m; b) für ein bewegliches System von zwei Lasten von 3,00 t im Abstand von $a = 1{,}20$ m.

Der Träger soll aus Walzeisen gebildet werden. Es kommt also nur darauf an, das überhaupt größte Moment festzustellen, um danach das erforderliche Widerstandsmoment zu bestimmen.

Digitized by Google

Das Maximalmoment infolge Eigengewicht tritt in der Mitte auf und ist

$$M_g = \frac{g\,l^2}{8} = \frac{0{,}10 \cdot 8{,}0^2}{8}$$

$$= 0{,}80 \text{ mt.}$$

($g = 100$ kg/m $= 0{,}100$ t/m, da wir in Meter und Tonnen rechnen wollen.)

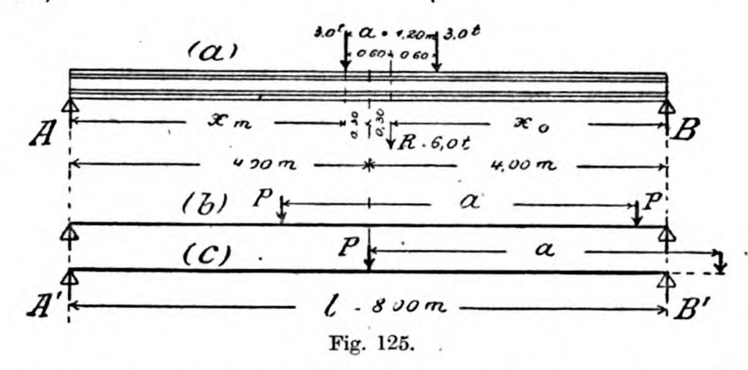


Fig. 125.

Das größte Moment infolge *zwei gleich schwerer*, beweglicher Lasten entsteht dann, wenn die eine Last um $\frac{1}{4}\,a$ seitlich von Trägermitte steht, und zwar ist dieses nach Absatz II:

$$M_{\text{abs}} = \frac{2\,P}{l}\left(\frac{l}{2} - \frac{a}{4}\right)^2$$

$$= \frac{2 \cdot 3{,}0}{8{,}00}(4{,}00 - 0{,}30)^2$$

$$= 10{,}27 \text{ mt.}$$

Nun addieren wir einfach M_g und M_p, trotzdem M_g in Trägermitte und M_p seitlich davon (unter der der Trägermitte zunächst liegenden Last) auftritt, und erhalten das Gesamtmoment

$$M = M_g + M_p = 0{,}80 + 10{,}27 = 11{,}07 \text{ mt.}$$

Nehmen wir nun eine zulässige Beanspruchung von 1000 kg pro Quadratzentimeter = 1,00 t pro Quadratzentimeter, so wird das erforderliche Widerstandsmoment

$$W = \frac{1107 \text{ cmt}}{1{,}00 \text{ t/cm}^2} = 1107 \text{ cm}^3.$$

Verwendet wird I N.-P. 38 mit $W = 1262$ cm³.

Zusatz: Sobald die Entfernung a der beiden Lasten einen gewissen Wert erreicht, muß man zwei Stellungen untersuchen:

Digitized by Google

nämlich: 1. die Stellung Fig. 125b, bei der die eine Last um $\frac{1}{4}a$ vor Trägermitte steht, und 2. die Stellung Fig. 125c, bei der die eine Last den Träger verlassen hat und die andere Last in der Mitte steht. Bei Fig. 125b ist

$$M = A \cdot x_m = R \frac{x_0}{l} \cdot x_m = 2P \frac{\left(\frac{l}{2} - \frac{a}{4}\right)}{l} \cdot \left(\frac{l}{2} - \frac{a}{4}\right)$$
$$= \frac{2P}{l}\left(\frac{l}{2} - \frac{a}{4}\right)^2$$

und bei Fig. 125c

$$M' = A' \cdot \frac{l}{2} = \frac{P}{2} \cdot \frac{l}{2} = \frac{Pl}{4}.$$

Um nun zu bestimmen, bei welchem Radstande a das Moment nach Fig. 125b gleich dem nach Fig. 125c ist, setzen wir $M = M'$, also

$$\frac{2P}{l}\left(\frac{l}{2} - \frac{a}{4}\right)^2 = \frac{Pl}{4},$$

woraus wir (nach Auflösung der Klammer usw.) erhalten:

$$a = 0{,}586\,l.$$

Wenn also der Radstand a gleich $0{,}586\,l$, ist es gleichgültig, ob wir die Lasten nach Fig. 125b oder c aufstellen. Ist a kleiner als $0{,}586\,l$, so ergibt die Stellung 125b das größte Moment. Ist a größer als $0{,}586\,l$, so ist Stellung Fig. 125c maßgebend.

Zweite Aufgabe.

Der Träger Fig. 126a ist für die Belastung Fig. 126b zu berechnen!

Die einfache, bei der vorigen Aufgabe benutzte Formel darf nur dann zur Bestimmung von M_{abs} angewendet werden, wenn es sich um zwei gleich schwere Lasten handelt! Bei Fig. 126b müssen wir also zur Ermittlung des absoluten Maximalmomentes auf die allgemeine Regel zurückgreifen: Zunächst die Ersatzkraft R des Lastensystems bestimmen und dann dieses so aufstellen, daß die Trägermitte den Abstand zwischen R und der Last P, unter der M_{abs} zu erwarten ist, halbiert.

Für Fig. 126b ergibt sich die Lage von R durch Aufstellung der statischen Momente:

$$R \cdot u = 2{,}0 \cdot 1{,}20 + 4{,}0 \cdot 0{,}0\,,$$
$$u = \frac{2{,}0 \cdot 1{,}20}{2{,}0 + 4{,}0} = \frac{2{,}40}{6{,}0} = 0{,}40 \text{ m.}$$

Digitized by Google

Nun sieht man, daß im vorliegenden Falle das größte Moment unter der Last von 4,0 t auftreten wird. Wir stellen also die Lasten so auf (Fig. 126a), daß die Trägermitte zwischen 4,0 t und R ist. Dann ist

$$M_{abs} = A \cdot 3{,}80 = R \frac{3{,}80}{8{,}00} \cdot 3{,}80$$
$$= 6{,}0 \cdot \frac{3{,}80^2}{8{,}00} = 10{,}83 \text{ mt.}$$

Dritte Aufgabe.

Der Träger Fig. 126c und e ist für die Belastung Fig. 126d zu berechnen!

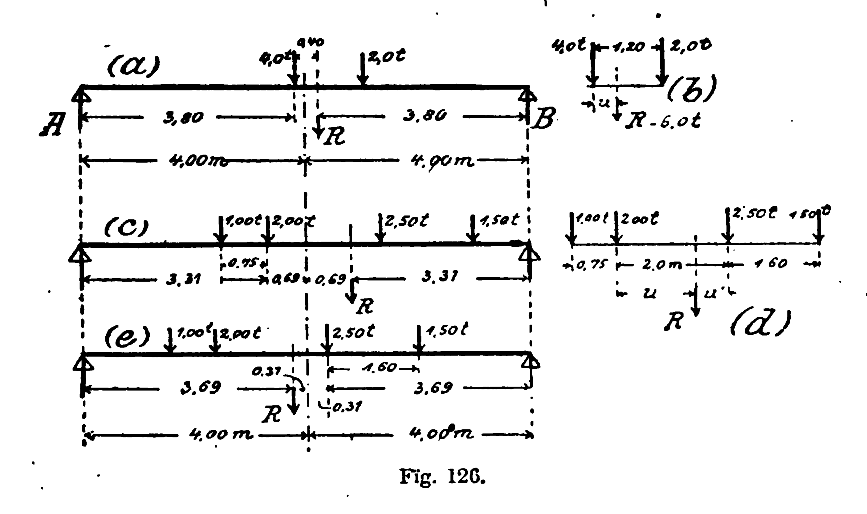


Fig. 126.

Zunächst muß die Lage von R bestimmt werden. Nehmen wir als Bezugspunkt für die statischen Momente einen beliebigen Punkt auf der Last 2,0 t, so ist

$$+ R \cdot u = -1{,}0 \cdot 0{,}75 + 2{,}0 \cdot 0 + 2{,}5 \cdot 2{,}00 + 1{,}5 \cdot 3{,}60;$$
$$u = \frac{9{,}65}{7{,}0} = 1{,}38 \text{ m.}$$

Wenn wir jetzt die Lasten auf dem Träger aufstellen wollen, besteht die Schwierigkeit, daß wir von vornherein nicht angeben können, unter welcher Last M_{abs} entstehen wird. Wir nehmen zunächst an, dieses geschehe unter der Last von 2,0 t; stellen also die Lasten nach Fig. 126c auf und erhalten das größte Moment, das unter der Kraft von 2,0 t entstehen kann:

Digitized by Google

$$M = +A \cdot 3{,}31 - 1{,}0 \cdot 0{,}75$$
$$= +7{,}0 \frac{3{,}31}{8{,}00} \cdot 3{,}31 - 1{,}0 \cdot 0{,}75$$
$$= 9{,}59 - 0{,}75 = 8{,}84 \text{ mt.}$$

Nun probieren wir die Last von 2,50 t aus, stellen also die Belastung so auf, daß Trägermitte zwischen R und der Last von 2,50 t ist (Fig. 126e), und bekommen für diese Laststellung (unter der Last 2,50 t)

$$M = +B \cdot 3{,}69 - 1{,}5 \cdot 1{,}60$$
$$= +7{,}0 \frac{3{,}69}{8{,}00} \cdot 3{,}69 - 1{,}5 \cdot 1{,}60$$
$$= 11{,}90 - 2{,}40 = 9{,}50 \text{ mt.}$$

Da eine andere Last als 2,00 t und 2,50 t nicht in Betracht kommt, so ist das größte Moment, das infolge des obigen Lastensystems an dem Balken entstehen kann, gleich 9,50 mt. Es hat sich ergeben, daß M_{abs} unter der Last entsteht, die der Ersatzkraft R am nächsten steht. Man wird finden, daß dieses fast immer so ist.

---

12. Vortrag:

Auflagerdrücke, Querkräfte und Momente beim überkragenden Balken, beim Frei- und Gerberschen Träger.[1]

§ 71.

Der überkragende Balken bei ständiger Belastung.

Nachdem wir in den beiden letzten Vorträgen die Querkräfte und Momente des einfachen Balkens zwischen zwei Stützen untersucht haben, wollen wir jetzt, als Ergänzung dieser Betrachtungen, einige dem einfachen Balken verwandte Konstruktionen betrachten. In Fig. 127a haben wir einen Balken, der über seine Auflager A und B hinüberkragt (*Balken mit überkragenden Enden*). Die Belastung bestehe aus den Einzellasten $P_1, \ldots, P_4$. Wir beginnen mit

[1]) Dieser Vortrag kann vom Leser auch an späterer Stelle nachgeholt werden.

Digitized by Google

a) Berechnung der Auflagerdrücke. Um die Auflagerkraft A zu bestimmen, stellen wir die Summe der statischen Momente in bezug auf Punkt B auf und erhalten:

$$A \cdot l = P_1 \cdot (c + l) + P_2 \cdot b_2 + P_3 \cdot b_3 - P_4 \cdot d,$$

$$\text{(I)} \qquad A = P_1 \frac{c+l}{l} + \frac{P_2 b_2 + P_3 b_3}{l} - P_4 \frac{d}{l}$$

entsprechend

$$\text{(Ia)} \qquad B = -P_1 \frac{c}{l} + \frac{P_2 a_2 + P_3 a_3}{l} + P_4 \frac{d+l}{l}.$$

Wie man sich leicht überzeugt, ist die Summe $A + B$ gleich der Summe $P_1 + P_2 + P_3 + P_4$. Aus den obigen Gleichungen ist zu ersehen, daß die Beiträge, die die beiden zwischen A und B

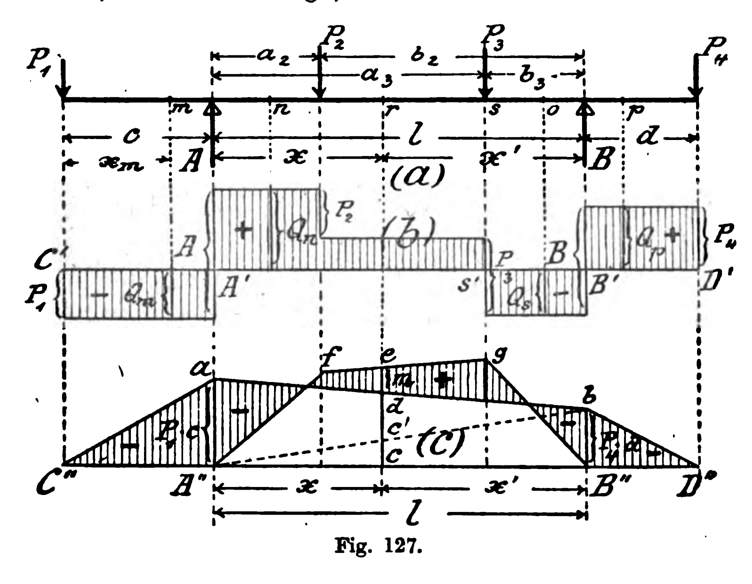


Fig. 127.

stehenden Kräfte P_2 und P_3 zu den Auflagerdrücken A und B liefern, ebenso groß sind wie beim einfachen Balken zwischen zwei Stützen. Es tritt nur noch hinzu der Beitrag von P_1 und P_4. Hierbei zeigt sich aus Gleichung (I), daß der Beitrag, den die Kraft P_1 zum Auflagerdruck A liefert, größer ist als P_1 selber. Der Beitrag der Kraft P_4 dagegen ist negativ. In der Tat ist ja diese Kraft bestrebt, den Balken vom Auflager abzuheben; sie bringt also einen negativen (nach unten gerichteten) Auflagerdruck hervor. Bei B [Gleichung (Ia)] sind die Verhältnisse umgekehrt.

b) Berechnung der Querkräfte. Die weitere Untersuchung dieses Trägers kann nun in derselben Weise geschehen wie beim einfachen

Digitized by Google

Balken. Wollen wir die inneren Kräfte bestimmen, die an einer beliebigen Stelle, m, des Balkens wirksam sind, so berechnen wir zunächst für diesen Querschnitt die Querkraft Q_m und das Moment M_m. Die Kraftsumme für den Schnitt m von Fig. 127a ist gleich $-P_1$. Denn, betrachten wir den Teil *links* von m, so haben wir als einzige äußere Kraft die Last P_1. Da nun am linken Teile die abwärts gerichteten Kräfte negativ gezählt werden, so ist also

$$Q_m = -P_1 .$$

Für den Schnitt n haben wir die beiden äußeren Kräfte P_1 und A. Da letztere nach oben wirkt, so wird

$$Q_n = -P_1 + A .$$

In derselben Weise bestimmen sich:

$$Q_o = -P_1 + A - P_2 - P_3 = +P_4 - B ,$$
$$Q_p = -P_1 + A - P_2 - P_3 + B = +P_4 .$$

Trägt man diese Querkräfte graphisch auf, so entsteht die in Fig. 127b dargestellte Querkraftfläche. Hierbei ist angenommen, daß der Auflagerdruck A größer als P_1 ist, so daß die Querkraft für einen Schnitt rechts von A positiv ist. Es kann natürlich auch der Fall eintreten, daß A kleiner als P_1 ist (wenn P_4 sehr groß ist). Dann bekommt auch für einen Querschnitt rechts von A die Querkraft einen negativen Wert.

c) Berechnung der Momente. Um das Moment für Punkt m zu berechnen, bilden wir das Produkt aus der Kraft P_1 mal der Entfernung x_m. Da am linken Teile die linksherum zeigenden Kräfte negativ gerechnet werden, so ist

$$M_m = -P_1 \cdot x_m .$$

Für den Querschnitt, der gerade über der Stütze A liegt, ist das Biegungsmoment

$$M_A = -P_1 \cdot c .$$

Entsprechend ist das Moment über der Stütze B:

$$M_B = -P_4 \cdot d .$$

(Am rechten Teile wurden die rechtsherum drehenden Momente negativ genommen.) Diese beiden Momente heißen die „Stützenmomente". Für einen zwischen den Stützen liegenden Punkt, r, ist das Biegungsmoment

$$M_r = +A \cdot x - P_1(c + x) - P_2(x - a_2)$$

oder

$$M_r = +B \cdot x' - P_4(d + x') - P_3(x' - b_3) .$$

Digitized by Google

Mitunter ist es aber einfacher, folgenden Weg zur Berechnung von M_r einzuschlagen: Betrachte ich die beiden außenstehenden Lasten P_1 und P_4 für sich allein, so ist deren Anteil, M_r', an dem Biegungsmoment M_r:

$$M_r' = +A' \cdot x - P_1(c + x).$$

(A' sei der Auflagerdruck infolge P_1 und P_4.) Da

$$A' = +P_1 \frac{c+l}{l} - P_4 \frac{d}{l}$$

ist, so folgt für M_r':

$$\begin{aligned} M_r' &= +\left(P_1 \frac{c+l}{l} - P_4 \frac{d}{l}\right) x - P_1(c + x) \\ &= +P_1 \frac{c}{l} x + P_1 \frac{l}{l} x - P_4 \frac{d}{l} x - P_1 c - P_1 x \\ &= -P_1 c\left(1 - \frac{x}{l}\right) - P_4 \frac{d}{l} x \\ &= -P_1 c \frac{l-x}{l} - P_4 d \frac{x}{l}, \\ M_r' &= -P_1 c \frac{x'}{l} - P_4 d \frac{x}{l}. \end{aligned}$$

Nun sind $-P_1 c$ und $-P_4 d$ die Biegungsmomente über den Stützen (Stützenmomente). Tragen wir diese in Fig. 127 c in einem beliebigen Maßstab auf, so daß $A''a = P_1 \cdot c$ und $B''b = P_4 \cdot d$ ist, und verbinden a mit b, so ist die unter dem Punkte r gemessene Strecke

$$\begin{aligned} c d &= c c' + c' d \\ &= P_4 d \frac{x}{l} + P_1 c \frac{x'}{l} \\ &= -M_r'; \end{aligned}$$

d. h. *die Strecke cd stellt den Anteil M_r' dar, den die beiden Kräfte P_1 und P_4 an dem Biegungsmoment M_r haben.* Dieser Anteil ist negativ wie sich aus der obigen Gleichung ergibt.

Nun gehen wir zu den Kräften P_2 und P_3. Diese beiden Kräfte wirken auf die überkragenden Teile überhaupt nicht ein. Sie bringen nur in dem zwischen A und B gelegenen Balkenteile Biegungsmomente hervor, so daß sich der Träger unter der Einwirkung von P_2 und P_3 ebenso verhält wie ein einfacher Balken, der von A bis B reicht. Wir können also nach den früheren

Digitized by Google

Methoden die zu P_2 und P_3 gehörige Momentenfläche zeichnen — sie wurde in Fig. 127c zu $A''fgB''$ angenommen — und haben dann durch die Strecke ce die graphische Darstellung des Biegungsmomentes infolge P_2 und P_3. Wir wollen diesen Anteil M_r'' nennen; er ist positiv, wie aus dem Früheren bekannt ist. Das Moment infolge des gleichzeitigen Einwirkens von P_1 und P_4, und P_2 und P_3 ist also

$$\begin{aligned} M_r &= M_r'' + M_r' \\ &= ce - cd \\ &= de . \end{aligned}$$

Die Strecke de stellt demnach graphisch das zu dem Schnitte r gehörige Biegungsmoment dar. Entsprechend finden wir für jeden anderen Querschnitt das Biegungsmoment. Die in Fig. 127c schraffierte Fläche ist also die Momentenfläche, d. h. ihre Ordinaten geben für jeden Querschnitt das zugehörige Biegungsmoment.

Meistens wird es aber bequemer sein, das Moment M_r analytisch zu ermitteln. Dann berechnen wir also zunächst die Stützenmomente

$$M_A = -P_1 \cdot c \quad \text{und} \quad M_B = -P_4 \cdot d$$

und erhalten hiermit das gesuchte Moment im mittleren Teile:

$$M_r = M_r'' + M_A \cdot \frac{x'}{l} + M_B \frac{x}{l} .$$

Hierin wird das Moment M_r'' so berechnet, als ob sich der Balken nur über den mittleren Teil A—B erstreckt. Der Einfluß der überkragenden Arme dagegen kommt durch die beiden letzten Glieder der obigen Gleichung zum Ausdruck. Da M_A und M_B negativ sind, stellen diese beiden letzten Glieder die *Verminderung* des Momentes dar, die die Stelle r dadurch erfährt, daß der Balken über seine Stützpunkte auskragt. Die Kragarme wirken also günstig (verkleinernd) auf die Momente des mittleren Teiles.

d) Von besonderem Interesse ist natürlich wieder die Frage nach dem Maximalmoment. Hierzu sieht man aus Fig. 127b, daß die Querkraft nicht, wie beim einfachen Balken, an *einer* Stelle aus dem Positiven in das Negative übergeht, sondern daß ein solcher Übergang an *drei* Stellen, bei A', s', B', stattfindet. Direkt unter der Last P_1 ist das Moment gleich Null. Die Querkraft ist von da ab negativ; also ist auch die Zunahme des Momentes negativ. Das Moment nimmt von Null ab, d. h. es wird negativ und erreicht dann bei A einen Maximalwert. Von A ab nähert

Digitized by Google

es sich dem Werte Null, wird dann positiv und erreicht bei *s* den größten positiven Wert. Von hier aus nimmt das Moment wieder ab, wird negativ und erreicht bei B einen zweiten Maximalwert im negativen Teil. Man muß also bei einem derartigen Balken für die *drei Stellen*, an denen die Querkraft ihr Vorzeichen wechelt, die Biegungsmomente ausrechnen und miteinander vergleichen.

Besonders beachte man, daß beim überkragenden Balken sowohl positive als auch negative Momente vorkommen. In den Kragarmen sind die Momente nur negativ; im mittleren Teile sind sie teils positiv, teils negativ. Daraus folgt: In den Kragarmen herrschen in den oberen Fasern stets *Zug*spannungen, in den unteren stets *Druck*spannungen. Im mittleren Teile ist entweder oben Zug, unten Drück oder oben Druck und unten Zug.

§ 72.

Der Freiträger.

Wenn die beiden Auflager A und B des vorhin behandelten Kragträgers eng zusammenrücken und der eine überkragende Teil gleich Null wird, entsteht der in Fig. 128a dargestellte **Freiträger** (Konsolträger, Balkonträger). Dessen Auflagerdrücke, Querkräfte und Momente können wir also nach den im vorigen Paragraphen entwickelten Methoden ermitteln. Der Auflagerdruck bei B ist negativ (nach unten wirkend). Man wird also zweckmäßig bei B das Lager an der oberen Fläche des Trägers anordnen. Ist nicht genügend Aufmauerung vorhanden, so muß man eine nach unten gehende Verankerung vorsehen. Meistens handelt es sich hierbei aber nur um kleinere Konstruktionen. Der Träger wird dann einfach im Mauerwerk eingemauert; allenfalls kann man nach Fig. 128b noch zwei Platten hinzufügen. Die Querkraft ist für einen beliebigen Querschnitt m

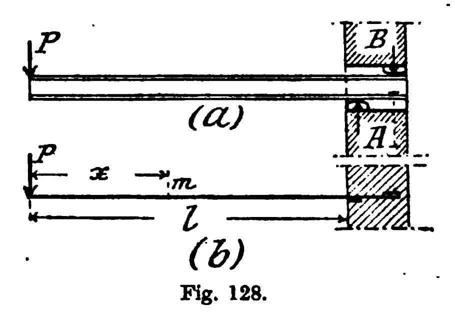


Fig. 128.

$$Q_m = -P.$$

Das Moment ist

$$M_m = -P \cdot x.$$

Während die Querkraft für alle Querschnitte dieselbe ist, wächst das Moment mit der Entfernung x und wird an der Einspannstelle gleich $-P \cdot l$. Da die Querkraft an der Mauerkante nicht gleich Null ist, kann auch nicht an dieser Stelle das Maximalmoment eintreten. Dieses entsteht vielmehr an einem Querschnitt, der bereits in der Einmauerung liegt (in Fig. 128a bei dem Querschnitt über A). Man kümmert sich aber darum nicht weiter, sondern rechnet den Balken nach der einfachen Formel

$$M_{\max} = -P \cdot l .$$

§ 73.

Der überkragende Balken bei beweglicher Belastung. Einflußlinien.

Am übersichtlichsten gestaltet sich die Betrachtung einer beweglichen Belastung, wenn wir die Untersuchung mittels Einflußlinien durchführen.

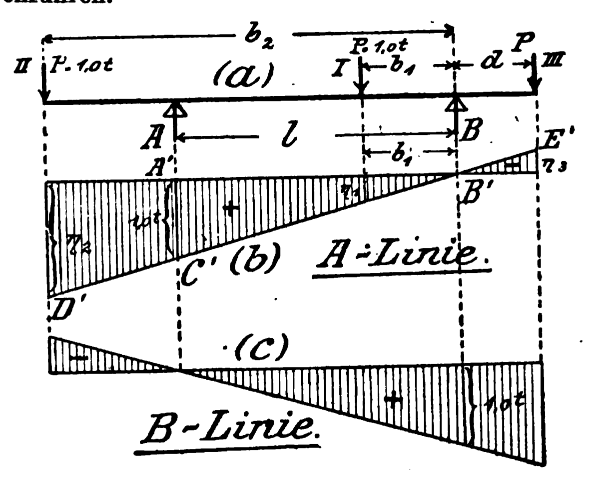


Fig. 129.

a) Einflußlinie für den Auflagerdruck. Auf dem Balken befindet sich an der Stelle I eine Last $P = 1{,}0$ t (Fig. 129a). Dann ist der Auflagerdruck

$$A_I = P \cdot \frac{b_1}{l} = 1{,}0 \cdot \frac{b_1}{l},$$

und diesen Ausdruck tragen wir in bekannter Weise graphisch auf, indem wir in Fig. 129b $A'C' = 1{,}0$ t zeichnen und C' mit B' verbinden. Dann ist $A_I = \eta_1$.

Digitized by Google

Rückt nun die Last in die Stellung II, so ist der jetzt entstehende Auflagerdruck:

$$A_{II} = P \cdot \frac{b_2}{l} = 1{,}0 \cdot \frac{b_2}{l} .$$

Graphisch stellen wir diesen Ausdruck dar, indem wir die Linie $B'C'$ verlängern bis D'. Dann ist

$$\eta_2 : 1{,}0 = b_2 : l ;$$

$$\eta_2 = 1{,}0 \cdot \frac{b_2}{l} = A_{II} .$$

Steht die Last auf dem über B hinauskragenden Trägerteil, Laststellung III, so ist

$$A_{III} = -1{,}0 \cdot \frac{d}{l} .$$

(A ist negativ, d. h. der Träger hat das Bestreben, sich vom Lager abzuheben.) Diesen Ausdruck stellen wir graphisch dar, indem wir die Linie $C'B'$ über B' hinaus verlängern. Dann ist

$$\eta_3 : 1{,}0 = d : l ,$$

$$\eta_3 = 1{,}0 \frac{d}{l} = A_{III} ,$$

und zwar ist diese Ordinate negativ zu nehmen. Die Linie $D'C'B'E'$ hat also folgende Eigenschaft: *Steht an beliebiger Stelle eine Last $P = 1{,}0$ t, so ergibt die darunterliegende Ordinate den Auflagerdruck A. Sie ist die Einflußlinie für den Auflagerdruck A des überkragenden Balkens (A-Linie).*

In Fig. 129c ist noch die Einflußlinie für den Auflagerdruck B gezeichnet; sie dürfte ohne weitere Erklärung verständlich sein.

b) Einflußlinie für die Querkraft. Steht die Last $P = 1{,}0$ t an der Stelle I (Fig. 130a) und betrachten wir zunächst Querschnitt m, so ist links von diesem Schnitte überhaupt keine Kraft. Es ist also bei dieser Laststellung $Q_m = 0$. Dasselbe Resultat ergibt sich für jede andere Stellung, die die Last rechts vom Schnitte m einnimmt. Es ist dann immer die Summe aller links oder rechts von m befindlichen Kräfte gleich Null. Rückt die Last aber links vom Schnitte m (Stellung III), so ist $Q_m = -P = -1{,}0$ t. Um nun die Querkraft für alle möglichen Laststellungen graphisch aufzutragen, zeichnen wir (Fig. 130b) die Linie $MNOR$, deren Ordinaten von M bis N gleich $-1{,}0$ t und von O bis R gleich Null sind; sie ist also die Einflußlinie für Q_m.

Digitized by Google

In Fig. 130c ist in entsprechender Weise die Einflußlinie für die Querkraft eines Schnittes, n, im rechten auskragenden Teil dargestellt.

Untersuchen wir nun einen Querschnitt, o, zwischen den Stützen, so ist bei Laststellung I die Querkraft gleich dem bei dieser Stellung entstehenden Auflagerdruck A_I; $Q_0 = +A_I$. Rückt die Last in Stellung IV, und betrachten wir wieder den Teil links vom Schnitte o, so ist $Q = +A_{IV}$. Solange also die Last *rechts* vom Schnitte steht, ist die Querkraft gleich dem bei der betreffenden Laststellung entstehenden Auflagerdruck A. Ergibt die

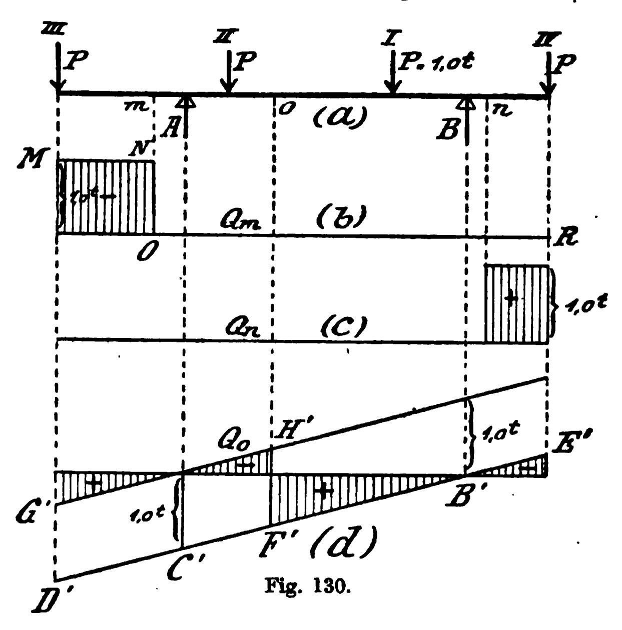


Fig. 130.

Laststellung einen positiven (nach aufwärts gerichteten) Wert von A, z. B. bei Stellung I, so ist auch Q positiv; ist aber bei der betreffenden Stellung der Auflagerdruck A negativ (abwärts gerichtet), so ist auch Q negativ. Um nun Q für die verschiedenen Laststellungen graphisch darzustellen, zeichnen wir die Einflußlinie $D'C'B'E'$ für den Auflagerdruck A. Steht dann an beliebiger Stelle eine Last $P = 1{,}0$ t, so ergibt die unter der Last befindliche Ordinate den Auflagerdruck A und damit die Querkraft für den Schnitt o. Dieses gilt aber nur so lange, als P sich *rechts* vom Schnitte befindet. Rückt es *links* von o (Stellung II oder III), so ist die Querkraft gleich dem Auflagerdruck A vermindert um P. Einfacher ist es jedoch, dann den *rechts* von o befindlichen Träger-

Digitized by Google

teil zu betrachten. Dann haben wir den Auflagerdruck B als einzige äußere Kraft, und die Querkraft ist gleich dem negativen Wert von B (beim rechten Teile werden die aufwärts wirkenden Kräfte negativ gezählt). Eine Laststellung, die einen positiven Auflagerdruck B erzeugt, ergibt also eine negative Querkraft, und umgekehrt. Aus diesem Grunde tragen wir, um für alle Laststellungen links von o die Querkraft Q_0 graphisch darzustellen, die Einflußlinie für B nach oben ab und benutzen von dieser den

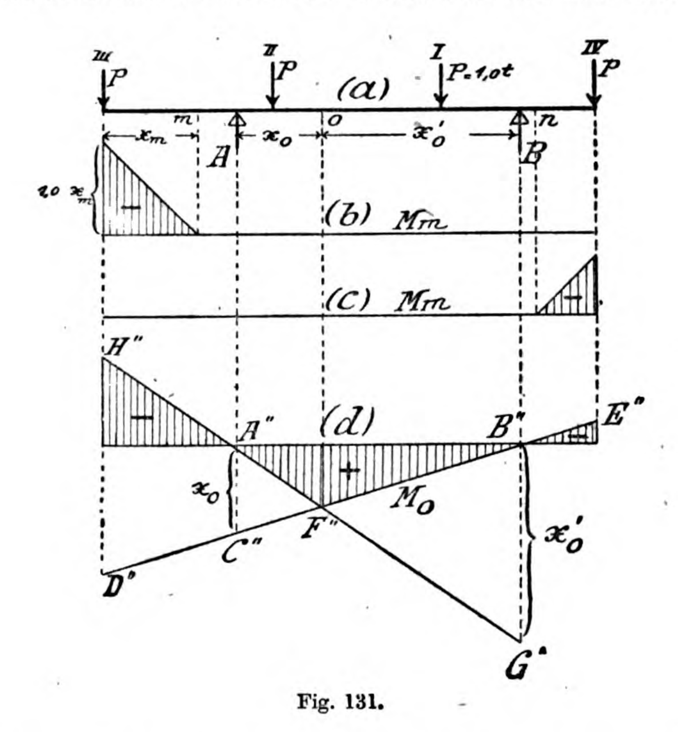


Fig. 131.

Teil $G'H'$. Die Linie $G'H'F'E'$ ist also die Einflußlinie für die Querkraft des Schnittes o.

c) Einflußlinie für das Moment. Wir beginnen wieder mit Querschnitt m (Fig. 131a). Steht die Last an der Stelle I, so ist das Moment am Punkte m, M_m, gleich Null. Dieses folgt daraus, daß dann links vom Schnitte überhaupt keine Kräfte vorhanden sind, und also kein Biegungsmoment M_m entstehen kann. Aber auch ohne besondere Untersuchung erkennt man, daß eine zwischen den Auflagerpunkten A und B stehende Last an den überkragenden Enden keine Momente hervorrufen wird. Rückt nun die Last $P = 1{,}0$ t zunächst bis zu Punkt m, so bleibt M_m noch

Digitized by Google

gleich Null. Sobald sie dann aber weiter nach links steht, Stellung *III*, entsteht am Punkte m ein Biegungsmoment

$$M_m = -P \cdot x_m = -1{,}0 \cdot x_m \,.$$

Die in Fig. 131b dargestellte Linie ist also die Einflußlinie für M_m. Entsprechend zeigt Fig. 131c die Einflußlinie für einen Schnitt, n, am rechten Teile.

Bei dem Querschnitte o betrachten wir, solange P rechts von o ist, den linken Teil und haben dann $M_m = +A \cdot x_0$. Um für diese Stellungen die Einflußlinie für das Moment M_0 zu finden, tragen wir die A-Linie im x_0-fachen Maßstabe auf. Wir zeichnen also $A''C'' = x_0 \cdot 1{,}0$, ziehen $D''E''$ und benutzen hiervon den rechts von o gelegenen Teil $F''E''$. Wenn A positiv ist (bei Laststellung *I*), ist auch das Moment positiv, da am Teile links vom Schnitte die rechtsherum zeigenden Kräfte positiv gezählt werden. Ist A negativ (bei Laststellung *IV*), so ist auch M negativ. Steht nun die Last links vom Schnitte o, so berechnen wir M_0 aus den am rechten Teile angreifenden Kräften und erhalten $M_0 = +B \cdot x_0'$. Dieser Teil der Einflußlinie für das Biegungsmoment wird also erhalten, indem die B-Linie im x_0'-fachen Maßstabe aufgetragen wird, und zwar ist es dort positiv (negativ), wo B positiv (negativ) ist. In Fig. 131d sind die Teile der B-Linie, die nicht gebraucht werden, der Einfachheit wegen fortgelassen. Die Linie $H''F''E''$ ist also die Einflußlinie für das Biegungsmoment am Schnitte o. Im mittleren Teile, $A''F''B''$, stimmt sie überein mit der Einflußlinie für M_0, die für den Fall gezeichnet ist, daß der Balken nur zwischen A und B reicht. In der Tat kommen ja, solange sich die Lasten zwischen A und B befinden, die überkragenden Teile nicht in Betracht.

§ 74.

Der Gerbersche Träger. Einflußlinien.

Das Prinzip des Gerberschen Trägers. In Fig. 132a haben wir einen Balken AB, der außer an dem festen Lager A und dem beweglichen B noch zwischen diesen beiden Lagern, bei C, gestützt ist. Wir haben hier also an den Auflagern vier Unbekannte, nämlich bei A Größe und Richtung, bei B Größe und bei C ebenfalls die Größe der Auflagerkraft. Um nun die Auflagerdrücke zu ermitteln, stehen die drei Gleichgewichtsbedingungen zur Verfügung. Die erste, $R_x = 0$, sagt aus, daß die am festen Lager wirkende

Digitized by Google

Auflagerkraft ebenfalls vertikal gerichtet ist, wenn die Last P vertikal wirkt. Die beiden anderen Bedingungen lauten (mit C als Bezugspunkt):

$$\text{(II)} \qquad R_y = +A + B + C - P = 0\,,$$

$$\text{(III)} \qquad \Sigma M = +A \cdot l_1 - B \cdot l_2 - P \cdot b = 0\,.$$

(Die Kraft B wirkt in Wirklichkeit abwärts; dieses Resultat ergibt sich dann aus der Berechnung von selber.) Aus diesen beiden Gleichungen allein lassen sich jedoch die drei Unbekannten, A, B und C, nicht ermitteln; die Aufgabe ist also statisch unbestimmt (vgl. § 19, Schluß).

Wie sich trotzdem, aber unter Zuhilfenahme der elastischen Formänderungen, die Berechnung durchführen läßt, wird später bei der Untersuchung dieser statisch unbestimmten Systeme be-

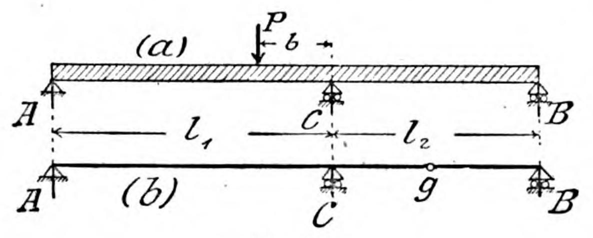


Fig. 132.

handelt werden. Hier soll nur der Weg gezeigt werden, um das vorliegende System statisch bestimmt zu machen: Wir nehmen statt des einen, zusammenhängenden Balkens AB zwei getrennte Balken AG und GB und verbinden diese durch ein Gelenk. Wir haben also einen einfachen Balken GB mit dem beweglichen Lager bei B und dem festen (Bolzenlager) bei G, und einen überkragenden Balken AG. Ordnen wir das Gelenk direkt über dem Auflager C an, so entstehen zwei einfache Balken, AC und CB, die aber, wie alle einfachen Balken, den Nachteil haben, daß das Material hauptsächlich nur in der Mitte der Stützweite ausgenützt werden kann. Nimmt man aber das Gelenk nach Fig. 132b, so hat man einen einfachen Balken von der kurzen Spannweite GB und einen überkragenden Träger ACG, der durch den „*eingehängten Träger*“ GB teilweise entlastet wird. **Diesen überaus fruchtbaren Gedanken, durch Anordnung von Gelenken statisch bestimmte Konstruktionen mit sehr günstiger Materialausnutzung zu erzielen, verdanken wir *Gerber*.**

Digitized by Google

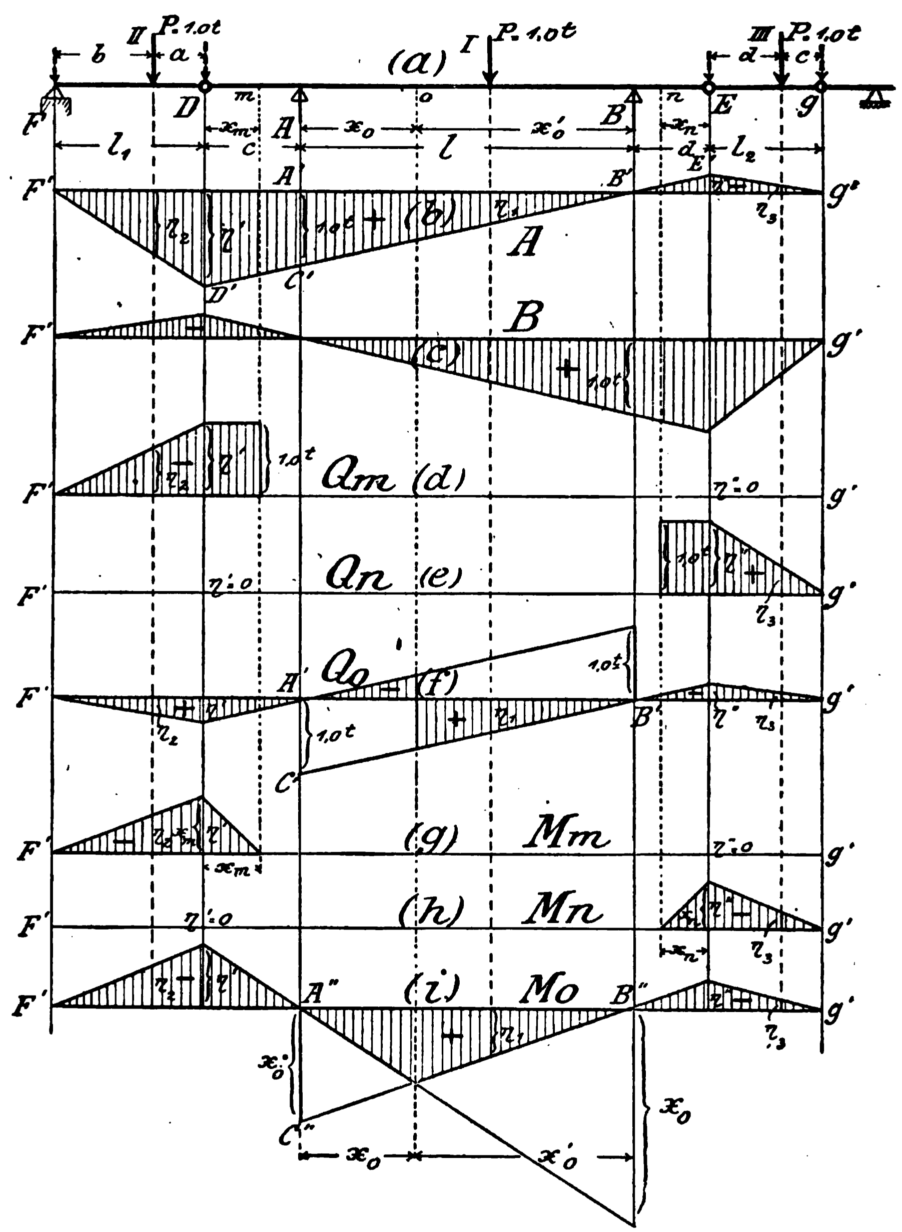


Fig 133.

Digitized by Google

Bei **ständiger Belastung** berechnet man die Momente und Querkräfte, indem man zunächst den eingehängten Teil untersucht und dann dessen Auflagerdruck im Gelenkpunkte als äußere Kraft für den Kragträger einführt.

Bei **beweglicher Belastung** benutzt man am besten Einflußlinien.

a) Einflußlinie für den Auflagerdruck. Der *Gerber*sche Träger in Fig. 133 besteht aus dem überkragenden Balken DE und den eingehängten Trägern (auch Koppelträger genannt) FD und EG. Hieran schließt sich dann das Widerlager resp. der folgende Träger an. Um nun die Einflußlinie für den Auflagerdruck A zu zeichnen, beachten wir, daß, solange sich die Last zwischen D und E befindet, nur der überkragende Balken DE in Frage kommt. Die eingehängten Träger sind dann unbelastet und treten überhaupt nicht in Erscheinung. Die Einflußlinie für A für einen Träger mit überkragenden Enden wurde bereits in § 73 (Fig. 129) abgeleitet. In Fig. 133b ist sie durch die Linie $D'E'$ dargestellt. Wir haben also z. B. für die Laststellung I den Auflagerdruck $A_I = P \cdot \eta_1$.

Tritt nun die Last $P = 1{,}0$ t auf den eingehängten Träger FD (Laststellung II), so berechnen wir zunächst die Auflagerdrücke dieses Trägers auf seine Unterstützungspunkte F und D und erhalten bei F einen Auflagerdruck von $1{,}0 \cdot \frac{a}{l_1}$ und bei D einen Druck von $1{,}0 \cdot \frac{b}{l_1}$. Der erstere Druck geht auf das Widerlager und kommt also für A nicht in Betracht. Der zweite wirkt als Einzellast im Punkte D. Stände in D eine Last von 1,0 t, so wäre $A = 1{,}0 \cdot \eta'$. Nun haben wir in D eine Last von $1{,}0 \cdot \frac{b}{l_1}$; folglich ist $A_{II} = \frac{b}{l_1} \cdot \eta'$. Dieses ist also der Auflagerdruck A_{II}, wenn in II eine Last von 1,0 t steht. Um den Ausdruck graphisch aufzutragen, verbinden wir, in Fig. 133b, D' mit F' und erhalten die unter II liegende Ordinate

$$\eta_2 = \eta' \cdot \frac{b}{l_1} = A_{II}.$$

Steht die Last an der Stelle III, so ermitteln wir den Auflagerdruck $E = 1{,}0 \frac{c}{l_2}$ und finden

$$A_{III} = -\frac{c}{l_2} \cdot \eta'' = -\eta_3.$$

Digitized by Google

Die Linie $F'D'E'G'$ ist also die Einflußlinie für den Auflagerdruck A. In genau entsprechender Weise ist in Fig. 133c die Einflußlinie für den Auflagerdruck B konstruiert.

b) Einflußlinie für die Querkraft. Die Einflußlinie für die Querkraft bestimmen wir in derselben Weise wie vorhin den Auflagerdruck. Solange sich die Last zwischen D und E befindet, haben wir es nur mit dem überkragenden Träger zu tun. Für diesen sind die Einflußlinien für die Querkraft am Schnitte m (Fig. 133d), am Schnitte n (Fig. 133e) und am Schnitte o (Fig. 133f) unter Fortlassung der nicht gebrauchten Strecken dargestellt. Um nun diese Einflußlinien auch für den Fall zu vervollständigen, daß die Last auf die eingehängten Träger FD oder EG tritt, bestimmen wir die Punkte F' unter F und verbinden sie mit den Endpunkten der Ordinaten η', und die Punkte G' unter G und verbinden diese mit den Endpunkten der Ordinaten η''. Steht dann z. B. an der Stelle II die Last $P = 1{,}0$ t, so sind die unter der Last liegenden Ordinaten η_2 in Fig. 133d, e und f gleich der Querkraft für Schnitt m, n, o. Der Beweis dafür entspricht genau der unter a) gegebenen Ableitung für den Auflagerdruck A bei den Laststellungen II und III.

c) Einflußlinie für das Moment. Die Einflußlinie für die Biegungsmomente in den Schnitten m, n, o sind in Fig. 133g, h und i dargestellt. Sie sind in derselben Weise abzuleiten, wie es vorhin für Auflagerdruck und Querkraft geschehen ist. Für alle Laststellungen zwischen D und E kommt nur der überkragende Balken DE in Betracht. Tritt dann die Last auf die eingehängten Träger, z, B. Stellung III, so bestimmt man zunächst die Auflagerdrücke dieses Trägers $E = 1{,}0 \cdot \frac{c}{l_2}$ und $G = 1{,}0 \cdot \frac{d}{l_2}$. Letzterer kommt nicht in Betracht. Ersterer wirkt als Einzellast in E und erzeugt ein Moment

$$M = \frac{c}{l_2} \cdot \eta''.$$

Dieser Ausdruck wird dann graphisch dargestellt, indem wir den Endpunkt der Ordinaten η'' mit den Punkten G' verbinden und die Laststellung III hinunterloten. Dann ist

$$M = P \cdot \eta_3 .$$

Entsprechend werden dann die Einflußlinien auf der linken Seite für den eingehängten Träger FD vervollständigt.

Digitized by Google

§ 75.

Spezialfall: Gerberträger mit gleichförmiger Belastung und gleichmäßiger Stützenentfernung.

I. Allgemeines.

In der Praxis kommt häufig die Aufgabe vor, eine Anzahl von gleichweiten Durchfahrten durch Träger zu überbrücken, die eine gleichmäßig verteilte Last aufzunehmen haben. In Fig. 134a ist ein solcher Fall gezeichnet. Der Abstand zwischen den beiden Endwiderlagern ist durch sechs Zwischenpfeiler in sieben gleiche Öffnungen (Durchfahrten) geteilt, die sämtlich die Länge l haben. Die aufzunehmende Last sei gleichmäßig verteilt und betrage g kg/m. Wie wird man eine solche Pfeilerreihe mittels Walzträger zweckmäßig überbrücken?

Wenn man jede Öffnung durch einen einfachen Träger von der Länge l überbrückt, hat man den Nachteil, daß jeder Träger nur in der Mitte der Spannweite, wo das Maximalmoment auftritt, vollständig ausgenützt ist. Die übrigen Teile des Trägers haben, da er ein Walzeisenprofil sein sollte, denselben Querschnitt wie die am meisten beanspruchte Stelle, trotzdem sie bedeutend geringere Momente aufzunehmen haben. Sie werden also gar nicht bis zur zulässigen Grenze ausgenützt. Auf diese Weise bedingt die Konstruktion eine bedeutende Materialverschwendung.

Letztere läßt sich nun vermeiden durch die Anwendung von Gerberträgern: In jedem zweiten Felde ordnen wir einen überkragenden Balken an und verbinden je zwei solcher überkragenden Balken bzw. einen überkragenden Balken und das anstoßende Endwiderlager durch einen „eingehängten Träger". Diese „eingehängten Träger" (Koppelträger) können natürlich schwächer genommen werden als Balken von der Spannweite l, da sie ja eine geringere Stützweite haben. Aber auch die überkragenden Träger werden schwächer als entsprechende, nur von Pfeiler zu Pfeiler reichende Balken. Denn durch Auskragung seiner Enden werden die Momente eines Balkens zwischen den Stützpunkten verringert, wie Fig. 127c bei dem daselbst untersuchten auskragenden Balken zeigte (vgl. § 71, c). Insgesamt wird sich also durch Verwendung von Gelenkträgern eine erhebliche Materialersparnis erzielen lassen.

Die allgemeine Theorie der *Gerber*schen Träger ist bereits in den beiden letzten Paragraphen durchgenommen. Wir wollen sie jetzt für die besonderen Verhältnisse des vorliegenden Falles er-

Digitized by Google

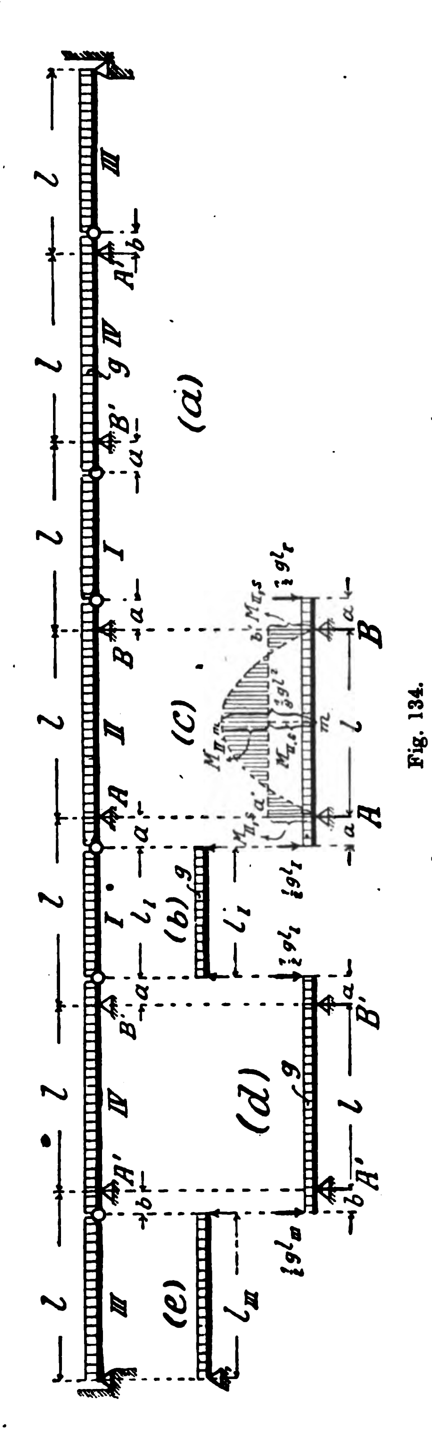


Fig. 134.

gänzen, die darin bestehen, daß erstens sämtliche Träger in gleicher Weise belastet werden und zweitens die Entfernung der Stützpunkte voneinander gleich ist.

Die Belastung der Längeneinheit sei g; die Stützenentfernung sei l, und die Gelenke seien nach Fig. 134a angeordnet. Wir wollen nun die Biegungsmomente berechnen und hierbei die Frage untersuchen: Wie lang müssen die Auskragungen a und b genommen werden, damit die an den verschiedenen Stellen des Trägerzuges entstehenden größten Momente einander gleich werden, d. h. damit das Material möglichst gleichmäßig ausgenutzt wird?

II. Berechnung des normalen Kragträgers *II* (Fig. 134a).

In Fig. 134a haben wir im ganzen drei Kragträger und vier eingehängte Träger. Je ein Kragträger und ein eingehängter Träger folgen aufeinander. Den mittleren Kragträger *II* wollen wir den normalen Kragträger nennen, weil er nach beiden Seiten gleichweit über die Auflager auskragt. (Die beiden seitlichen Kragträger *IV* haben nach den Endwiderlagern zu anormale Auskragungen.) Zunächst werde ein solcher normaler Kragträger untersucht.

Bei einem Kragträger tritt das größte Moment entweder über den Stützen oder im mittleren Teile auf (§ 71, c; Fig. 127c). Durch eine bestimmte Länge der

Digitized by Google

Auskragung a — die wir später bestimmen werden — läßt sich erzielen, daß die Stützenmomente gerade gleich dem größten mittleren Momente sind. In diesem für die Materialausnützung natürlich sehr günstigen Falle ergibt sich dann für das Stützenmoment und das mittlere Moment folgender Wert:

Allgemein ist nach § 71, c das Moment im mittleren Teile eines Kragträgers:

$$M = M'' - M_A \cdot \frac{x'}{l} - M_B \cdot \frac{x}{l}.$$

(Hierin ist M'' das Moment des Querschnittes, wenn man nur den mittleren Teil des Balkens als vorhanden annimmt; M_A und M_B sind die Stützenmomente; x' und x sind die Abstände des betrachteten Querschnittes von den Lagerpunkten B und A.)

Nun sind (Fig. 134c) die Stützenmomente M_A und M_B des Trägers II aus Symmetriegründen einander gleich. Sie mögen mit $M_{II,s}$ bezeichnet werden. Das Moment M'' ist nach Fig. 134c:

$$M'' = \frac{1}{8} g l^2.$$

Die Abstände x' und x sind gleich $l/2$.

Somit ergibt sich für das größte Moment des mittleren Teiles:

$$M_{II,m} = \frac{1}{8} g l^2 - M_{II,s} \cdot \frac{l}{2l} - M_{II,s} \cdot \frac{l}{2l}$$

$$= \frac{1}{8} g l^2 - M_{II,s}.$$

Aus der Momentenfläche Fig. 134c, die der Fig. 127c entspricht, ist der obige Ausdruck für $M_{II,m}$ auch direkt abzulesen.

Für den Fall, daß die Stützenmomente gleich diesem größten Moment des mittleren Teiles sind,

$$M_{II,s} = M_{II,m},$$

besteht also die Beziehung:

$$M_{II,s} = \frac{1}{8} g l^2 - M_{II,s}.$$

$$2 M_{II,s} = \frac{1}{8} g l^2;$$

und hieraus folgt für $M_{II,s}$ (und $M_{II,m}$) der Wert

$$\text{(I)} \qquad M_{II,m} = M_{II,s} = \frac{1}{16} g l^2 = 0{,}0625\, g l^2.$$

Digitized by Google

Somit ist unter der Annahme dieser günstigsten Auskragung die Größe des Stützenmomentes und damit auch die Größe des mittleren Momentes bestimmt.

Die Länge der Auskragung, bei der der obige Wert von $M_{II,s}$ und $M_{II,m}$ eintritt, ergibt sich durch folgende Berechnung. Bei einer beliebigen Auskragung a ist die Größe des Stützenmomentes (Fig. 134 c):

$$M_{II,s} = \left(\frac{g\,l_I}{2} \cdot a + g\,a \cdot \frac{a}{2}\right).$$

$\Big(\frac{g\,l_I}{2}$ ist der Auflagerdruck, mit dem der eingehängte Träger I auf den Träger II wirkt; $g\,a$ ist die verteilte Last auf dem Kragarm; a und $\frac{a}{2}$ sind die Hebelarme dieser Lasten.$\Big)$

$$M_{II,s} = \frac{g}{2}\,a(l_I + a)\,.$$

Zur bequemen Berechnung drücken wir a durch l_I aus (Fig. 134 a):

$$2\,a = l - l_I\,,$$

$$a = \frac{l}{2} - \frac{l_I}{2}$$

und erhalten für $M_{II,s}$ die Formel:

$$M_{II,s} = \frac{g}{2}\left(\frac{l}{2} - \frac{l_I}{2}\right)\left(l_I + \frac{l}{2} - \frac{l_I}{2}\right)$$

$$= \frac{g}{2} \cdot \frac{l - l_I}{2} \cdot \frac{l + l_I}{2}\,,$$

$$M_{II,s} = \frac{g}{8}\,(l^2 - l_I^2)\,.$$

Dieser Wert ist aber nach Gleichung (I) gleich $\frac{1}{16}\,g\,l^2$. Somit wird:

$$\frac{1}{8}\,g\,(l^2 - l_I^2) = \frac{1}{16}\,g\,l^2\,,$$

$$l^2 - l_I^2 = \frac{1}{2}\,l^2\,,$$

$$l_I^2 = \frac{1}{2}\,l^2\,,$$

$$\text{(II)} \qquad l_I = l\sqrt{\frac{1}{2}} = 0{,}7071\,l\,.$$

Digitized by Google

Und für die Auskragung a bleibt übrig:

$$a = \frac{l}{2} - \frac{0{,}7071\,l}{2},$$

$$\text{(III)} \qquad a = 0{,}1465\,l\,.$$

Somit ist durch Gleichung (III) die Länge des Kragarmes a vorgeschrieben, bei der die Stützenmomente gerade gleich dem größten Momente des mittleren Teiles werden, und durch Gleichung (I) sind diese Momente selber bestimmt.

Da $M_{II,m}$ und $M_{II,s}$ nur halb so groß sind wie die Momente eines einfachen Balkens von der Spannweite l, braucht der Kragträger im Verhältnis auch nur das halbe Widerstandsmoment. Hiernach läßt sich die Materialersparnis beurteilen.

III. Berechnung des normalen eingehängten Trägers I (Fig. 134a).

Der eingehängte Träger I hat die Spannweite l_I und folglich das Moment

$$M_I = \frac{1}{8}\,g\,l_I^2\,.$$

Die Spannweite l_I war aber schon vorher — durch die Bedingung, daß $M_{II,s} = M_{II,m}$ sein sollte — bestimmt:

$$l_I = 0{,}7071\,l\,.$$

Folglich ergibt sich für M_I der Wert:

$$M_I = \frac{1}{8}\,g \cdot 0{,}5\,l^2,$$

$$\text{(IV)} \qquad M_I = \frac{1}{16}\,g\,l^2\,.$$

Aus dem Vergleiche der Formeln (IV) und (I) folgt:

Wenn die Auskragung $a = 0{,}1465\,l$ bzw. die Länge des eingehängten Trägers $l_I = 0{,}7071\,l$ genommen wird, sind die Stützenmomente des überkragenden Trägers II, das größte mittlere Moment dieses Trägers und das größte Moment des eingehängten Trägers gleich groß, nämlich sämtlich gleich $\frac{1}{16}\,g\,l^2$.

Führt man die gesamte Belastung G einer Öffnung ein, $G = g\,l$, so kann man auch schreiben:

$$M_{II,s} = M_{II,m} = M_I = \frac{1}{16}\,G \cdot l\,.$$

Digitized by Google

IV. Berechnung eines seitlichen Kragträgers IV (Fig. 134a).

Da der im Endfelde befindliche eingehängte Träger III bis zum Endauflager reichen muß, wird er länger als die anderen eingehängten Träger I. Er übt also auch auf den überkragenden Träger einen größeren Auflagerdruck aus. Es würde demnach, wenn man b ebenso groß wie a nehmen würde, am Stützpunkt A' ein größeres Moment entstehen als an den übrigen Stützpunkten. Um dieses zu vermeiden, schränkt man die Auskragung b etwas ein, und zwar so weit, daß das Stützenmoment bei A' — es werde M_s' genannt — ebenfalls gleich $\frac{1}{16} g l^2$ wird. Für die Größe von M_s' ergibt sich nach Fig. 134d:

$$M_s' = \left(\frac{g\, l_{III}}{2} \cdot b + g\, b \cdot \frac{b}{2}\right)$$

$$= \frac{g\, b}{2} (l_{III} + b)$$

$$= \frac{g}{2} b\, l\,.$$

Um also M_s' gleich $\frac{1}{16} g l^2$ zu erhalten, muß sein:

$$\frac{1}{2} g\, b\, l = \frac{1}{16} g\, l^2,$$

$$\text{(V)} \qquad b = \frac{l}{8} = 0{,}125\, l\,.$$

V. Berechnung des eingehängten Trägers im Endfelde.

Für den eingehängten Träger III im Endfelde bleibt eine Länge von $l_{III} = l - b = l - \frac{1}{8} l = \frac{7}{8} l$ übrig. Er ist also bedeutend länger als die anderen eingehängten Träger und hat dementsprechend auch ein größeres Moment, nämlich:

$$M_{III} = \frac{1}{8} g\, l_{III}^2$$

$$= \frac{1}{8} g \cdot \left(\frac{7}{8} l\right)^2 = \frac{1}{8} g \frac{49}{64} l^2,$$

$$M_{III} = \frac{49}{512} g\, l^2 = 0{,}0957\, g\, l^2,$$

$$\text{(VI)} \qquad M_{III} = 0{,}0957\, G\, l\,.$$

Digitized by Google

Während alle anderen Träger das größte Moment 0,0625 Gl haben, ist es bei dem eingehängten Träger des Endfeldes gleich 0,0957 Gl. Dieser Träger muß also besonders dimensioniert werden.

Insgesamt haben wir somit für die zweckmäßigste Anordnung eines derartigen *Gerber*schen Trägerzuges folgende Regel: Man mache in den mittleren Feldern die Auskragungen

$$a = 0{,}1465\, l$$

und in den beiden Endfeldern

$$b = 0{,}1250\, l\, .$$

Dann sind die beiden eingehängten Träger der (linken und rechten) Endöffnung für das Moment

$$M' = 0{,}0957\, G l\, ,$$

alle anderen Träger aber für das Moment

$$M = 0{,}0625\, G l$$

zu rechnen.

VI. Erweiterung und Zusammenstellung.

Statt im ersten Felde mit einem eingehängten Träger *III* anzufangen, kann man auch mit einem überkragenden Balken beginnen und daran einen eingehängten Träger anschließen. Diese

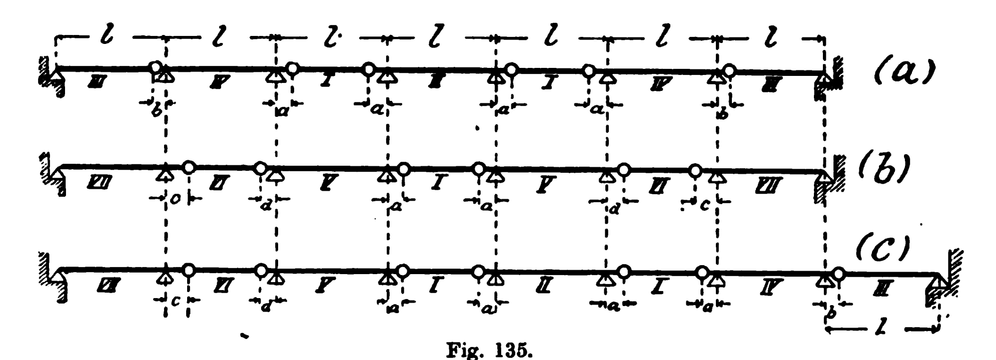


Fig. 135.

Anordnung zeigt Fig. 135 b, während in Fig. 135 a der Übersichtlichkeit wegen die vorhin besprochene Anordnung noch einmal dargestellt ist. Sowohl Fig. 135 a als auch Fig. 135 b sind dann möglich, wenn die Anzahl der Felder eine *ungerade* Zahl ist. Ist sie eine *gerade* Zahl, so sind die Gelenke nach Fig. 135 c anzuordnen. Ebenso wie für Fig. 135 a kann man nun für die Fig. 135 b und c diejenigen Längen der Auskragungen feststellen,

Digitized by Google

bei denen die Verteilung der Momente am günstigsten ist. Diese Aufgabe ist in dem Buche „Die Balkendecken“ von *Barkhausen* (Handbuch der Architektur, 3. Teil, 2. Band, Heft 3a) behandelt. Die Resultate ergeben sich aus folgender

Zusammenstellung: Man nehme bei den einzelnen Anordnungen Fig. 135a, b und c:

$$a = 0{,}1465\,l\,; \quad b = 0{,}1250\,l\,; \quad c = 0{,}2035\,l\,; \quad d = 0{,}1570\,l\,.$$

Dann müssen die Träger I, II usw. berechnet werden für die Momente:

Träger I, II, IV, V für $M = 0{,}0625\,G\,l$;

Träger III für $M = 0{,}0957\,G\,l$;

Träger VI für $M = 0{,}0511\,G\,l$;

Träger VII für $M = 0{,}0858\,G\,l$.

Auflagerdrücke.

Zum Schlusse wollen wir noch die Auflagerdrücke eines solchen Trägerzuges berechnen. Der Einfachheit wegen aber nur für die Anordnung Fig. 134a; in den anderen Fällen gestaltet sich die Berechnung ganz ähnlich.

Für den überkragenden Träger II ergibt sich, da wegen der Symmetrie A und B je gleich der halben auf dem Träger befindlichen Belastung sind,

$$A = B = \frac{1}{2} g\,l_I + g\,a + \frac{1}{2} g\,l$$

$$= \frac{1}{2} g(l_I + 2a + l) = \frac{1}{2} g(l + l)\,,$$

$$A = B = \frac{1}{2} g \cdot 2l = g\,l = G\,.$$

Auf jeden Stützpunkt A und B entfällt also die Belastung eines Feldes, wie ja auch vorauszusehen ist.

Bei dem Kragträger IV ist es anders. Da dieser unsymmetrisch angeordnet ist, sind seine beiden Auflagerdrücke verschieden groß, und zwar findet man

$$A' = 1{,}0625\,g\,l\,; \quad B' = 1{,}0\,g\,l\,.$$

(Man führe die Berechnung selbständig aus!)

Während B' also ebenfalls gleich der Belastung eines Feldes ist, ist A' um mehr als 6 % größer als diese. Wenn man z. B.

Digitized by Google

bei Dächern die Pfetten als *Gerber*sche Träger ausbildet, bekommen also die beiden den Giebelwänden zunächst stehenden Binder 6 % mehr Dachlast als die mittleren Binder (s. später Berechnung der Dachkonstruktionen).

Man kann übrigens eine günstigere Verteilung der Stützdrücke erreichen, wenn man die Auskragung b (Fig. 134 a) nicht gleich $0{,}125\,l$, sondern nur gleich $0{,}0833\,l$ nimmt. Bei dieser Anordnung werden die Auflagerdrücke:

$$A' = B' = 1{,}0208\,g\,l\,.$$

Dann entsteht also nur 2 % Mehrbelastung der Unterstützungspunkte. Dafür sind aber die Biegungsmomente nicht mehr so günstig verteilt wie vorhin (bei $b = 0{,}125\,l$). Bei B' ist das Moment allerdings unverändert, gleich $0{,}0625\,G\,l$. Bei A' ist es gleich $0{,}042\,G\,l$, und im mittleren Teile des Trägers IV gleich $0{,}073\,G \cdot l$. Für den eingehängten Träger III ist das größte Moment gleich $0{,}105\,G \cdot l$. Bei dieser Gelenkanordnung muß also außer dem Träger III auch der Träger IV besonders dimensioniert werden. Deshalb wird man lieber bei der zuerst besprochenen Anordnung bleiben und zugunsten der kleineren Momente die größeren Auflagerdrücke mit in den Kauf nehmen. Ein Radikalmittel besteht darin, die letzte Öffnung nicht gleich l, sondern gleich $(l_I + a)$, d. i. $0{,}8536\,l$, zu nehmen.

§ 76.

Zusammenstellung von Formeln zur Berechnung von Querkräften und Momenten bei ständiger und bei beweglicher Belastung.

In den letzten drei Vorträgen haben wir uns ausschließlich mit der Ermittlung von Querkräften und Momenten befaßt. Und zwar ist im 10. und 11. Vortrage der Fall behandelt, daß der betreffende Balken sich nur innerhalb zweier Stützpunkte erstreckt, während im 12. Vortrage der über die Auflagerpunkte hinauskragende Träger untersucht ist.

Im Prinzip ist die Ermittlung von Kraft- und Momentensummen sehr einfach: Bei der Bestimmung von Q sind einfach die seitlich vom Schnitte befindlichen Kräfte zu summieren, und bei der Bestimmung von M sind diese Kräfte zunächst mit ihren Abständen vom Schnitte zu multiplizieren und dann zu summieren. Nach dieser Grundregel muß man bei jedem beliebigen Belastungsfall unbedingt zum Ziele kommen. (Fortsetzung S. 414.)

Digitized by Google

Erläuterungen:

A und B sind die von den Lagerpunkten ausgeübten Stützkräfte.

Q_m, Q_n usw. sind die Kraftsummen (Querkräfte) der Stellen m, n usw.

Q_{m-n} ist die Querkraft der Strecke $m-n$, falls alle Schnitte innerhalb dieses Feldes $m-n$ die gleiche Kr[illegible] summe Q haben.

M_m, M_n usw. sind die Momentensummen (Biegungsmomente) der Stellen m, n usw.

M ist das Maximalmoment des Balkens.

Die Punkte an den Balken bezeichnen die gefährlichen Querschnitte (Stellen der Maximalmomente).

k ist die zulässige Biegungsspannung [$k = 1200$ kg/qcm nach Preußisch. Ministerialerlaß vom 31. Jan. 1910].

σ die wirklich auftretende Spannung.

W ist das erforderliche Widerstandsmoment,

W' ist das vorhandene Widerstandsmoment (aus konstruktiven Gründen oder wegen Durchbiegung häufig gr[illegible] als W).

f ist die Durchbiegung des Trägers, unter Voraussetzung konstanten Trägheitsmomentes.

J ist das vorhandene Trägheitsmoment.

E ist der Elastizitätsmodul des Materials. (Flußeisen: $E = 2150000$ kg/qcm.)

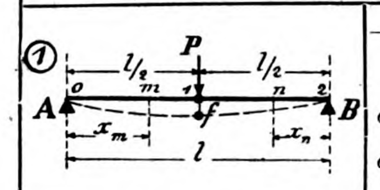
h ist die Höhe des Trägers.

J_e ist das erforderliche Trägheitsmoment, h_e ist die erforderliche Höhe des Trägers, falls die Durchbiegung f nicht größer als ein Bruchteil der Sp[illegible] weite l werden soll. $\left[f = \frac{1}{n} l\text{, wobei } n = 500 \ldots 1000.\right]$

(Es genügt, J_e oder h_e nachzuweisen.)

A. Balken zwischen zwei Stützpunkten bei verschiedenen Belastungsarten.

1. Einzellast in der Mitte.



$A = B = \frac{P}{2}$,

$Q_{0-1} = +A = +\frac{P}{2}$,

$Q_{1-2} = -\frac{P}{2}$.

$M_m = +A \cdot x_m = +\frac{P}{2} x_m$,

$M_n = +\frac{P}{2} x_n$,

$M = \frac{Pl}{4}$,

$W = \frac{Pl}{4 \cdot k}$.

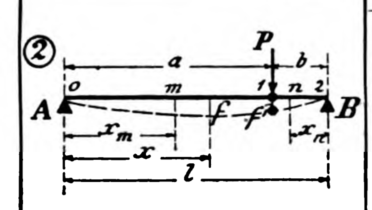
$f = \frac{Pl^3}{48EJ} = \frac{\sigma l^2}{6Eh}$,

$f : l = 1 : \frac{48EJ}{Pl^2} = 1 : \frac{6Eh}{\sigma l}$,

$J_e = n \frac{Pl^2}{48E} = \frac{n}{12E} Ml$.

$h_e = \frac{l}{\beta} \frac{W}{W'}$, wobei $\beta =$ [illegible]

2. Einzellast an beliebiger Stelle.



$A = \frac{Pb}{l}$, $B = \frac{Pa}{l}$,

$Q_{0-1} = +A$,

$Q_{1-2} = -B$.

$M_m = +A \cdot x_m$,

$M_n = +B \cdot x_n$,

$M = \frac{Pab}{l}$.

$f = \frac{Pb\sqrt{[a(l+b)]^3}}{9l\sqrt{3} \cdot EJ}$

(hierin „a" der größere d[illegible] beiden Abstände a und [illegible] entsteht im Abstande

$x = \sqrt{\frac{a(l+b)}{3}}$.

Unter der Last ist:

$f = \frac{Pa^2b^2}{3lEJ}$.

3. Zwei gleiche, symmetrisch angeordnete Einzellasten.

$A = B = P$,

$Q_{0-1} = +A = +P$,

$Q_{1-2} = 0$.

$Q_{2-3} = -P$.

$M_m = +A \cdot x_m = +P \cdot x_m$.

Alle Querschnitte des mittleren Teiles haben das gleiche Moment:

$M = P \cdot a$.

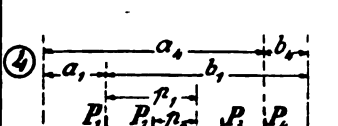
$f = \frac{Pa}{2EJ}\left[\left(\frac{l}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{3}\right]$

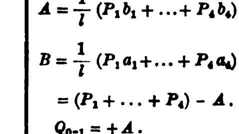
(in Balkenmitte auftrete[illegible])

Unter den Lasten ist:

$f = \frac{Pa^2}{2EJ}\left[l - \frac{4}{3}a\right]$.

4. Beliebig angeordnete Einzellasten.





$A = \frac{1}{l}(P_1 b_1 + \ldots + P_4 b_4)$,

$B = \frac{1}{l}(P_1 a_1 + \ldots + P_4 a_4)$

$= (P_1 + \ldots + P_4) - A$.

$Q_{0-1} = +A$.

$Q_{1-2} = A - P_1$,

$Q_{2-3} = A - (P_1 + P_2)$

$= Q_{1-2} - P_2$,

$Q_{3-4} = Q_{2-3} - P_3$

usw.

$M_m = A x_m - P_1 p_1 - P_2 p_2$,

oder durch Zerlegung in Kräftepaare ($A = P_1 + P_2 + Q_{2-3}$):

$$M_m = P_1 a_1 + P_2 a_2 + Q_{2-3} \cdot x_m,$$

oder, durch Trennung in rechte und linke Grupp[illegible]

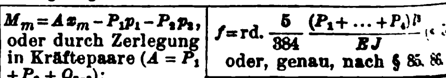
$$M_m = \left(\frac{P_3 b_3 + P_4 b_4}{l}\right) x_m + \left(\frac{P_1 a_1 + P_2 a_2}{l}\right) x'_m$$

Bei Berechnung mehrerer Momente auseinande[illegible] entwickeln:

$M_0 = 0$; $M_1 = M_0 + Q_{0-1} \cdot \lambda_{0-1}$; $M_2 = M_1 + Q_{1-2} \cdot \lambda_{1-2}$; usw.

$$M_m = M_2 + Q_{2-3} \cdot u = M_2 + \frac{M_3 - M_2}{\lambda_{2-3}} \cdot u.$$

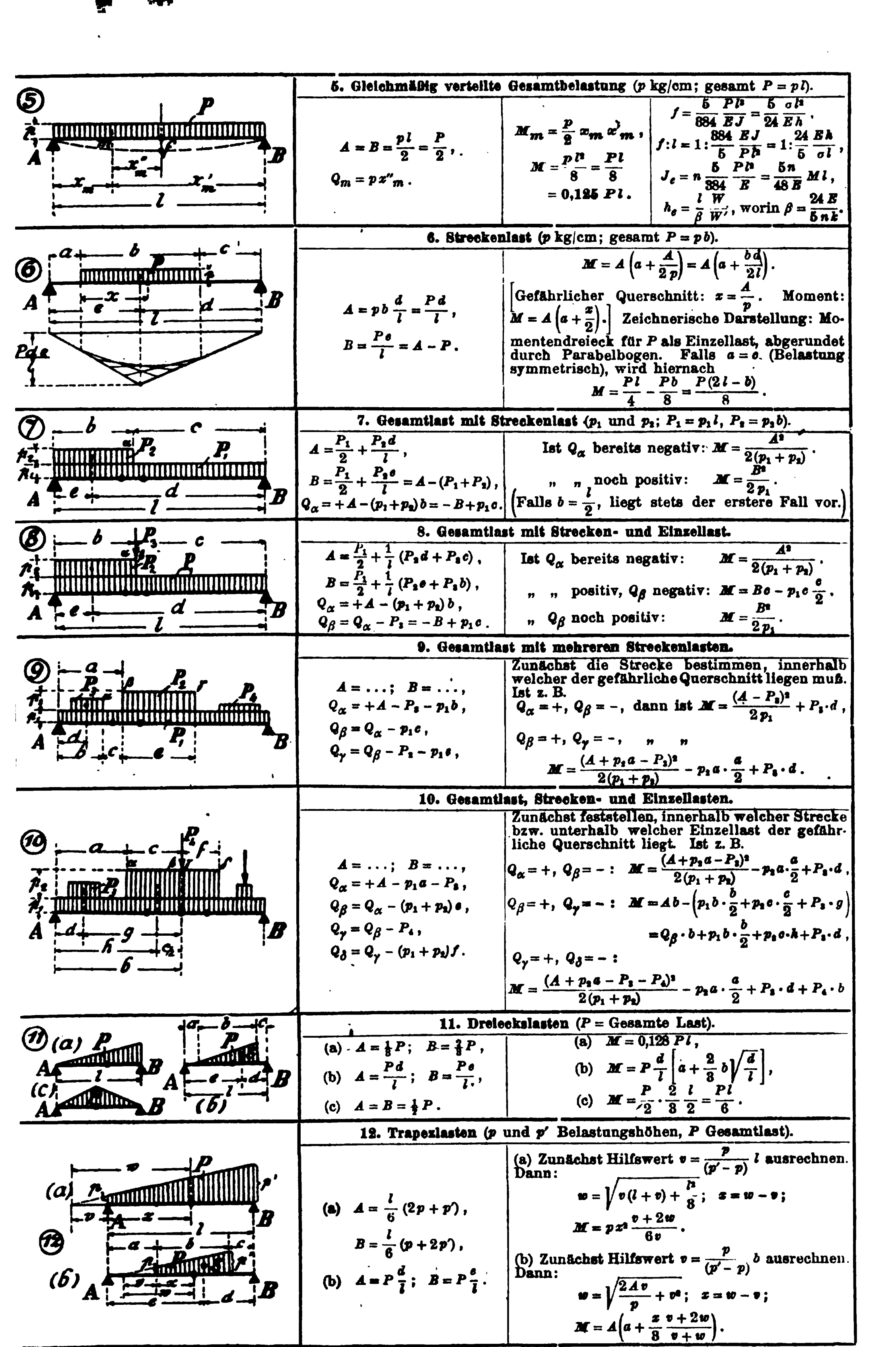
Das Maximalmoment M entsteht stets in einem Lastangriffspunkt, und zwar da, wo die Querkraft ihr Vorzeichen wechselt, d. h. wo die Lastensumme $(P_1 + \ldots)$ zum erstenmal größer ist als der zugehörige Auflagerdruck.



$f =$ rd. $\frac{5}{384} \frac{(P_1 + \ldots + P_4) l^3}{EJ}$ [illegible]

oder, genau, nach § 85. 86.

Digitized by Google



5. Gleichmäßig verteilte Gesamtbelastung (p kg/cm; gesamt $P = pl$).

Auflagerdrücke	Momente	Durchbiegung
$A = B = \frac{pl}{2} = \frac{P}{2}$, $Q_m = p x''_m$.	$M_m = \frac{p}{2} x_m x'_m$, $M = \frac{pl^2}{8} = \frac{Pl}{8} = 0{,}125\,Pl$.	$f = \frac{5}{384}\frac{Pl^3}{EJ} = \frac{5}{24}\frac{\sigma l^2}{Eh}$, $f:l = 1:\frac{384}{5}\frac{EJ}{Pl^2} = 1:\frac{24}{5}\frac{Eh}{\sigma l}$, $J_e = n\frac{5}{384}\frac{Pl^2}{E} = \frac{5n}{48E}Ml$, $h_e = \frac{l}{\beta}\frac{W}{W'}$, worin $\beta = \frac{24E}{5nk}$.

6. Streckenlast (p kg/cm; gesamt $P = pb$).

Auflagerdrücke	Moment
$A = pb\frac{d}{l} = \frac{Pd}{l}$, $B = \frac{Pe}{l} = A - P$.	$M = A\left(a + \frac{A}{2p}\right) = A\left(a + \frac{bd}{2l}\right)$. [Gefährlicher Querschnitt: $x = \frac{A}{p}$. Moment: $M = A\left(a + \frac{x}{2}\right)$.] Zeichnerische Darstellung: Momentendreieck für P als Einzellast, abgerundet durch Parabelbogen. Falls $a = c$ (Belastung symmetrisch), wird hiernach $M = \frac{Pl}{4} - \frac{Pb}{8} = \frac{P(2l - b)}{8}$.

7. Gesamtlast mit Streckenlast (p_1 und p_2; $P_1 = p_1 l$, $P_2 = p_2 b$).

Auflagerdrücke	Moment
$A = \frac{P_1}{2} + \frac{P_2 d}{l}$, $B = \frac{P_1}{2} + \frac{P_2 e}{l} = A - (P_1 + P_2)$, $Q_\alpha = +A - (p_1 + p_2)b = -B + p_1 c$.	Ist Q_α bereits negativ: $M = \frac{A^2}{2(p_1 + p_2)}$. „ „ noch positiv: $M = \frac{B^2}{2p_1}$. (Falls $b = \frac{l}{2}$, liegt stets der erstere Fall vor.)

8. Gesamtlast mit Strecken- und Einzellast.

Auflagerdrücke	Moment
$A = \frac{P_1}{2} + \frac{1}{l}(P_2 d + P_3 c)$, $B = \frac{P_1}{2} + \frac{1}{l}(P_2 e + P_3 b)$, $Q_\alpha = +A - (p_1 + p_2)b$, $Q_\beta = Q_\alpha - P_3 = -B + p_1 c$.	Ist Q_α bereits negativ: $M = \frac{A^2}{2(p_1 + p_2)}$. „ „ positiv, Q_β negativ: $M = Bc - p_1 c\frac{c}{2}$. „ Q_β noch positiv: $M = \frac{B^2}{2p_1}$.

9. Gesamtlast mit mehreren Streckenlasten.

Auflagerdrücke	Moment
$A = \ldots$; $B = \ldots$, $Q_\alpha = +A - P_3 - p_1 b$, $Q_\beta = Q_\alpha - p_1 c$, $Q_\gamma = Q_\beta - P_2 - p_1 e$.	Zunächst die Strecke bestimmen, innerhalb welcher der gefährliche Querschnitt liegen muß. Ist z. B. $Q_\alpha = +$, $Q_\beta = -$, dann ist $M = \frac{(A - P_3)^2}{2p_1} + P_3 \cdot d$, $Q_\beta = +$, $Q_\gamma = -$, „ „ $M = \frac{(A + p_2 a - P_3)^2}{2(p_1 + p_2)} - p_2 a \cdot \frac{a}{2} + P_3 \cdot d$.

10. Gesamtlast, Strecken- und Einzellasten.

Auflagerdrücke	Moment
$A = \ldots$; $B = \ldots$, $Q_\alpha = +A - p_2 a - P_3$, $Q_\beta = Q_\alpha - (p_1 + p_2)e$, $Q_\gamma = Q_\beta - P_4$, $Q_\delta = Q_\gamma - (p_1 + p_2)f$.	Zunächst feststellen, innerhalb welcher Strecke bzw. unterhalb welcher Einzellast der gefährliche Querschnitt liegt. Ist z. B. $Q_\alpha = +$, $Q_\beta = -$: $M = \frac{(A + p_2 a - P_3)^2}{2(p_1 + p_2)} - p_2 a \cdot \frac{a}{2} + P_3 \cdot d$, $Q_\beta = +$, $Q_\gamma = -$: $M = Ab - \left(p_1 b \cdot \frac{b}{2} + p_2 c \cdot \frac{c}{2} + P_3 \cdot g\right)$ $= Q_\beta \cdot b + p_1 b \cdot \frac{b}{2} + p_2 c \cdot h + P_3 \cdot d$, $Q_\gamma = +$, $Q_\delta = -$: $M = \frac{(A + p_2 a - P_3 - P_4)^2}{2(p_1 + p_2)} - p_2 a \cdot \frac{a}{2} + P_3 \cdot d + P_4 \cdot b$

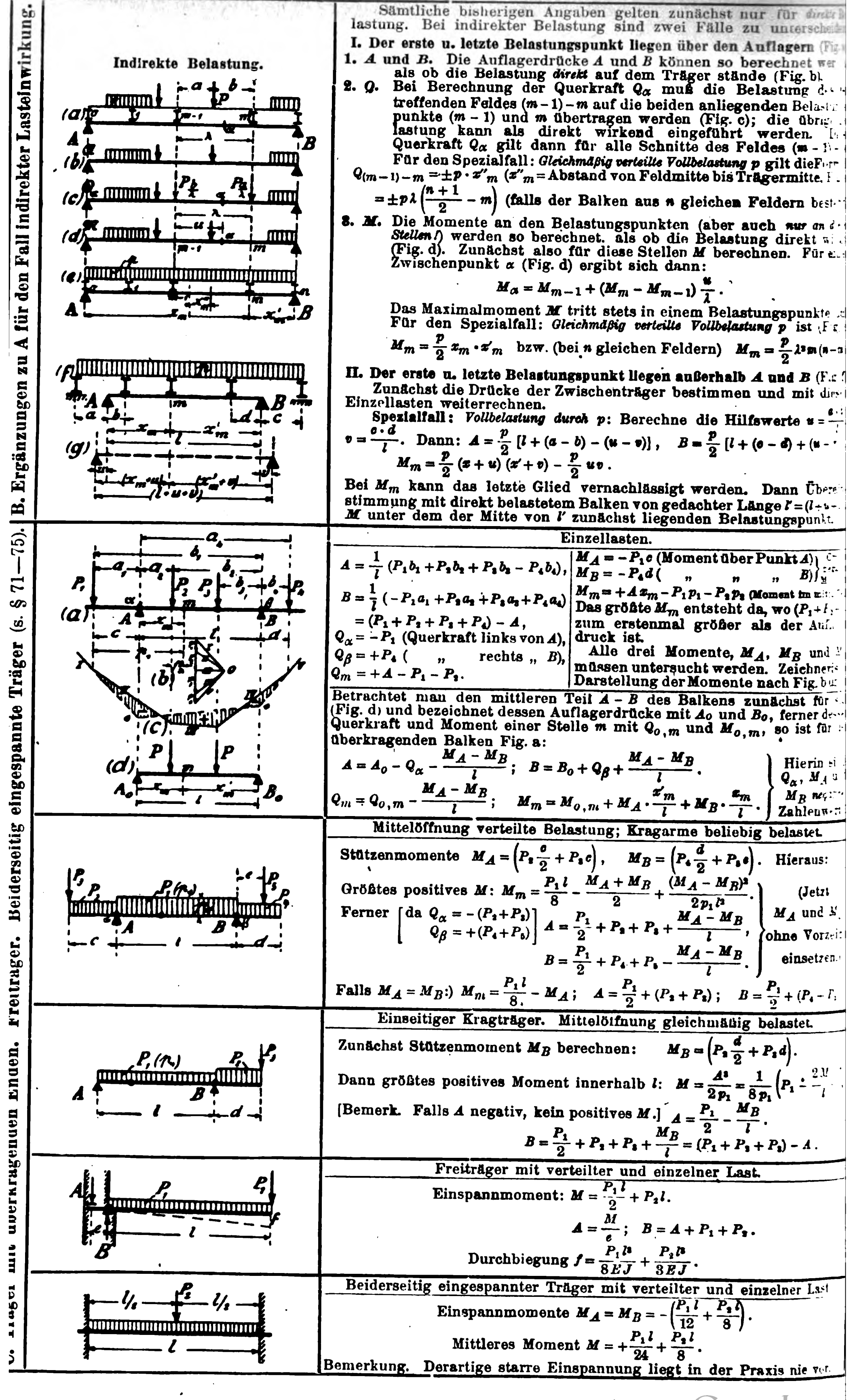
11. Dreieckslasten (P = Gesamte Last).

Auflagerdrücke	Moment
(a) $A = \frac{1}{3}P$; $B = \frac{2}{3}P$, (b) $A = \frac{Pd}{l}$; $B = \frac{Pe}{l}$, (c) $A = B = \frac{1}{2}P$.	(a) $M = 0{,}128\,Pl$, (b) $M = P\frac{d}{l}\left[a + \frac{2}{3}b\sqrt{\frac{d}{l}}\right]$, (c) $M = \frac{P}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{l}{2} = \frac{Pl}{6}$.

12. Trapezlasten (p und p' Belastungshöhen, P Gesamtlast).

Auflagerdrücke	Moment
(a) $A = \frac{l}{6}(2p + p')$, $B = \frac{l}{6}(p + 2p')$, (b) $A = P\frac{d}{l}$; $B = P\frac{e}{l}$.	(a) Zunächst Hilfswert $v = \frac{p}{(p' - p)} l$ ausrechnen. Dann: $w = \sqrt{v(l + v) + \frac{l^2}{3}}$; $x = w - v$; $M = p x^2 \frac{v + 2w}{6v}$. (b) Zunächst Hilfswert $v = \frac{p}{(p' - p)} b$ ausrechnen. Dann: $w = \sqrt{\frac{2Av}{p} + v^2}$; $x = w - v$; $M = A\left(a + \frac{x}{3}\frac{v + 2w}{v + w}\right)$.

Digitized by Google



B. Ergänzungen zu A für den Fall indirekter Lasteinwirkung.

Indirekte Belastung.

Sämtliche bisherigen Angaben gelten zunächst nur für direkte Belastung. Bei indirekter Belastung sind zwei Fälle zu unterscheiden:

I. Der erste u. letzte Belastungspunkt liegen über den Auflagern (Fig. …)

1. A und B. Die Auflagerdrücke A und B können so berechnet werden, als ob die Belastung *direkt* auf dem Träger stände (Fig. b).
2. Q. Bei Berechnung der Querkraft Q_α muß die Belastung des betreffenden Feldes $(m-1)-m$ auf die beiden anliegenden Belastungspunkte $(m-1)$ und m übertragen werden (Fig. c); die übrige Belastung kann als direkt wirkend eingeführt werden. Die Querkraft Q_α gilt dann für alle Schnitte des Feldes $(m-1)$ …
   Für den Spezialfall: *Gleichmäßig verteilte Vollbelastung* p gilt die Form…
   $Q_{(m-1)-m} = \pm p \cdot x''_m$ (x''_m = Abstand von Feldmitte bis Trägermitte, …)
   $= \pm p\lambda\left(\frac{n+1}{2} - m\right)$ (falls der Balken aus n gleichen Feldern besteht).
3. M. Die Momente an den Belastungspunkten (aber auch *nur an diesen Stellen!*) werden so berechnet, als ob die Belastung direkt wirke (Fig. d). Zunächst also für diese Stellen M berechnen. Für einen Zwischenpunkt α (Fig. d) ergibt sich dann:

$$M_\alpha = M_{m-1} + (M_m - M_{m-1})\frac{u}{\lambda}.$$

Das Maximalmoment M tritt stets in einem Belastungspunkte auf. Für den Spezialfall: *Gleichmäßig verteilte Vollbelastung* p ist (Fig. …)

$$M_m = \frac{p}{2} x_m \cdot x'_m \quad \text{bzw. (bei } n \text{ gleichen Feldern)} \quad M_m = \frac{p}{2}\lambda^2 m(n-m)$$

II. Der erste u. letzte Belastungspunkt liegen außerhalb A und B (Fig. f)

Zunächst die Drücke der Zwischenträger bestimmen und mit diesen Einzellasten weiterrechnen.

Spezialfall: *Vollbelastung durch* p: Berechne die Hilfswerte $u = \frac{a \cdot b}{l}$, $v = \frac{c \cdot d}{l}$. Dann: $A = \frac{p}{2}[l + (a - b) - (u - v)]$, $B = \frac{p}{2}[l + (c - d) + (u - v)]$,

$$M_m = \frac{p}{2}(x + u)(x' + v) - \frac{p}{2}uv.$$

Bei M_m kann das letzte Glied vernachlässigt werden. Dann Übereinstimmung mit direkt belastetem Balken von gedachter Länge $l' = (l + u + v)$. M unter dem der Mitte von l' zunächst liegenden Belastungspunkt.

Träger mit überkragenden Enden. Freiträger. Beiderseitig eingespannte Träger (s. § 71—75).

Einzellasten.

$A = \frac{1}{l}(P_1 b_1 + P_2 b_2 + P_3 b_3 - P_4 b_4)$,

$B = \frac{1}{l}(-P_1 a_1 + P_2 a_2 + P_3 a_3 + P_4 a_4)$

$= (P_1 + P_2 + P_3 + P_4) - A$,

$Q_\alpha = -P_1$ (Querkraft links von A),

$Q_\beta = +P_4$ („ rechts „ B),

$Q_m = +A - P_1 - P_2$.

$M_A = -P_1 c$ (Moment über Punkt A)

$M_B = -P_4 d$ („ „ „ B)

$M_m = +A x_m - P_1 p_1 - P_2 p_2$ (Moment im …)

Das größte M_m entsteht da, wo $(P_1 + P_2 …)$ zum erstenmal größer als der Auflagerdruck ist.

Alle drei Momente, M_A, M_B und M_m müssen untersucht werden. Zeichnerische Darstellung der Momente nach Fig. b u. c.

Betrachtet man den mittleren Teil $A - B$ des Balkens zunächst für sich (Fig. d) und bezeichnet dessen Auflagerdrücke mit A_0 und B_0, ferner dessen Querkraft und Moment einer Stelle m mit $Q_{o,m}$ und $M_{o,m}$, so ist für den überkragenden Balken Fig. a:

$$A = A_0 - Q_\alpha - \frac{M_A - M_B}{l}; \quad B = B_0 + Q_\beta + \frac{M_A - M_B}{l}.$$

$$Q_m = Q_{o,m} - \frac{M_A - M_B}{l}; \quad M_m = M_{o,m} + M_A \cdot \frac{x'_m}{l} + M_B \cdot \frac{x_m}{l}.$$

Hierin sind Q_α, M_A u. M_B negativ … Zahlenwerte …

Mittelöffnung verteilte Belastung; Kragarme beliebig belastet.

Stützenmomente $M_A = \left(P_2\frac{c}{2} + P_3 c\right)$, $M_B = \left(P_4\frac{d}{2} + P_5 d\right)$. Hieraus:

Größtes positives M: $M_m = \frac{P_1 l}{8} - \frac{M_A + M_B}{2} + \frac{(M_A - M_B)^2}{2 p_1 l^2}$.

Ferner [da $Q_\alpha = -(P_2 + P_3)$, $Q_\beta = +(P_4 + P_5)$]

$A = \frac{P_1}{2} + P_2 + P_3 + \frac{M_A - M_B}{l}$,

$B = \frac{P_1}{2} + P_4 + P_5 - \frac{M_A - M_B}{l}$.

(Jetzt M_A und M_B ohne Vorzeichen einsetzen.)

Falls $M_A = M_B$:) $M_m = \frac{P_1 l}{8} - M_A$; $A = \frac{P_1}{2} + (P_2 + P_3)$; $B = \frac{P_1}{2} + (P_4 + P_5)$

Einseitiger Kragträger. Mittelöffnung gleichmäßig belastet.

Zunächst Stützenmoment M_B berechnen: $M_B = \left(P_2\frac{d}{2} + P_3 d\right)$.

Dann größtes positives Moment innerhalb l: $M = \frac{A^2}{2 p_1} = \frac{1}{8 p_1}\left(P_1 - \frac{2M}{l}\right)$ …

[Bemerk. Falls A negativ, kein positives M.] $A = \frac{P_1}{2} - \frac{M_B}{l}$.

$B = \frac{P_1}{2} + P_2 + P_3 + \frac{M_B}{l} = (P_1 + P_2 + P_3) - A$.

Freiträger mit verteilter und einzelner Last.

Einspannmoment: $M = \frac{P_1 l}{2} + P_2 l$.

$A = \frac{M}{e}$; $B = A + P_1 + P_2$.

Durchbiegung $f = \frac{P_1 l^3}{8EJ} + \frac{P_2 l^3}{3EJ}$.

Beiderseitig eingespannter Träger mit verteilter und einzelner Last

Einspannmomente $M_A = M_B = -\left(\frac{P_1 l}{12} + \frac{P_2 l}{8}\right)$.

Mittleres Moment $M = +\frac{P_1 l}{24} + \frac{P_2 l}{8}$.

Bemerkung. Derartige starre Einspannung liegt in der Praxis nie vor.

Digitized by Google

I. Einflußlinien.

1. Q. Einflußlinie für Q bei direkter Belastung: $A'E'F'B'$,
" " " indirekter " : $A'G'H'B'$.
Bei direkter Belastung gehört zu jedem Schnitte eine besondere Einflußlinie; bei indirekter Belastung nur zu jedem Felde. Nach Aufzeichnen der Einflußlinie wird die Belastung einmal so gestellt, daß die größte positive, und dann so, daß die größte negative Querkraft entsteht. Hierdurch die beiden Grenzwerte von Q bestimmt.

2. M. Einflußlinie für M bei direkter Belastung: $A''E''B''$,
" " " " indirekter " : $A''G''H''B''$.
Zu jedem Querschnitte gehört eine besondere Einflußlinie (auch bei indirekter Belastung). Es ist nur ein Grenzwert (positiv) zu bestimmen. (Vollbelastung.)

II. Analytische Methoden.

a) Direkte, gleichmäßig verteilte Last p.

1. Q. Gefährl. Laststellung: Vom Auflager bis Querschnitt („*Grundstellung*")
$$\underset{+}{Q_\alpha} = \frac{1}{l}\,px'\cdot\frac{x'}{2} = \frac{p\cdot x'^2}{2l};\qquad \underset{-}{Q_\alpha} = \frac{px^2}{2l}.$$

2. M. Gefährliche Laststellung: Vollbelastung. $M_\alpha = \frac{pxx'}{2}$.

b) Indirekte, gleichmäßig verteilte Last p.

1. Q. Belastung um $z = \frac{\lambda}{l-\lambda}\,x'_m$, bzw. $z = \frac{\lambda}{l-\lambda}\,x_{m-1}$ in das Feld hineinschieben („*vorgezogene* Stellung")
$$\underset{+}{Q} = \frac{p}{2}\,\frac{x'^2_m}{(l-\lambda)},\qquad \underset{-}{Q} = \frac{p}{2}\,\frac{x^2_{m-1}}{(l-\lambda)}.$$

2. M. Vollbg. $M = \frac{p}{2}(x\cdot x' - uv)$. Im Belastungspunkt: $M_m = \frac{p}{2}\,x_m\cdot x'_m$.

c) Direkt wirkende Einzellasten.

1. Q. Fast stets Grundstellung maßgebend. Nur, wenn
$P_1\frac{l}{a} < \left(P_1 + \ldots + P_x + \frac{P'e}{a}\right)$, vorgezogene Stellung maßgebend.
$\underset{+}{Q} = A$ (bzw. $= A' - P_1$); $\underset{-}{Q}$ entsprechend aus Auflagerdruck B.

2. M. Zunächst eine schwere Last (P_m) über Querschnitt stellen und die anderen Lasten zu beiden Seiten gruppieren. Sind dann die beiden Bedingungen erfüllt:
I. $(P_1+\ldots+P_m) > (P_1+\ldots+P_n)\frac{x}{l}$; II. $(P_n+\ldots+P_m) > (P_1+\ldots+P_n)\frac{x'}{l}$,
so ist die angenommene Laststellung tatsächlich die gefährliche für M. Andernfalls neue Stellung annehmen und Untersuchung wiederholen. Ausrechnung von M nach Fall 4.

d) Indirekt wirkende Einzellasten.

1. Q. [In der Nähe der Auflager häufig vorgezogene Stellung maßgebend; sonst Grundstellung.]
Ist $P_1\frac{l}{\lambda} > \left(P_1 + \ldots + P_x + \frac{P'e}{a}\right)$: Grundst. maßgeb.; $\underset{+}{Q} = +A$.
Ist $P_1\frac{l}{\lambda} < \left(P_1 + \ldots + P_x + \frac{P'e}{a}\right)$: vorgez. St. " ; $\underset{+}{Q} = A' - P_1\frac{a}{\lambda}$.
[Falls sogar $(P_1+P_2)\frac{l}{\lambda} < (P_1 + \ldots)$, zweimal vorg. Stellg. maßgeb.]

2. M. Man untersucht nur Belastungspunkte; also nach Fall c) behandeln.

III. Mittels A-Polygon, M-Fläche.

a) Direkte, gleichmäßig verteilte Last p.

1. Q. A-Polygon wird zu Parabel. Hierdurch größte Querkraft bestimmt.

2. M. Parabel mit $f = \frac{pl^2}{8}$ ergibt größtes Moment für jeden Querschnitt.

b) Indirekte, gleichmäßig verteilte Last p.

1. Q. Für jedes Feld größtes Q nach Fig. a finden. Entsprechend $\underset{-}{Q}$.

2. M. Zunächst Momente für Belastungspunkte aufsuchen (durch Parabel mit $f = \frac{pl^2}{8}$) und dazwischen geradlinig verbinden.

c) Direkte Einzellasten (s. § 69!).

d) Indirekte Einzellasten.

1. Q. Querkraft $Q = A$ (bei Grundstellung), bzw. $Q' = A' - P_1\frac{a}{\lambda}$ (bei vorgezogener Stellung) nach Fig. b finden. Beide Werte vergleichen.

2. M. Momente zunächst nur für Belastungspunkte aufsuchen [nach Fall c)] und dann verbinden.

IV. Die absolut größten Momente.

a) Eine bewegliche Einzellast.

$M = \frac{Pl}{4}$; $x = \frac{l}{2}$ [x bezeichnet den Abstand des gefährl. Querschn. vom Lager A]

b) Zwei gleiche Lasten P (Laufkatze).

$M = \frac{2P}{l}\left(\frac{l}{2} - \frac{a}{4}\right)^2$; $x = \frac{l}{2} - \frac{a}{4}$. Falls aber $a > 0{,}586\,l$, $M = \frac{Pl}{4}$.

c) Zwei ungleiche Lasten P_1 und P_2. ($P_1 > P_2$).

$M = \frac{P_1 + P_2}{l}\left(\frac{l-u}{2}\right)^2$; $x = \frac{l}{2} - \frac{u}{2}$. Falls a groß, ev. $M = \frac{P_1 l}{4}$.

d) Beliebige Gruppe von Einzellasten.

Zunächst Lage der Resultierenden R bestimmen. Dann, falls $M_{abs.}$ unter P_3 zu erwarten, Lasten so aufstellen, daß Abstand u durch Trägermitte halbiert wird und für Fußpunkt von P_3 Moment berechnen. Ev. entspr. Untersuchung mit anderer Last (P_4) vornehmen und M vergleichen.

e) Zwei Lasten P_1 und P_2; vorne und hinten p_1; gesamt p_2. ($P_1 > P_2$).

$$x = \frac{R(l-u) + \frac{p_1}{2}\left[(l-b)^2 - 2be\right] + \frac{p_2}{2}\,l^2}{2R + p_1(l-2b) + p_2 l};\qquad M = A - \frac{p_1}{2}(x^2 - c^2) - \frac{p_2}{2}\,x^2.$$

Digitized by Google

Das praktische, flotte Rechnen ließ es aber angezeigt erscheinen, aus dieser prinzipiellen Regel wenigstens für die wichtigsten Belastungsfälle einfache, fertige Formeln abzuleiten, nach denen man aus der Spannweite und der Belastung des Trägers sofort die Kraft- und Momentensummen hinschreiben kann. Diese Formeln kürzen natürlich die Rechenarbeit ganz erheblich ab.

In den Tabellen (S. 410—413) sind nun alle diese Formeln und besonderen Methoden, die wir für die verschiedenen Belastungsfälle ausgearbeitet haben, noch einmal in systematischer Aufeinanderfolge zusammengestellt. Hinzugefügt sind noch manche neue Formeln und Hinweise, die bisher — um den Lernenden nicht zu ermüden — nicht erwähnt worden sind. Deren Beweise werden zum Teil später gelegentlich der Durchnahme von Beispielen nachgeholt werden, zum Teil sind sie in den Tabellen selber angedeutet. Man beachte, daß es bei solchen Betrachtungen nicht darauf ankommt, für jeden möglichen Fall die betreffende Formel bis aufs kleinste abzuleiten, sondern daß man vor allem das Prinzip und den Zweck der ganzen Untersuchung erfassen muß.

Um einen vollständigen Überblick über das Gebotene zu erhalten, lese man die vorhergehenden Tabellen gründlich durch — und wende sie dann richtig an.

---

13. Vortrag:

Berechnung genieteter Träger.

Die von den Walzwerken gelieferten Profileisen sind bekanntlich nur bis zu gewissen maximalen Abmessungen als Fertigfabrikate erhältlich. Benötigt man größere Dimensionen, oder sind die lieferbaren Profilträger für den besonderen Fall ungeeignet, so muß man die Träger aus einzelnen Bestandteilen zusammensetzen. Auf diese Weise entstehen die sogenannten „*Blechträger*“ oder „*genieteten Träger*“. Ihre einzelnen hauptsächlichsten Teile sind: Stehblech (auch Stegblech genannt), Gurtwinkel und Lamellen (Deckplatten). Zur Verbindung dieser einzelnen Bestandteile dienen Niete oder Schrauben. Deren Berechnung werde zunächst erledigt. (Über die Berechnung von Trägheitsmomenten s. 9. Vortrag. Beispiel: § 54, zweite Aufgabe.)

Digitized by Google

§ 77.

Niete und Schrauben.

Von vornherein muß bemerkt werden, daß die im folgenden entwickelten Rechenmethoden nur einen Notbehelf für die noch fehlende genaue Theorie der Niete (Schrauben) bilden. Vorläufig ist man sich über die Wirkungsweise eines Nietes bzw. einer Schraube noch vollständig im unklaren. Die folgenden Regeln über Nietberechnungen bauen sich also auch nicht auf bestimmten, wissenschaftlichen Grundlagen auf; ihre Existenzberechtigung besteht vielmehr ausschließlich darin, daß die danach konstruierten Nietverbindungen im allgemeinen ihre Aufgabe erfüllt haben.

I. Einschnittige Vernietung.

In Fig. 136 haben wir zwei Bleche, *I* und *II*, die durch einen Niet oder einen Bolzen vom Durchmesser d verbunden sind. Die Kraft P soll aus dem einen Blech in das andere übergeleitet werden. Wie groß ist die Beanspruchung des Nietes?

a) Berechnung auf Abscheren.

Die Zerstörung dieser Verbindung kann dadurch geschehen, daß die beiden Teile *1* und *2* des Nietes infolge der Kräfte P sich gegenseitig verschieben, so daß der Niet die in Fig. 136c gezeigte Gestalt annimmt. In der Fläche α—α hat ein „*Abscheren*“ des Nietes stattgefunden. Um die hierbei auftretenden Spannungen zu bestimmen, schlägt man folgenden Rechnungsgang ein: Im Querschnitte α—α muß die Kraft P aufgenommen werden. Wir nehmen nun an, daß P sich gleichmäßig über die Querschnittsfläche F des Nietes verteilt (obgleich diese Annahme, wie sich auf theoretischem Wege nachweisen läßt, *nicht* zutreffen kann), und erhalten dann die auf jeden Quadratzentimeter entfallende Kraft („*Scherspannung*“)

$$t = \frac{P}{F},$$

$$(1) \qquad \text{Scherspannung}\ t = \frac{P}{d^2 \frac{\pi}{4}}.$$

Dieses ist also die Spannung, die in der Ebene des Querschnittes α—α durch die Lasten P erzeugt wird.

Digitized by Google

Hat man nun in den Blechen I und II eine zulässige Spannung k (z. B. $k = 1000$ kg/qcm), so gestattet man in dem Querschnitte α—α des Nietes eine zulässige innere Kraft t von 0,8 bis $0,9 \times k$, in Ausnahmefällen bis $1,0 \times k$ (also 800, 900, 1000 kg/qcm). Natürlich sind dieses Erfahrungszahlen, die je nach der bei der Nietarbeit verwendeten Sorgfalt verschieden zu wählen sind. Für Berechnungen, die behördlicher Kontrolle unterliegen, sind ganz bestimmte Scherspannungen t vorgeschrieben.

b) Berechnung auf Leibungsdruck.

Außer durch Abscheren kann die Zerstörung der Nietverbindung auch dadurch eintreten, daß der Niet sich in das Blech „einfrißt". Dieses geschieht meistens in der Weise, daß in der

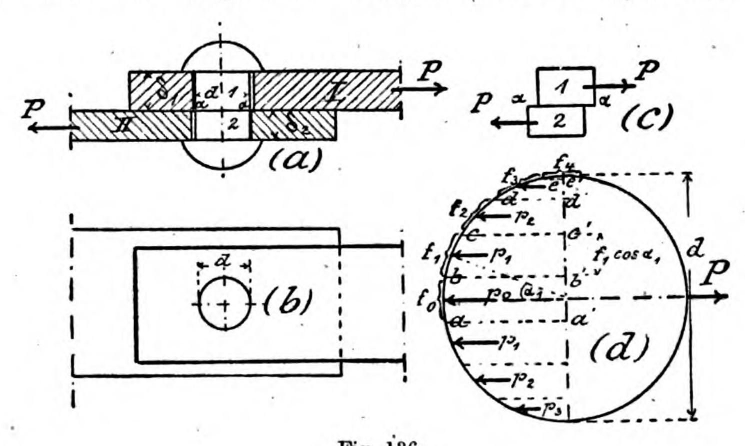


Fig. 136.

Fläche, wo sich Niet und Blech berühren, im letzteren zunächst feine Risse entstehen, die sich dann erweitern und den Bruch herbeiführen. In Fig. 136a sind die Stellen, in denen die Berührung zwischen Niet und Blechen stattfindet, etwas stärker gezeichnet. Im oberen Bleche kommt die linksseitige Hälfte des Nietschaftes zum Anliegen. Die Berührungsfläche ist also ein halber Zylindermantel mit dem Durchmesser d und der Höhe δ_1 und folglich dem Flächeninhalte $\frac{1}{2} d\pi \cdot \delta_1$. Im unteren Bleche ist die entsprechende, zum Anliegen kommende Fläche $\frac{1}{2} d\pi \cdot \delta_2$.

Nun wollen wir die Kräfte berechnen, die in diesen Berührungsflächen zwischen Niet und Blech — „*Leibungsflächen*" —

Digitized by Google

wirksam sind. Die Berührungsfläche mit dem Bleche I ist in der Draufsicht in Fig. 136d in größerem Maßstabe dargestellt. Die in dieser Fläche zwischen Nietschaft und Blech auftretenden Druckkräfte werden natürlich auf die einzelnen Teile der Fläche in verschiedener Größe und Richtung wirken. Der Einfachheit wegen wollen wir jedoch von diesen Berührungskräften nur die Komponenten berücksichtigen, die in Richtung der Kraft P verlaufen.

Zur Berechnung dieser Kräfte dient natürlich die Bedingung, daß sie insgesamt der Kraft P das Gleichgewicht halten. (Gleichgewichtsbedingung für das Blech I). Ich denke mir den Zylindermantel in eine Anzahl senkrecht stehender Streifen eingeteilt, von denen jeder ein kleines Rechteck darstellt, dessen Höhe gleich δ_1 und dessen Breite ein bestimmter Teil des Kreisumfanges ist (Fig. 136d). Die Kraft, die in dem Streifen f_0 von dem Niete auf das Blech I ausgeübt wird, betrage *pro Quadratzentimeter* p_0, insgesamt also

$$p_0 \cdot f_0 .$$

Die in dem Flächenstreifen f_1 pro Quadratzentimeter ausgeübte Kraft werde entsprechend p_1 kg/qcm genannt usw. Insgesamt übertragen also sämtliche Flächenstreifen des halben Zylindermantels die Kraft (Fig. 136d)

$$p_0 \cdot f_0 + 2(p_1 \cdot f_1 + p_2 \cdot f_2 + \ldots) .$$

(f_0 kommt nur einmal vor. Die anderen Streifen kommen in Fig. 136d doppelt vor.) Zur Berechnung dieser Kräfte dient also die Bedingung (Fig. 136d und a):

$$\text{(I)} \qquad p_0 \cdot f_0 + 2(p_1 \cdot f_1 + p_2 \cdot f_2 + \ldots) = P .$$

Die Kräfte p_0, p_1 usw. mögen die „*Leibungsspannungen*" heißen. Sie sind also die Kräfte, die an den einzelnen Stellen f_0, f_1 usw. der Leibungsfläche parallel der Kraft P wirken.

Da aus der einen obigen Gleichung sich nicht sämtliche verschiedenen Werte p_0, p_1 usw. berechnen lassen, müssen wir jetzt noch eine Annahme zu Hilfe nehmen. Diese laute: Die Leibungsspannungen p_1, p_2 usw. der Stellen f_1, f_2 usw. seien gleich der Spannung p_0 der Stelle f_0, multipliziert mit dem Kosinus der Winkel, die die nach f_1, f_2 usw. gezogenen Radien mit der Richtung von P einschließen. Es sei also in Fig. 136d:

$$\text{(II)} \qquad \begin{cases} p_1 = p_0 \cdot \cos\alpha_1 , \\ p_2 = p_0 \cdot \cos\alpha_2 \quad \text{usw.} \end{cases}$$


Digitized by Google

Da der Kosinus eines Winkels mit wachsendem Winkel ***abnimmt***, erhalten nach dieser Annahme die einzelnen Stellen einen um so kleineren Druck, je weiter sie von der Richtung der Kraft P entfernt sind. Dieses entspricht auch dem Gefühl. Denn sicherlich wird das Flächenelement, das direkt in Richtung der Kraft liegt, den größten Druck übertragen müssen, während die weiter liegenden Teile weniger beansprucht sind. Aus diesem Gefühl heraus ist natürlich auch die obige Annahme entstanden.

Setzen wir nun die Werte (II) in die Gleichung (I) ein, so erhalten wir:

(III) $$p_0 \cdot f_0 + 2(p_0 \cos\alpha_1 \cdot f_1 + p_0 \cos\alpha_2 \cdot f_2 + \ldots) = P.$$

In dieser Gleichung kommt nur noch die Unbekannte p_0 vor. Diese muß sich also auf jeden Fall ermitteln lassen.

Zunächst schreiben wir die obige Gleichung:

(III a) $$p_0 [f_0 + 2(\cos\alpha_1 \cdot f_1 + \cos\alpha_2 \cdot f_2 + \ldots)] = P.$$

Nun ist f_0 gleich dem Produkt aus der Höhe δ_1 mal dem kleinen Kreisbogen $\widehat{ab}$. Denken wir uns aber die Anzahl der Streifen sehr groß, so können wir den Kreisbogen als eine gerade Linie auffassen. Hiermit bekommen wir:

$$f_0 = \overline{ab} \cdot \delta_1.$$

Entsprechend ist

$$f_1 = \overline{bc} \cdot \delta_1,$$
$$f_2 = \overline{cd} \cdot \delta_1 \quad \text{usw.},$$

worin also $\overline{bc}$, $\overline{cd}$ usw. in Fig. 136d wegen ihrer Kleinheit nicht mehr als gebogene, sondern einfach als gerade Linien betrachtet werden können. Setzen wir die obigen Werte in Gleichung (III a) ein, so wird:

$$p_0 [\overline{ab} \cdot \delta_1 + 2(\cos\alpha_1 \cdot \overline{bc} \cdot \delta_1 + \cos\alpha_2 \cdot \overline{cd} \cdot \delta_1 + \ldots)] = P,$$

(III b) $$p_0 \cdot \delta_1 [\overline{ab} + 2(\overline{bc} \cdot \cos\alpha_1 + \overline{cd} \cdot \cos\alpha_2 + \ldots)] = P.$$

Nun ist aber, wenn wir in Fig. 136d durch die Punkte a, b, c usw. parallele Linien zu der Richtung von P ziehen,

die Strecke $\overline{ab} = \overline{a'b'}$,

„ „ $\overline{bc} \cdot \cos\alpha_1 = \overline{b'c'}$,

„ „ $\overline{cd} \cdot \cos\alpha_2 = \overline{c'd'}$.

Somit geht schließlich die Gleichung (III b) über in:

(III c) $$p_0 \cdot \delta_1 [\overline{a'b'} + 2(\overline{b'c'} + \overline{c'd'} + \ldots)] = P.$$

Digitized by Google

Die Summe in der eckigen Klammer ist aber nichts anderes als der Durchmesser d des Nietes (Fig. 136d), so daß sich schließlich die einfache Form ergibt:

$$p_0 \cdot \delta_1 \cdot d = P,$$

und hieraus folgt die bisher unbekannte Spannung:

$$p_0 = \frac{P}{d \cdot \delta_1}.$$

Hiermit haben wir die Gleichung (III), die ursprünglich zur Bestimmung von p_0 aufgestellt war, gelöst.

Die anderen Drücke, p_1, p_2 usw., können wir nun ebenfalls berechnen; sie bieten aber weiter kein Interesse, da sie kleiner als p_0 sind.

In der zum Bleche *II* gehörigen Leibungsfläche bekommen wir entsprechend den größten auf einen Quadratzentimeter entfallenden Druck

$$p_0' = \frac{P}{d \cdot \delta_2}.$$

Allgemein werden wir die größte Leibungsspannung als den „*Leibungsdruck p*" bezeichnen, so daß bei einem Nietdurchmesser d und einer Blechstärke δ die Formel lautet:

$$\text{(2)} \qquad \text{Leibungsdruck } p = \frac{P}{d \cdot \delta}.$$

Die Formeln (1) und (2) sagen also aus: Bei einer *einschnittigen* Vernietung ist

$$\text{Scherspannung } t = \frac{\text{aufzunehmende Kraft}}{\text{Inhalt der Scherfläche}},$$

$$\text{Leibungsdruck } p = \frac{\text{aufzunehmende Kraft}}{\text{Nietdurchmesser} \times \text{Leibungsstärke}}.$$

Je kleiner die „Leibungsstärke" (Blechdicke), um so größer ist der Leibungsdruck.

c) Die Tragfähigkeit eines Nietes.

Will man, umgekehrt, die Kraft bestimmen, die ein Niet vom Durchmesser d aufnehmen kann, der zwei Bleche verbindet, so schreibt man die Formeln (1) und (2) so, daß die Kraft auf der einen Seite allein steht. Die zulässige Scherspannung sei t, der zulässige Leibungsdruck sei p. Dann wird

$$P = \frac{d^2 \pi}{4} \cdot t; \quad \text{bzw.} \quad P = d\delta \cdot p.$$

Digitized by Google

(δ ist die kleinere der beiden Blechstärken.) Diese Kraft P wollen wir die *Tragfähigkeit* eines (einschnittigen) Nietes nennen und mit N bezeichnen. Die Tragfähigkeit eines einschnittigen Nietes ist also:

(1a) mit Rücksicht auf Abscheren: $N = \frac{d^2 \pi}{4} \cdot t$,

(2a) „ „ „ Leibungsdruck: $N = d \cdot \delta \cdot p$.

Der kleinere der beiden Werte ist natürlich für den betreffenden Niet maßgebend.

II. Zweischnittige Vernietung.

a) Berechnung auf Abscheren.

Wenn bei der in Fig. 137 dargestellten Verbindung eine Zerstörung durch *Abscheren* eintritt, so müssen sich die Teile des Nietes in *zwei* Flächen gegeneinander verschieben. Man bezeichnet

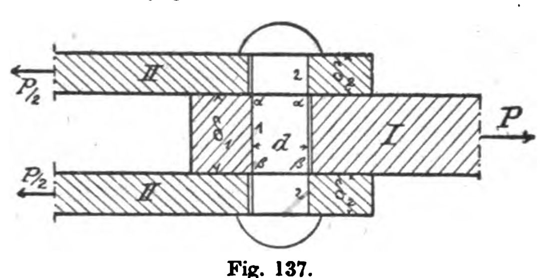


Fig. 137.

deshalb diese Verbindung *zweischnittig*. Nennen wir die Kraft, die aus Blech I in die beiden Bleche II übergeleitet werden soll, P, so entfällt also auf jeden der beiden Querschnitte α—α und β—β eine Kraft $\frac{1}{2} P$. Die in einem Querschnitte auftretende innere Kraft ist demnach:

$$t = \frac{\frac{1}{2} P}{d^2 \frac{\pi}{4}}.$$

(3) $$\text{Scherspannung } t = \frac{P}{2 \frac{d^2 \pi}{4}} = \frac{\text{aufzunehm. Kraft}}{\text{Inhalt beider Scherfl.}}.$$

b) Berechnung auf Leibungsdruck.

Bei der Untersuchung des *Flächendruckes* haben wir in der Berührungsfläche *1* einen größten Druck

$$p_0 = \frac{P}{d \cdot \delta_1},$$

da in dieser Fläche die Kraft P übertragen werden muß.

Digitized by Google

Für jede der beiden Berührungsflächen *2* kommt die Kraft $\frac{1}{2}P$ in Betracht. Wir haben also in diesen Flächen einen größten Flächendruck

$$p_0' = \frac{\frac{1}{2}P}{d \cdot \delta_2} = \frac{P}{d \cdot 2\,\delta_2}.$$

(4) **Leibungsdruck** $p = \frac{P}{d \cdot \delta} = \frac{\text{aufzunehm. Kraft}}{\text{Nietdurchm.} \times \text{Leibungsst.}}.$

Die „Leibungsstärke" ist hierbei immer die Höhe des zum Anliegen kommenden Halbzylinders. In Fig. 137 also entweder die Höhe δ_1 oder die Höhe $2 \cdot \delta_2$. Der *kleinere* der beiden Werte muß in die Formel eingesetzt werden, da der Leibungsdruck um so *größer* wird, je *kleiner* die Leibungsstärke ist.

c) Die *Tragfähigkeit eines zweischnittigen Nietes* ist:

(3a) mit Rücksicht auf Abscheren: $N = 2\frac{d^2\pi}{4} \cdot t,$

(4a) mit Rücksicht auf Leibungsdruck: $N = d \cdot \delta \cdot p.$

Zusatz: Herr Professor *v. Bach* geht bei der Berechnung der Niete von der Ansicht aus, daß ein warm eingezogener Niet sich beim Erkalten so sehr zusammenzieht, daß er die Lochwandung überhaupt nicht mehr berührt (vgl. *v. Bach*: Die Maschinenelemente). In diesem Falle kann natürlich weder in dem Niete eine Spannung t noch in der Lochleibung ein Flächendruck p entstehen. Die Übertragung der Kraft P aus dem einen Bleche in das andere kommt vielmehr dadurch zustande, daß der Niet die beiden Bleche so stark zusammenpreßt, daß die hierbei zwischen den Blechen entstehende Reibung zur Kraftübertragung ausreicht. Ob diese Theorie richtig ist, kann zurzeit noch nicht als endgültig entschieden angesehen werden. Vorläufig arbeitet man wenigstens bei der Berechnung von Eisenkonstruktionen ausschließlich nach den obigen Methoden.

III. Zuverlässige Spannungen.

Hinsichtlich der zulässigen Scherspannung t ist bereits gesagt, daß man sie als einen Bruchteil der zulässigen Spannung k nimmt, die für die zu verbindenden Konstruktionsteile gilt: Also:

$$t = m \cdot k,$$

worin der Faktor

$$m = 0{,}8\,; \quad \text{bzw.} \quad 0{,}9\,; \quad 1{,}0$$

gesetzt wird.

Digitized by Google

Den zulässigen Leibungsdruck nimmt man im allgemeinen zu:

$$p = 2\,\text{t}.$$

Der zulässige Flächendruck ist gleich dem Doppelten der zulässigen Scherspannung.

Werden an Stelle der Niete gewöhnliche Schrauben verwendet, so empfiehlt es sich, die obigen Beanspruchungen zu ermäßigen, da die Schrauben häufig ungenau anliegen.

IV. Wann ist Abscheren und wann ist Leibungsdruck maßgebend?

Bei der Berechnung von Nietanschlüssen muß man also im allgemeinen sowohl die größte Scherbeanspruchung als auch den größten Leibungsdruck ausrechnen und nachweisen, daß jeder dieser Werte die betreffende zulässige Grenze nicht überschreitet. Hierbei haben wir den zulässigen Leibungsdruck doppelt so hoch genommen wie die zulässige Scherspannung, $p = 2\,\text{t}$. Wir wollen jetzt untersuchen, in welchem Verhältnis die Stärke der zu verbindenden Bleche zu dem Durchmesser des Nietes stehen muß, damit die Tragfähigkeit der Nietverbindung mit Rücksicht auf Scherbeanspruchung gerade gleich ist derjenigen mit Rücksicht auf Leibungsdruck. Für eine *einschnittige* Verbindung ist

(1a) mit Rücksicht auf Abscheren: $N = \frac{d^2\pi}{4} \cdot t$,

(2a) „ „ „ Leibung $N = d\,\delta \cdot p$.

Nehmen wir nun für p den zulässigen Wert $2\,\text{t}$ und setzen die beiden Tragfähigkeiten einander gleich, so wird

$$\frac{d^2\pi}{4} \cdot t = d\delta \cdot 2\,\text{t}, \quad \frac{d^2\pi}{4} = 2d\delta,$$

$$\delta = \frac{\pi}{8} d = 0{,}3927\,d = \backsim 0{,}4\,d.$$

Wenn also die Blechstärke δ gerade gleich dem 0,4-fachen des Nietdurchmessers ist, trägt die Nietverbindung mit Rücksicht auf Abscheren ebensoviel wie mit Rücksicht auf Leibungsdruck. Daraus folgt: Ist δ *kleiner* als $0{,}4\,d$, d. h., wird die Berührungsfläche zwischen Niet und Blech kleiner, so ist die Tragfähigkeit der Nietverbindung mit Rücksicht auf Leibungsdruck geringer geworden (während die Tragfähigkeit mit Rücksicht auf Abscheren dieselbe geblieben ist); diese Nietverbindung muß also hinsichtlich *Leibungsdruck* untersucht werden. Umgekehrt, ist δ *größer* als

Digitized by Google

0,4 d, so könnte die Nietverbindung mit Rücksicht auf Flächendruck mehr aufnehmen, als die Tragfähigkeit für Scherbeanspruchung beträgt; dann müssen die Niete hinsichtlich *Scherspannung* untersucht werden. In Formeln:

Einschnittige Verbindung $\begin{cases} \delta < 0{,}4\,d: & \text{Niete auf Leibungsdruck berechnen,} \\ \delta > 0{,}4\,d: & \text{„ „ Abscheren „} \end{cases}$

In genau entsprechender Weise kann man aus den Formeln (3a) und (4a) für eine *zweischnittige* Verbindung ableiten:

Zweischnittige Verbindung $\begin{cases} \delta < 0{,}8\,d: & \text{Niete auf Leibungsdruck berechnen,} \\ \delta > 0{,}8\,d: & \text{„ „ Abscheren „} \end{cases}$

In diesen Formeln ist für δ stets die kleinste Leibungsstärke, die bei der Verbindung vorkommt, einzusetzen.

Gewöhnlich stellt es sich heraus, daß

einschnittige Niete auf Abscheren,
zweischnittige „ „ Leibungsdruck

zu rechnen sind.

Zusammenfassung.

Bei jeder Nietverbindung sind zwei Gesichtspunkte maßgebend: Abscheren und Leibungsdruck. Hinsichtlich Abscheren muß man beachten, ob die eventuelle Zerstörung der betreffenden Verbindung in *einer* Fläche oder gleichzeitig in *zwei* Flächen stattfindet. Hiernach ist die Verbindung als ein- oder zweischnittig zu beurteilen. Hinsichtlich Leibungsdruck muß man beachten, welche Leibungsstärken (Blechdicken) zum Anliegen kommen und die kleinere derselben als Wert „δ“ in die Formeln einführen.

Im einzelnen ergab sich:

Einschnittig:
Scherspan. $t = \dfrac{P}{\dfrac{d^2\pi}{4}}$; Leibungsdr. $p = \dfrac{P}{d \cdot \delta}$;
beziehungsw.: (falls t und p vorgeschrieben) Tragfähigkeit $N = \dfrac{d^2\pi}{4} t = d \cdot \delta \cdot p$

Zweischnittig:
Scherspan. $t = \dfrac{P}{2\dfrac{d^2\pi}{4}}$; Leibungsdr. $p = \dfrac{P}{d \cdot \delta}$ (wobei $\delta = \delta_1$ resp. $= 2\delta_2$; Fig. 137)
Tragfähigkeit $N = 2\dfrac{\delta^2\pi}{4} t = d \cdot \delta \cdot p$.

Statt p und t nachzuweisen, kann man nach Absatz IV auch direkt entscheiden, ob für die betreffende Nietverbindung p oder t maßgebend sein wird (vorausgesetzt, daß $p = 2 \times t$ zulässig ist).

Digitized by Google

§ 77a.

Beispiele zu § 77.

Erste Aufgabe.

Ein Flacheisen 60 · 8 trägt eine Last P = 4000 kg (Fig. 138a) *und ist mit drei Nieten von 16 mm ∅ an ein 12 mm starkes Knotenblech angeschlossen. Wie groß ist die Beanspruchung der Niete?*

Die Verbindung ist einschnittig. Die kleinste Leibungsstärke ist die des Flacheisens, nämlich 0,8 cm. Da die Kraft P durch *drei* Niete aufgenommen wird, kommt für jeden bei der Berechnung der Spannungen t und p nur $\frac{1}{3}P$ in Betracht. Somit wird

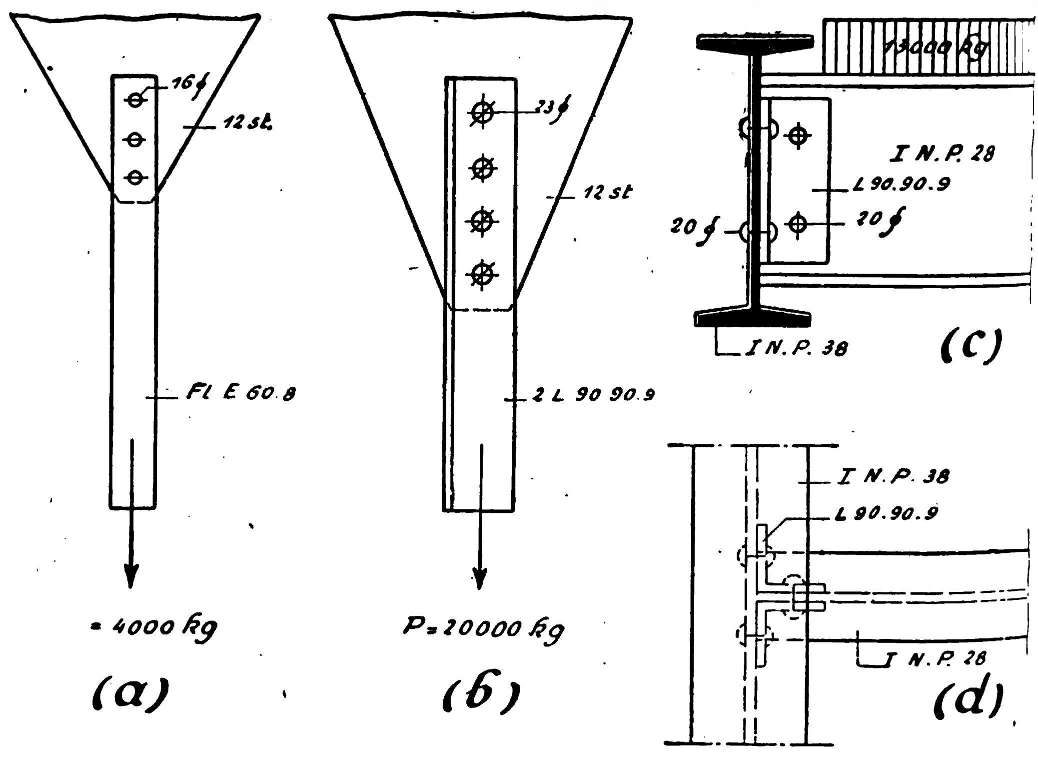


Fig. 138.

$$t = \frac{1}{3}\,\frac{P}{d^2\frac{\pi}{4}} = \frac{4000}{3 \cdot 1{,}6^2\frac{\pi}{4}} = \frac{4000}{3 \cdot 2{,}01} = 660 \text{ kg/qcm},$$

$$p = \frac{4000}{3 \cdot 1{,}6 \cdot 0{,}8} = 1040 \text{ kg/qcm}.$$

Beide Spannungen sind sehr gering.

Digitized by Google

Zweite Aufgabe.

Zwei Winkeleisen 90 · 90 · 9 (Fig. 138b), *die eine Last von 20000 kg tragen, sind durch vier Niete von 23 mm ∅ an ein 12 mm starkes Knotenblech angeschlossen. Wie groß ist die Beanspruchung der Niete?*

Die Verbindung ist zweischnittig. Die kleinste Leibungsstärke ist die des Knotenbleches, nämlich 1,2 cm. (Für die beiden Winkeleisen ist die Leibungsstärke $2 \cdot 0{,}9 = 1{,}8$ cm.) Für jeden der vier Niete ist also die Spannung

$$t = \frac{1}{4} \frac{20000}{2 \cdot 2{,}3^2 \frac{\pi}{4}} = \frac{20000}{4 \cdot 2 \cdot 4{,}15} = 600 \text{ kg/qcm},$$

$$p = \frac{20000}{4 \cdot 2{,}3 \cdot 1{,}2} = 1810 \text{ kg/qcm}.$$

Dritte Aufgabe.

Ein Träger I *N.-P. 28* (Fig. 138c) *der eine Last von 13000 kg trägt, ist an einem Träger* I *N.-P. 38 angewinkelt* (d. h. durch Winkeleisen angeschlossen). *Die Beanspruchungen der Anschlußniete bzw. -schrauben sind zu bestimmen!* (Fig. 138c, Ansicht, und Fig. 138d, Grundriß.)

Die von den Nieten aufzunehmende Kraft besteht in dem Auflagerdruck des I N.-P. 28; also

$$A = \frac{1}{2} 13000 = 6500 \text{ kg}.$$

Betrachten wir zunächst die Niete im I N.-P. 28. Sie sind zweischnittig. Die Leibungsstärke beträgt 1,01 cm (Stärke des Steges eines I N.-P. 28). Folglich wird für diese beiden zweischnittigen Niete:

$$t = \frac{1}{2} \frac{6500}{2 \cdot 2{,}0^2 \frac{\pi}{4}} = 520 \text{ kg/qcm},$$

$$p = \frac{1}{2} \frac{6500}{2{,}0 \cdot 1{,}01} = 1610 \text{ kg/qcm}.$$

Die Niete im I N.-P. 38 sind einschnittig. Die geringste Leibungsstärke ist für diesen Anschluß 0,9 cm (Stärke der Anschlußwinkel). Folglich wird für jeden der vier Niete (Fig. 138c und d):

$$t = \frac{1}{4} \frac{6500}{2{,}0^2 \frac{\pi}{4}} = 520 \text{ kg/qcm},$$

$$p = \frac{1}{4} \frac{6500}{2{,}0 \cdot 0{,}9} = 900 \text{ kg/qcm}.$$

Übungsaufgabe: Ein I N.-P. 30, das eine Last von 30000 kg trägt, ist an einem I N.-P. 34 angewinkelt. Der Anschluß ist zu berechnen!

Digitized by Google

§ 78.

Berechnung der Nietteilungen.

In Fig. 139 ist ein I-Eisen gezeichnet, das durch eine obere und eine untere Lamelle verstärkt ist. Wir wollen uns die Aufgabe stellen, an diesem einfachen Beispiele die Beanspruchung der Lamellen-Anschlußniete zu bestimmen.

I. Allgemeines über die Wirkungsweise der Niete.

Die Aufgabe, die die Niete zu erfüllen haben, erkennt man am besten, wenn man die Konstruktion im durchgebogenen Zustande zeichnet. In Fig. 139b ist hierbei angenommen, daß die drei Teile (die beiden Lamellen und der I-Träger) *ohne* Zusammenhang seien; während in Fig. 139c die einzelnen Teile durch die Niete zu einem zusammenhängenden Körper verbunden sind. Im ersten Falle haben wir drei voneinander unabhängige Teile. Jeder derselben biegt sich als ein selbständiger Körper durch. Er erleidet also in der oberen Schicht eine Verkürzung, in der unteren eine Verlängerung. An der Stelle, wo sich die obere (zusammengedrückte) Schicht des I-Eisens und die untere (gedehnte) Schicht der oberen Lamelle berühren, muß also *eine gegenseitige Verschiebung von Lamelle und Träger* eintreten. Ebenso findet auf der unteren Seite eine Verschiebung der ursprünglich aufeinander passenden Berührungsflächen statt; jetzt aber in dem Sinne, daß die untere Schicht des I-Eisens sich ausdehnt, während die obere Schicht der Lamelle sich verkürzt. Dieselbe Formänderung kann man übrigens bei jedem Bretterstapel beobachten, der sich durchbiegt. Hier hat sich die Unterfläche eines jeden Brettes verschoben gegenüber der oberen Fläche des darunterliegenden Brettes, so daß die ursprünglich *ebene* Stirnfläche des Stapels infolge der Durchbiegung des Stapels eine treppenförmige Gestalt annimmt.

Nun erkennt man auch die Aufgabe der Niete. Sie besteht darin, die einzelnen Teile so zu einem Ganzen zu verbinden, *daß keine gegenseitige Horizontalverschiebung zweier aufeinander liegender Schichten eintreten kann.* Die Ausnutzung des Materials ist hierbei natürlich viel günstiger. Denn wenn im vorliegenden Beispiel die Lamellen nicht mit dem Träger verbunden sind, so biegen sie sich durch, ohne einen nennenswerten Teil der Lasten aufzunehmen, so daß das I-Eisen fast allein die gesamte Belastung zu tragen hat. Sind dagegen die einzelnen Teile miteinander ver-

Digitized by Google

bunden, so muß die obere Lamelle die Verkürzung des oberen Flansches vom I-Eisen mitmachen; sie wird also in ihrem ganzen Querschnitte auf Druck beansprucht und nimmt somit dem I-Eisen einen Teil der Druckspannungen ab. In entsprechender Weise wird durch die Nietung die untere Lamelle zur Aufnahme der Zugspannungen herangezogen, so daß die Tragfähigkeit der ganzen Konstruktion bedeutend vergrößert wird.

II. Die auf die Seitenflächen eines Lamellenstückes wirkenden Horizontalkräfte.

Die Aufgabe der Niete in Fig. 139a besteht also darin, eine Verschiebung der Lamellen gegen den I-Träger nach Art von Fig. 139b zu verhindern. Um nun die Beanspruchung der Niete

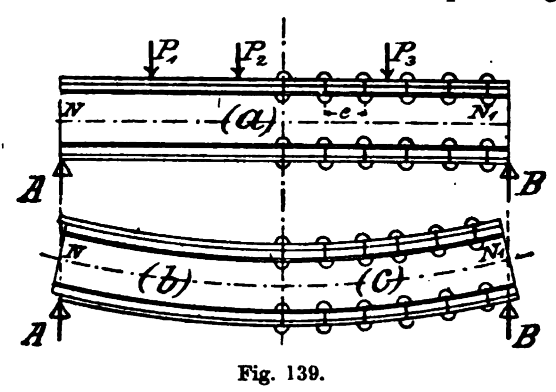


Fig. 139.

festzustellen, wollen wir zunächst die im Innern wirkenden Kräfte aufsuchen, die, falls keine Niete vorhanden wären, eine Verschiebung der Lamelle hervorrufen würden.

In Fig. 140a ist ein Stück des Trägers Fig. 139a in etwas größerem Maßstabe dargestellt. Wir wollen ein Lamellenstück $\alpha\,\alpha\,\beta\,\beta$ (Fig. 140a) betrachten, dessen Länge Δx sei und dessen Breite b ist. In Fig. 140c und d ist dieses Lamellenstück noch einmal in Ansicht und Perspektive dargestellt. Wie groß sind nun zunächst die Normalkräfte, die auf die linke Seitenfläche $\alpha\,\alpha\,\alpha'\alpha'$ dieses Lamellenstückes (Fig. 140d) wirken?

Zur Berechnung dieser inneren Kräfte sei die Seitenfläche $\alpha\,\alpha\,\alpha'\alpha'$ in eine Anzahl horizontaler Streifen zerlegt. In Fig. 140d und b sind der Deutlichkeit wegen nur drei angedeutet. Aus der Biegungslehre ist bereits bekannt, daß rechtwinklig zu der Seitenfläche $\alpha\,\alpha\,\alpha'\alpha'$ auf deren einzelne Schichten pro Quadratzentimeter folgende inneren Kräfte wirken:

Digitized by Google

auf den Streifen f_1 die Spannung $\sigma_1 = -\frac{M}{J} \cdot y_1$,

" " " f_2 " " $\sigma_2 = -\frac{M}{J} \cdot y_2$ usw.

Hierin ist M die Momentensumme des Balkens in bezug auf den Schwerpunkt S (Fig. 140a, Schnitt α—α); J ist das Trägheitsmoment des Gesamtquerschnittes (I-Eisen mit Lamellen) und y_1, y_2 usw. sind die Abstände der betrachteten Schichten f_1, f_2 usw. von der Nullinie des Querschnittes. (Da die Spannung sich von Punkt zu Punkt ändert, müssen zur genauen Bestimmung die Schichten bekanntlich unendlich dünn genommen werden. Die drei eingezeichneten Schichten sollen nur als Anhalt für die Rechnung dienen.)

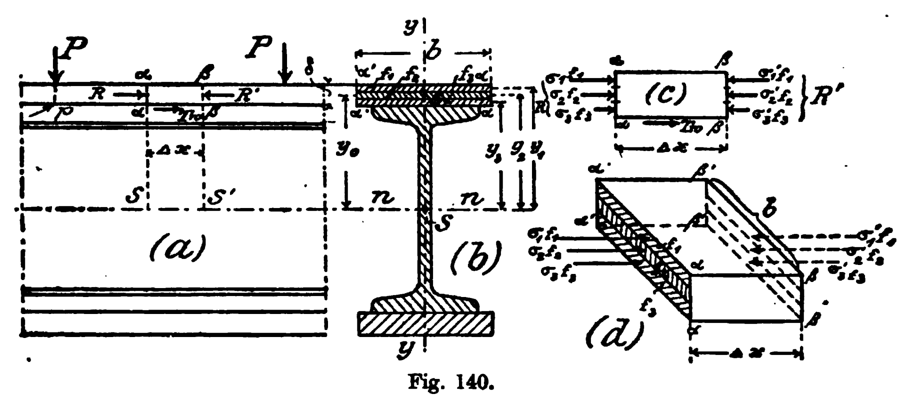


Fig. 140.

Multiplizieren wir nun die Spannungen σ_1, σ_2 usw. (Kräfte pro Quadratzentimeter) mit den Inhalten der zugehörigen Streifen f_1, f_2 usw., so erhalten wir die *gesamten* inneren Normalkräfte, die auf die einzelnen Streifen wirken. Es wirkt also

auf den Streifen f_1 die Normalkraft $\sigma_1 \cdot f_1 = \frac{M}{J} y_1 \cdot f_1$,

" " " f_2 " " $\sigma_2 \cdot f_2 = \frac{M}{J} y_2 \cdot f_2$ usw.

Die Vorzeichen sind jetzt nicht mehr hinzugeschrieben; dafür sind die Kräfte so, wie sie auf die Flächen wirken (also als Druckkräfte, da das betrachtete Lamellenstück oberhalb der Nullinie liegt) in Fig. 140c und d eingezeichnet. Da diese Normalkräfte sich innerhalb eines jeden Streifens gleichmäßig in der Breite b verteilen, wurden sie auf der Symmetrieachse y—y der Streifen aufgetragen. Addieren wir nun diese Kräfte $\sigma_1 \cdot f_1, \sigma_2 \cdot f_2$ usw.,

Digitized by Google

so ergibt sich die Summe aller auf die Seitenfläche wirkenden Normalkräfte. *Die Summe aller rechtwinklig auf die Seitenfläche $\alpha\,\alpha\,\alpha'\alpha'$ des betrachteten Lamellenstückes wirkenden inneren Kräfte ist also:*

$$R = \frac{M}{J} y_1 \cdot f_1 + \frac{M}{J} y_2 \cdot f_2 + \ldots,$$

$$\text{(I)} \qquad R = \frac{M}{J} (f_1 \cdot y_1 + f_2 \cdot y_2 + \ldots).$$

Nun gehen wir zu der *rechten* Seitenfläche und untersuchen, welche Kräfte hier einwirken. In dem oberen Streifen herrscht die Spannung

$$\sigma_1' = - \frac{M'}{J} \cdot y_1 ;$$

worin M' das Moment in bezug auf Schwerpunkt S' (Schnitt β—β) bedeutet, während J und y denselben Wert haben wie vorhin. Entsprechend wirken auf die anderen Streifen die Spannungen

$$\sigma_2' = - \frac{M'}{J} \cdot y_2 ; \quad \text{usw.}$$

Multiplizieren wir nun wieder diese auf die Flächeneinheit einwirkenden Kräfte mit den Flächeninhalten und addieren die Produkte, so bekommen wir *die Summe aller inneren Kräfte, die auf die rechte Seitenfläche ausgeübt werden:*

$$\text{(II)} \qquad R' = \frac{M'}{J} (f_1 \cdot y_1 + f_2 \cdot y_2 + \ldots).$$

(Die Flächeninhalte f_1, f_2, f_3 sind dieselben wie auf der linken Seite.)

Der Klammerausdruck $(f_1 \cdot y_1 + f_2 \cdot y_2 + \ldots)$ stellt die Summe der statischen Momente der Flächenstreifen f_1, f_2 usw. in bezug auf die Nullinie des Gesamtquerschnittes dar. Nach § 47 (Zusatz) können wir hierfür das statische Moment der Gesamtfläche $(f_1 + f_2 + \ldots)$ in bezug auf die Nullinie nehmen. Statt also die Produkte $f_1 \cdot y_1$, $f_2 \cdot y_2$ usw. einzeln auszurechnen und dann zu addieren, werden wir einfach die Querschnittsfläche F der ganzen Lamelle mit dem Abstande y_0 ihres Schwerpunktes multiplizieren (Fig. 140b). Mit dieser Vereinfachung lauten dann unsere Ausdrücke:

$$\text{(Ia)} \qquad R = \frac{M}{J} \cdot F \cdot y_0 = M \cdot \frac{S}{J},$$

$$\text{(IIa)} \qquad R' = \frac{M'}{J} \cdot F \cdot y_0 = M' \cdot \frac{S}{J},$$

Digitized by Google

wobei zur Abkürzung das statische Moment $F \cdot y_0$ der Lamellenfläche in bezug auf die Nullinie mit „S" bezeichnet wurde. Somit haben wir die rechtwinklig zu den Seitenflächen $\alpha\alpha\alpha'\alpha'$ und $\beta\beta\beta'\beta'$ des betrachteten Lamellenstückes wirkenden inneren Kräfte R und R' durch zwei sehr einfache Formeln bestimmt.

III. Die horizontale Verschiebungskraft des Lamellenstückes.

Nun wollen wir den Unterschied der beiden Horizontalkräfte R und R' von Fig. 140a bilden. Er werde ΔR genannt und ergibt sich aus den Formeln (Ia) und (IIa):

$$\Delta R = R' - R = M' \cdot \frac{S}{J} - M \cdot \frac{S}{J},$$

$$\text{(III)} \qquad \Delta R = (M' - M)\frac{S}{J}.$$

Diese Kraft ΔR stellt also den Überschuß der auf die eine Seite wirkenden Horizontalkräfte gegenüber der Summe der auf die andere Seitenfläche wirkenden Kräfte dar. Ist M' größer als M, so ist R' größer als R; dann wirkt also der Überschuß ΔR nach links. Ist M' kleiner als M, so wirkt ΔR nach rechts. (Bei der unteren Lamelle sind die Richtungen umgekehrt, da hier die Kräfte R und R' als Zug auf das Lamellenstück wirken.) Da die Differenz der Momentensummen zweier aufeinander folgenden Querschnitte stets gleich der Kraftsumme an der betreffenden Stelle, multipliziert mit der Entfernung der beiden Querschnitte, ist (§ 57, I), so können wir die obige Formel auch schreiben (Fig. 140a):

$$\text{(IIIa)} \qquad \Delta R = Q \cdot \Delta x \cdot \frac{S}{J}.$$

Hierin ist also Q die Kraftsumme des Balkens für die Stelle des betrachteten Lamellenstückes. Ist an der betreffenden Stelle die Querkraft Q positiv, so bedeutet dieses, daß auch $M' - M$ positiv ist, und in diesem Falle wirkt, wie bereits gesagt ist, die Kraft ΔR nach links. Ist aber Q negativ, so wirkt auf das betreffende Lamellenstück die Kraft ΔR nach rechts.

Sobald also der Träger Fig. 139a Belastung bekommt und hierdurch in Spannung versetzt wird, wirkt im durchgebogenen (gespannten) Zustande des Trägers auf jedes Lamellenstück Δx eine derartige Kraft ΔR. Nach den Lehren der Mechanik könnten also die einzelnen Lamellenstücke gar nicht im Ruhezustand sein, da die Wirkung einer an einem Körper vorhandenen Kraft stets

Digitized by Google

eine Inbewegungsetzung des betreffenden Körpers ist. Wie kommt es nun, daß trotzdem, sobald sich der Balken genügend durchgebogen hat, jeder Teil desselben, und also auch die Lamelle, eine bestimmte Lage als dauernde Ruhelage für den gespannten Zustand beibehält?

IV. Die auf die Niete entfallenden Kräfte.

Dieses kommt daher, weil die einzelnen Lamellenstücke durch die Niete mit dem anderen Teile des Balkens verbunden sind. Würde man plötzlich diese Verbindung lösen, so würden in demselben Augenblicke auch die Kräfte ΔR ihre Wirkung zeigen: Der linke Teil der Lamelle würde nach links (Fig. 139b), der rechte nach rechts schnellen. Jetzt aber wirken die Niete wie Dorne, die durch die Lamelle hindurchgesteckt sind und eine Bewegung verhindern.

Durch diese Überlegung ist auch sofort die von Nieten aufzunehmende Kraft bestimmt: Die Länge einer Nietteilung (Entfernung von einem Niet bis zum nächsten) sei e (Fig. 139a). Dann entfällt auf die einzelnen Niete je ein Lamellenstück von Mitte Nietteilung auf der einen Seite des Nietes bis zur Mitte Nietteilung auf der anderen Seite; also ebenfalls von der Länge e. Ein solches Lamellenstück muß von dem Niet angeschlossen werden. Die hierzu gehörige Verschiebungskraft ist nach Formel (IIIa):

$$\Delta R = Q \cdot e \cdot \frac{S}{J},$$

und dieser Kraft muß also von dem Niete das Gleichgewicht gehalten werden.

Häufig sitzen in einem Lamellenschnitte mehrere Niete in einer Querreihe nebeneinander. Bei Fig. 139a zum Beispiel wird man in jeder Lamelle im allgemeinen die Niete paarweise setzen (je einen Niet auf jeder Seite des Trägersteges). In solchen Fällen verteilt sich dann die aufzunehmende Kraft ΔR auf so viel Niete, wie innerhalb einer Nietteilung die Lamelle anschließen. Ist die Anzahl dieser Niete n (gewöhnlich $n = 1$ oder $= 2$), so lautet also die Formel für die pro Niet aufzunehmende Kraft:

$$\text{(IV)} \qquad \boxed{P = \frac{1}{n} \cdot Q \cdot e \cdot \frac{S}{J}.}$$

In Worten: *Die auf einen Niet entfallende Kraft P ist gleich der Querkraft Q an der betreffenden Stelle des Balkens, multipliziert mit*

Digitized by Google

der Nietteilung e, multipliziert mit dem statischen Moment des anzuschließenden Teiles in bezug auf die Nullinie des Gesamtquerschnittes, dividiert durch das Trägheitsmoment des Gesamtquerschnittes und dividiert durch die Anzahl der Niete, die in ein und demselben Schnitte den Anschluß des betreffenden Querschnittsteiles bewirken.

Die Formel (IV) gilt natürlich nicht nur für den einfachen Fall Fig. 139a, sondern immer dann, wenn ein Träger aus mehreren, in Richtung der Längsachse verlaufenden Teilen besteht, die durch die betreffenden Niete zu einem Ganzen verbunden werden sollen.

Das **statische Moment** S ist stets von *einem* der beiden Teile zu bilden, in die der Träger durch die betreffende Längsfuge zerlegt wird. Es ist gleichgültig, welchen der beiden Teile man nimmt, da ihre statischen Momente sich nur durch das Vorzeichen unterscheiden. (Zusammen geben sie ja für die Nullinie das Moment Null.) Natürlich wird man stets den einfacheren Querschnittsteil wählen.

Das **Trägheitsmoment** J ist — wie bereits gesagt — von dem gesamten Querschnitt und selbstverständlich für dessen Nullinie zu bilden. Sowohl bei der Berechnung von J als auch von S sind die Querschnittsflächen *ohne Nietabzug* zu nehmen! Denn die Endflächen des zu einem Niete gehörigen Lamellenstückes liegen in den Mitten der Nietteilungen, also da, wo keine Nietlöcher sitzen, und von den in diesen Endflächen auftretenden Spannungen ist bei der Ableitung der Formel ausgegangen. Es ist also nicht nur bequem, sondern auch durchaus berechtigt, wenn die Schwächung der einzelnen Querschnittsteile durch Nietlöcher bei Anwendung der obigen Formel nicht berücksichtigt wird.

Für die **Querkraft** Q ist natürlich der *größte* (positive oder negative) Wert einzusetzen, der an der betreffenden Stelle für Q entstehen kann. Bei beweglicher Belastung ist also zunächst die für den Querschnitt gefährliche Laststellung aufzusuchen und dann die größte Kraftsumme der betrachteten Stelle zu ermitteln (11. und 12. Vortrag). Beim Träger zwischen zwei Stützen entsteht die größte Querkraft stets in dem unmittelbar am Auflager gelegenen Querschnitte (s. 10. und 11. Vortrag); die Querschnitte nach der Mitte zu haben geringere Kraftsummen. Wenn also S und J unveränderlich sind (Träger mit auf die ganze Länge durchgeführten Lamellen), sind die Niete am Auflager am meisten beansprucht. Nach der Mitte zu können die Niete schwächer genommen oder in größerem Abstande voneinander gesetzt werden (s. auch die folgenden Beispiele).

Digitized by Google

Die Nietteilung e wird *in Richtung der Längsachse* des Balkens gemessen, von einem Niet zum nächstfolgenden. Bei zickzackförmiger Anordnung der Niete ist also nicht der eigentliche, schräge Abstand zweier Niete, sondern die Projektion dieses Abstandes auf die Längsachse des Trägers als Teilung e einzusetzen.

Die **Anzahl n** findet man dadurch, daß man an der Stelle, wo die Niete sitzen, durch den anzuschließenden Querschnittsteil einen Querschnitt legt und dann nachsieht, wieviel Niete den Anschluß bewirken.

Sobald die von den einzelnen Nieten aufzunehmende Kraft P bekannt ist, lassen sich nach den Lehren des vorigen Paragraphen die auftretende Scherspannung t und der Leibungsdruck p bestimmen. Hiermit ist dann die Untersuchung der betreffenden Nietverbindung erledigt.

V. Berechnung der Nietteilung e bei gegebener Tragfähigkeit N.

Umgekehrt läßt sich aus der Formel (IV) die zulässige Nietteilung e berechnen, sobald die Tragfähigkeit N eines Nietes gegeben ist. Durch Umstellung der Formel (IV) finden wir sofort:

$$e = n \cdot \frac{N}{Q} \cdot \frac{J}{S} \cdot \qquad \text{(V)}$$

Die Tragfähigkeit N eines Nietes siehe aus den Formeln (1a) und (2a), bzw. (3a) und (4a) der vorigen Paragraphen. Natürlich ist von den beiden, mit Rücksicht auf Scherung und auf Leibung sich ergebenden Werten von N der *kleinere* in die obige Formel einzuführen.

VI. Spannungen bei angeschweißten u. dgl. Teilen.

Wäre in Fig. 140 die Lamelle nicht durch Niete, sondern durch Walzen, Schweißeisen usw. mit dem I-Eisen verbunden, so müßte natürlich trotzdem die Kraft ΔR irgendwie aufgenommen werden. In diesem Falle würden in der horizontalen Schnittfläche α—β (Fig. 140a) Spannungen entstehen, die zusammen eine resultierende Kraft T_w gleich ΔR liefern. Aus dieser Überlegung erkennt man, daß bei einem auf Biegung beanspruchten Balken auch in horizontal gelegten Schnitten innere Kräfte wirken. Sie brauchen im allgemeinen nicht weiter untersucht zu werden; es sollte nur an dieser Stelle kurz darauf hingewiesen werden.

Digitized by Google

§ 78a.

Beispiele zu § 78.

Erste Aufgabe.

Ein I-Träger N.-P. 30 mußte durch eine obere und eine untere Lamelle von je 160 · 12 verstärkt werden (vgl. Fig. 139a). Die Spannweite ist 300 cm; die Belastung ist gleichförmig verteilt und beträgt 28000 kg. Die Niete haben 16 mm ∅ und sitzen paarweise in einem Abstand von $e = 10$ cm. Die Beanspruchung der Niete ist zu berechnen!

Es ist gleichgültig, ob wir die obere oder die untere Nietreihe untersuchen. Der anzuschließende Querschnittsteil ist ein Rechteck mit der Fläche

$$F = 16{,}0 \cdot 1{,}2 = 19{,}2 \text{ qcm}.$$

Je *zwei* Niete bewirken in einem Querschnitte den Anschluß einer Lamelle. Die auf einen Niet entfallende Kraft ist also nach Formel (IV):

$$P = \frac{1}{2} \cdot Q \cdot 10{,}0 \cdot \frac{S}{J}.$$

S, das statische Moment des anzuschließenden Teiles, ist (man zeichne den Querschnitt des Trägers auf!):

$$S = F \cdot 15{,}6 = 19{,}2 \cdot 15{,}6 = 300 \text{ cm}^3.$$

Das Trägheitsmoment J der ganzen Querschnittsfläche ist:

$$\begin{aligned} J &= 9785 + 2 \cdot 19{,}2 \cdot 15{,}6^2 \\ &= 9785 + 2 \cdot 300 \cdot 15{,}6 = 19145 \text{ cm}^4. \end{aligned}$$

(Das Trägheitsmoment der Lamellen in bezug auf ihre eigenen Schwerachsen ist vernachlässigt worden.)

Die Querkraft Q ist am größten unmittelbar am Auflager. Für diese Stelle ist:

$$Q = A = \frac{1}{2} 28000 = 14000 \text{ kg}.$$

Der erste Niet muß also eine Kraft aufnehmen:

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2} \cdot 14000 \text{ kg} \cdot 10{,}0 \text{ cm} \cdot \frac{300 \text{ cm}^3}{19145 \text{ cm}^4} \\ &= 1100 \text{ kg}. \end{aligned}$$

Da der Niet einschnittig ist, entstehen hieraus die Beanspruchungen (Leibungsstärke 1,2 cm):

Digitized by Google

$$\text{Scherspannung } t = \frac{1100}{1{,}6^2 \frac{\pi}{4}} = 550 \text{ kg/qcm},$$

$$\text{Leibungsdruck } p = \frac{1100}{1{,}6 \cdot 1{,}2} = 570 \text{ kg/qcm}.$$

Beide Beanspruchungen sind sehr gering. (Da δ größer als 0,4 d war, brauchte der Leibungsdruck p gar nicht ausgerechnet zu werden; denn er konnte auf keinen Fall größer als das Doppelte von t werden.)

Für einen Querschnitt weiter vom Auflager ergeben sich noch niedrigere Beanspruchungen der Niete, da die Querkraft Q nach der Mitte des Balkens abnimmt. Aus praktischen Gründen wird man aber trotzdem die Niete nicht weiter stellen, da bei einer zu großen Nietteilung die einzelnen Teile nicht mehr genau aufeinander aufliegen. Bekanntlich nimmt man die größte Nietteilung höchstens gleich dem 6- bis 7-fachen des Nietdurchmessers. (Bei bloßen Heftnieten natürlich beliebig mehr.)

Übungsaufgabe: Bestimme für die vorige Aufgabe die Nietbeanspruchung in $^1/_4$ der Spannweite!

Zweite Aufgabe.

Der Obergurt eines Kranträgers (Fig. 141a und b) besteht aus 2 [N.-P. 22 und einer Kranschiene Rote Erde Nr. 2. Die Spannweite des Gurtstabes — von Knotenpunkt zu Knotenpunkt gerechnet — beträgt 1,60 m. Die Belastung besteht aus zwei Radlasten von je 6000 kg im Abstande von 1,20 m voneinander. Die Beanspruchung der Anschlußniete der Kranschiene ist zu berechnen!

Die Lage der Nullinie und das Trägheitsmoment dieses Querschnittes sind bereits in § 54, 4. Aufgabe, bestimmt. Es ergaben sich:

$$z = 8{,}84 \text{ cm}; \quad J = 10517 \text{ cm}^4.$$

(z ist der Abstand der Nullinie von der Schwerachse der Schiene) Der Flächeninhalt der Schiene ist

$$F = 41{,}01 \text{ qcm};$$

folglich wird das statische Moment

$$S = 41{,}01 \cdot 8{,}84$$
$$= 363 \text{ cm}^3.$$

28*

Die größte Querkraft entsteht in dem Querschnitte am Auflager. Die für diesen Querschnitt gefährliche Laststellung der beweglichen Belastung ist in Fig. 141a gezeichnet. Es ergibt sich

$$Q = A = 6000 + 6000 \cdot \frac{40}{160}$$

$$= 6000\left(1 + \frac{40}{160}\right)$$

$$= 7500 \text{ kg.}$$

(Die erste Last steht unendlich nahe vor dem Auflager.)

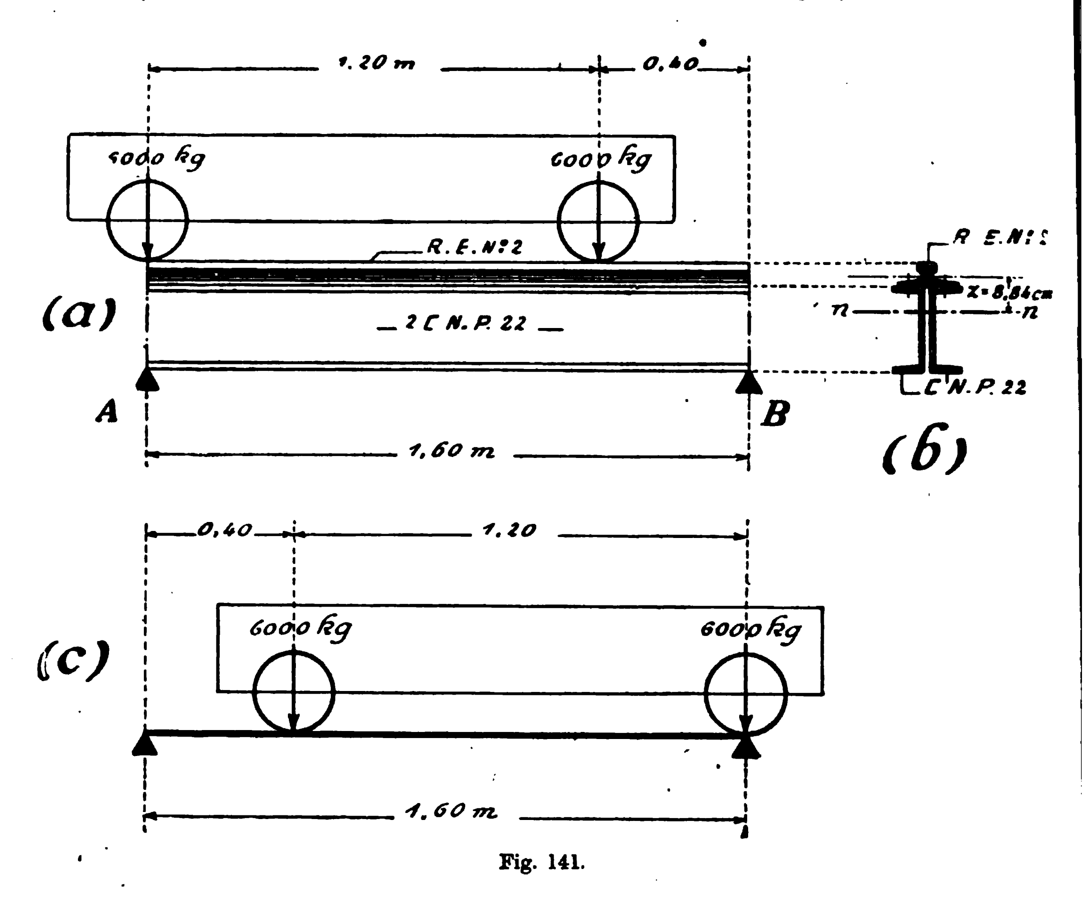


Fig. 141.

Der Anschluß geschehe durch Niete (bzw. Schrauben) von 16 mm ∅, die paarweise im Abstande $e = 11{,}0$ cm stehen. Somit wird die Kraft pro Niet:

Digitized by Google

$$P = \frac{1}{2} \cdot 7500 \cdot 11.0 \frac{363}{10517}$$

$$= 1420 \text{ kg.}$$

Scherspannung $t = \dfrac{1420}{1{,}6^2 \cdot \dfrac{\pi}{4}} = 710$ kg/qcm.

Der größte Leibungsdruck braucht nicht ausgerechnet zu werden, da die kleinste Leibungsstärke größer als $0{,}4 \cdot d$ ist. Es kann also p nicht die zulässige Größe von $2 \cdot t$ erreichen.

Übungsaufgabe: Bestimme die Nietbeanspruchung an einer Stelle 0,40 m vom Auflager!

Hier ist die größte Querkraft (Fig. 141 c):

$$Q = \frac{6000 \cdot 120}{160} = 4500 \text{ kg.}$$

Dritte Aufgabe.

Ein Nietträger, bestehend aus einem Stehblech 600 · 10, vier Gurtwinkeln 100 · 100 · 12 und zwei Lamellen 240 · 14, ist nach Fig. 142 a belastet. Die Niete haben 20 mm ∅, 800 kg/qcm zulässige Scherspannung und 1600 zulässigen Leibungsdruck. Die Nietteilungen sind zu bestimmen!

Die allgemeine Formel zur Berechnung der Nietteilungen lautet [Formel (V)]:

$$e = n \cdot \frac{N}{Q} \cdot \frac{J}{S}.$$

Betrachten wir zunächst die Niete, die durch die Lamelle und die horizontalen Winkelschenkel gehen (Fig 142 c). Der von diesen Nieten anzuschließende Querschnittsteil ist die Lamelle. Je zwei Niete sind in einem Schnitte zum Anschluß wirksam. Für die Anzahl n in der obigen Formel ist also einzusetzen:

$$n = 2\,.$$

Die Tragfähigkeit N eines dieser einschnittigen Niete ist:

$$N = 2{,}0^2 \frac{\pi}{4} \cdot 800 = 2510 \text{ kg.}$$

(Die Tragfähigkeit auf Leibungsdruck würde mehr ergeben, da die kleinste Leibungsstärke, 1,2 cm, größer als $0{,}4\,d$ ist.)

Das statische Moment des anzuschließenden Querschnittsteiles ist (Fig. 142 c):

$$S = 24{,}0 \cdot 1{,}4 \cdot 30{,}7 = 1032 \text{ cm}^3.$$

Digitized by Google

Das Trägheitsmoment des ganzen Querschnittes ist (Fig. 142 b):

$$J = \frac{1}{12} 1{,}0 \cdot 60^3 + 4(207 + 22{,}7 \cdot 27{,}1^2) + 2 \cdot 24{,}0 \cdot 1{,}4 \cdot 30{,}7^2$$
$$= 18000 + 67510 + 63340$$
$$= 148850 \text{ cm}^4.$$

(Die Trägheitsmomente der Lamellen für ihre eigenen Schwerachsen sind vernachlässigt.)

Betrachten wir nun die Niete im Felde *0—1*, so ist für diese die Kraftsumme Q (Fig. 142 a):

$$Q = 40250 - 11500 = 28750 \text{ kg}.$$

Wir erhalten also für diese Niete die zulässige Nietteilung

$$e = 2 \cdot \frac{2510 \text{ kg}}{28750 \text{ kg}} \cdot \frac{148850 \text{ cm}^4}{1032 \text{ cm}^3}$$
$$= 25 \text{ cm}.$$

Aus praktischen Gründen muß diese Nietteilung natürlich kleiner gemacht werden.

Nun wollen wir die Niete untersuchen, die durch die vertikalen Winkelschenkel und das Stehblech gehen (Fig. 142 d). Die Längsfuge, die durch diese Niete überbrückt werden soll, sieht in der Querschnittsfläche ⊓-förmig aus. Auf der einen Seite dieser Fuge befindet sich die gesamte Gurtung, bestehend aus den beiden Winkeleisen und der Lamelle (diese drei Teile sind durch die vorhin untersuchten Niete bereits zu einem Ganzen verbunden); auf der anderen Seite der Fuge ist der übrige Querschnitt.

Für diese Niete ist (Fig. 142 a und d):

$$n = 1\,.$$
$$N = 2{,}0 \cdot 1{,}0 \cdot 1600 = 3200 \text{ kg}.$$

(Leibungsdruck ist für den zweischnittigen Niet maßgebend.)

Das statische Moment des anzuschließenden Teiles ist jetzt:

$$S = 24{,}0 \cdot 1{,}4 \cdot 30{,}7 + 2 \cdot 22{,}7 \cdot 27{,}1$$
$$= 1032 + 1230$$
$$= 2262 \text{ cm}^3.$$

(Der erste Teil rührt von der Lamelle, der zweite von den beiden Winkeln her.)

Das Trägheitsmoment und die Querkraft sind wie vorhin:

$$J = 148850 \text{ cm}^4,$$
$$Q = 28750 \text{ kg}.$$

Digitized by Google

Somit wird für diese Niete die zulässige Nietteilung:

$$e = 1 \cdot \frac{3200}{28750} \cdot \frac{148850}{2262}$$
$$= 7{,}3 \text{ cm.}$$

Man sieht, daß die horizontalen Niete eine sehr enge Nietteilung verlangen, während die vertikal stehenden Niete in viel größerem Abstande gesetzt werden könnten. Dieses ist ja auch

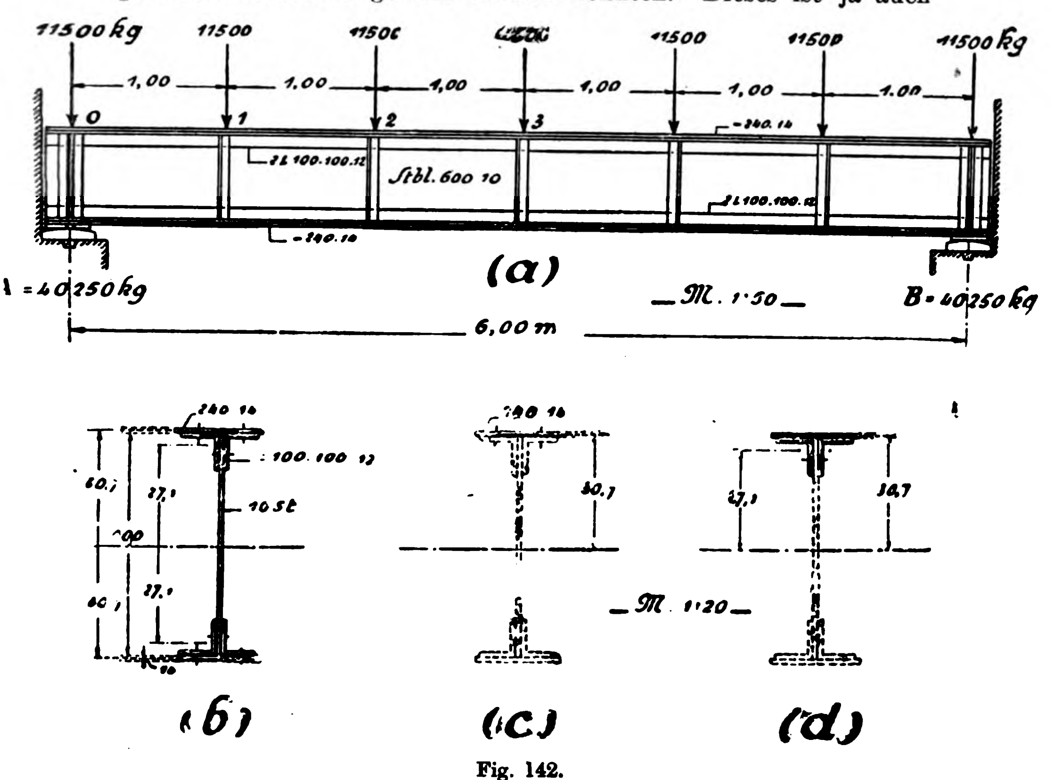


Fig. 142.

ganz natürlich, da die ersteren eine viel größere Querschnittsfläche anzuschließen haben. Bei solchen Unterschieden in den Nietteilungen empfiehlt es sich, die horizontalen Niete mit größerem Durchmesser — in vorliegendem Falle z. B. 23 ∅ — auszuführen. Setzt man, wie gewöhnlich, die oberen Niete mit derselben Teilung wie die unteren, so braucht man die ersteren im allgemeinen gar nicht zu untersuchen, da sie dann stets dicht genug stehen.

Übungsaufgabe: Ermittle in Fig. 142a die Nietteilungen in den Feldern *1—2* und *2—3*!

Digitized by Google

Zusatz: Das Verhältnis $J:S$ ist bei Blechträgern ungefähr gleich dem Abstande der beiden horizontalen Nietreihen, bzw. gleich der Stehblechhöhe. (In unserem Beispiele ist $J:S = 148850:2262 = 66 = \sim 54,2 = \sim 60,0$.) Wenn man schnell die Nietteilung überschlagen will, kann man also an Stelle von $J:S$ einfach den obigen Abstand, bzw. die Stehblechhöhe verwenden. (Vgl. § 81a, Absatz V.)

§ 79.

Bestimmung der Lamellenlängen und Trägerquerschnitte.

I. Die theoretischen Lamellenlängen.

Bekanntlich sind bei einem auf Biegung beanspruchten Träger die Momentensummen der einzelnen Stellen und also auch deren erforderliche Widerstandsmomente sehr voneinander verschieden. Bei einem genieteten Träger hat man es nun in der Hand, durch allmähliche Hinzufügung von Lamellen die Materialverteilung dem Anwachsen der erforderlichen Widerstandsmomente anzupassen. Auf diese Weise vermeidet man es, dort, wo nur geringe Biegungsmomente auftreten, unnötig Material anzuhäufen. Wie man hierbei vorgeht, möge an folgendem Beispiel erläutert werden:

Bei einem Träger (Fig. 143a) seien für die einzelnen Stellen die zugehörigen Momentensummen bestimmt und aus diesen durch Division mit der zulässigen Spannung die erforderlichen Widerstandsmomente. (Bei beweglicher Belastung muß natürlich für jeden einzelnen Querschnitt zunächst die gefährliche Laststellung aufgesucht und dann die betreffende Momentensumme ermittelt werden.) Diese Widerstandsmomente werden an den einzelnen Stellen des Balkens in einem beliebig zu wählenden Maßstabe aufgetragen. In Fig. 143a ist als Beispiel ein Träger von 16,00 m Spannweite genommen, der aus sieben mittleren Feldern von je 1,778 m Länge und aus den beiden Endfeldern von je 1,777 m Länge besteht. Es bedeutet also W_1 das erforderliche Widerstandsmoment am Querschnitte *1*; W_2 das erforderliche Widerstandsmoment bei *2*; usw. Durch Verbindung der Endpunkte der die Widerstandsmomente darstellenden Strecken entsteht dann die „*Kurve der erforderlichen Widerstandsmomente*". (Maßstab in Fig. 143a: 1000 cm³ des Widerstandsmomentes gleich 0,2 cm in der Zeichnung.) Auf diese Weise können wir also in Fig. 143a für jede Stelle des Balkens das erforderliche Widerstandsmoment abgreifen.

Nach Ermittlung der erforderlichen Widerstandsmomente nehmen wir die einzelnen Profile des Trägers an und bestimmen die

Digitized by Google

Widerstandsmomente, die diese besitzen. In Fig. 143 ist vorausgesetzt, daß wir bis zu vier Lamellen gehen wollen. Wir beginnen dann mit einem Träger, der nur aus Stehblech und Gurtwinkeln besteht und berechnen dessen Widerstandsmoment. Dann legen wir oben und unten je *eine* Lamelle auf und bestimmen das jetzt vorhandene Widerstandsmoment usw. Die Bezeichnungen seien:

W^0 = Widerstandsmoment des Trägers ohne Lamellen,
W^I = „ „ „ mit einer Lamelle,
W^{II} = „ „ „ „ zwei Lamellen usw.

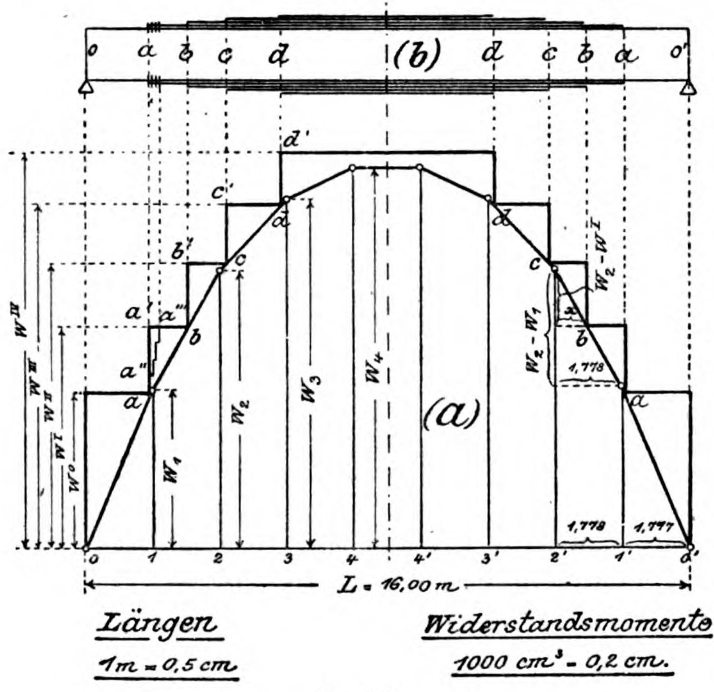


Fig. 143.

Dieses sind also die vorhandenen Widerstandsmomente, im Gegensatz zu den erforderlichen Widerstandsmomenten, die in Fig. 143a aufgetragen sind.

Nun besteht die Bedingung: *Die einzelnen Lamellen müssen so weit reichen, daß an jeder Stelle des Trägers das vorhandene Widerstandsmoment mindestens gleich dem erforderlichen ist.* Um also die Strecke zu finden, auf der der Träger *ohne* Lamellen genügt, tragen wir in Fig. 143a W^0, das Widerstandsmoment des Trägers *ohne* Lamellen, als Höhe auf und ziehen durch deren

Digitized by Google

Endpunkt die Parallele zur Balkenachse *0—0'*. Der Punkt a, in dem diese Parallele die Linie der erforderlichen Widerstandsmomente schneidet, bezeichnet dann augenscheinlich die Stelle des Trägers, an der das *erforderliche* Widerstandsmoment und das *vorhandene* Widerstandsmoment W^0 gerade gleich groß sind. Auf der Strecke *vor* dem Punkte a sind die erforderlichen Widerstandsmomente kleiner, und schließlich, bei a selber, gleich W^0. *Auf dieser Strecke genügt also das Trägerprofil ohne Lamellen* (Fig. 143b).

Um ferner zu entscheiden, innerhalb welcher Strecke das Profil mit *einer* Lamelle genügt, tragen wir W^I auf, legen durch den Endpunkt die Parallele zu $\overline{0-0'}$ und bestimmen durch diese die Punkte b auf der Linie der erforderlichen Widerstandsmomente. Diese bezeichnen dann die Stellen, an denen der Träger mit *einer* Lamelle gerade noch ausreicht (Fig. 143b).

In derselben Weise ermitteln wir die Punkte c und d, in denen die dritte und vierte Lamelle anfangen müssen. Insgesamt ergibt sich also für die Verteilung der einzelnen Lamellenlängen das in Fig. 143b dargestellte Bild.

Die staffelförmige Linie in Fig. 143a wird man die „*Linie der vorhandenen Widerstandsmomente*" nennen. Das Verfahren der Lamellenbestimmung beruht also darauf, daß die (staffelförmige) Linie der vorhandenen Widerstandsmomente die (gebrochene) Linie der erforderlichen Widerstandsmomente umhüllen muß. Es ist recht übersichtlich und führt schnell zum Ziel.

Der größeren Genauigkeit wegen kann man in Fig. 143a die Lage der Punkte a, b, c und d auch rechnerisch bestimmen. So ergibt sich z. B. für den Punkt b mit Hilfe von ähnlichen Dreiecken (Fig. 143a, rechte Seite):

$$x : 1{,}778 = (W_2 - W^I) : (W_2 - W_1)\,,$$

$$x = \frac{W_2 - W^I}{W_2 - W_1} \cdot 1{,}778\,.$$

Hiernach ergibt sich der Abstand des Lamellenanfangspunktes von der Stelle *2* des Trägers.

Spezialfälle.

1. Ist die Kurve der erforderlichen Widerstandsmomente eine *Parabel* (Träger mit gleichförmig verteilter Belastung), so läßt sich die erforderliche Länge der Lamellen auch leicht rechnerisch bestimmen. Bei einer Parabel besteht allgemein die mathematische Beziehung (s. § 55): Die Quadrate zweier rechtwinklig zur Sym-

Digitized by Google

metrieachse stehenden Sehnen verhalten sich wie deren Abstände von der Spitze der Parabel. Bezeichnet man also bei einem derartigen Träger das erforderliche Widerstandsmoment in der Mitte mit W, die Spannweite des Trägers mit l, das Widerstandsmoment des Querschnittes ohne Lamellen mit W^0 und die Länge der I. Lamelle mit l_I, so besteht die Gleichung

$$l^2 : l_I^2 = W : (W - W^0) .$$

(Die Parabelsehne l hat vom Scheitel den Abstand W; die Parabelsehne l_I hat den Abstand $W - W^0$. Man zeichne die Figur auf!) Hieraus folgt:

$$l_I^2 = \frac{l^2(W - W^0)}{W}$$

$$= l^2\left(1 - \frac{W^0}{W}\right),$$

$$l_I = l\sqrt{1 - \frac{W^0}{W}} .$$

In entsprechender Weise finden wir die Längen der II., III. usw. Lamelle, so daß sich insgesamt folgende Zusammenstellung ergibt:

$$\text{(I)} \qquad l_I = l\sqrt{1 - \frac{W^0}{W}}; \quad l_{II} = l\sqrt{1 - \frac{W^I}{W}}; \text{ usw.}$$

Bei parabelförmiger Momentenfläche lassen sich also die erforderlichen Lamellenlängen l_I, l_{II} usw. sehr leicht rechnerisch bestimmen.

2. Bei unseren späteren Berechnungen werden wir häufig auf den Fall stoßen, daß die Kurve der erforderlichen Widerstandsmomente in der Mitte eine gerade Linie ist, von deren Enden je ein Parabelbogen nach den Auflagern geht. Die Länge dieser geraden Linie sei l'. Man kann also die Kurve auch als eine Parabel bezeichnen, deren beiden Hälften aber im Scheitel um eine Strecke l' auseinandergezogen sind. Aus dieser Auffassung folgen dann für die erforderlichen Längen der einzelnen Lamellen sehr leicht folgende Formeln:

(II) Länge der I. Lamelle: $l^I = l' + (l - l')\sqrt{1 - \frac{W^0}{W}}$; usw.

II. Die praktischen Längen.

Die im vorigen Abschnitte ermittelten Längen sind die sogenannten „*theoretischen Längen*". Da nämlich z. B. die I. Lamelle an ihrem Anfangspunkte a doch nicht angeschweißt ist, sondern durch Niete angeschlossen wird, so müssen wir noch ein Stück

Digitized by Google

zugeben, um die Niete unterzubringen. Hierdurch entsteht dann die „*praktische Länge*“ der Lamelle.

Mit wieviel Nieten muß nun z. B. die I. Lamelle bereits vor ihrem theoretischen Anfangspunkte angeschlossen werden? Früher rechnete man so: Die Lamelle hat — nach Abzug der Schwächung durch Nietlöcher — eine Querschnittsfläche F; die auftretende Spannung sei k. Dann kann also die Lamelle eine Kraft $F \cdot k$ aufnehmen, und diese Kraft $F \cdot k$ muß bereits vor dem Anfangspunkte a durch Niete angeschlossen werden, damit die Lamelle von a ab als tragend gerechnet werden kann.

Augenscheinlich ist diese Rechnung aber zu ungünstig. Kurz vor der Stelle a genügt noch der Träger *ohne* Lamelle. An der Stelle a selber würde also eine ganz dünne Lamelle ausreichen, die dann allmählich von a aus an Stärke zunehmen müßte. Daraus folgt, daß es genügt, vor der Stelle a *eine* Querreihe von zwei Nieten zu setzen, da wir ja — theoretisch — nur eine ganz dünne Lamelle anzuschließen haben.

In Fig. 143a ist noch gezeigt, wie der allmähliche Anschluß der Lamelle zustande kommt. Es ist angenommen, daß im ganzen vier Querreihen, d. h. acht Niete, nötig sind, um die gesamte Kraft der Lamelle zu übertragen. Jede der vier Querreihen schließt dann also ein Viertel der Lamelle an. Der Übergang des Widerstandsmomentes W^0 (Träger ohne Lamellen) zu W^I (Träger mit einer Lamelle) vollzieht sich also, entsprechend dem vierreihigen Nietanschluß, in einer vierstufigen Linie $a\,a''a'''$ (Fig. 143a), die beim ersten Anschlußniet beginnt und beim letzten endet (Fig. 143b). Man sieht auch aus dieser Darstellung, daß es genügt, mit den Nieten direkt vor den theoretischen Anfangspunkten zu beginnen.

§ 80.

Berechnung der Stoßverbindungen.

I. Stoß eines einfachen Bleches.

Grundaufgabe: Ein Blech von der Höhe h und der Stärke δ ist durch eine rechtwinklig zur Längsachse gehende Fuge α—α geteilt. Die beiden hierdurch entstehenden Teile I und II sind biegungsfest miteinander zu verbinden (Fig. 144)!

I. Berechnung der Laschen.

Da die Laschen den Balken an der Stoßstelle vollständig zu ersetzen haben, müssen sie zusammen dasselbe Widerstandsmoment besitzen wie jener. Es muß also sein (Fig. 144 b):

Digitized by Google

$$2\frac{\delta'\cdot h'^2}{6} = \frac{\delta h^2}{6},$$

$$2\,\delta' h'^2 = \delta h^2.$$

Nimmt man nun eine Abmessung der Laschen, δ' oder h', an, so ist die andere durch die obige Formel bestimmt.

II. Berechnung der Niete.

a) Die Niete sitzen beliebig in der Höhenrichtung verteilt.

Um die Nietverbindung zu berechnen, betrachten wir das Gleichgewicht eines der beiden Teile *I* oder *II* (Fig. 144 c). An

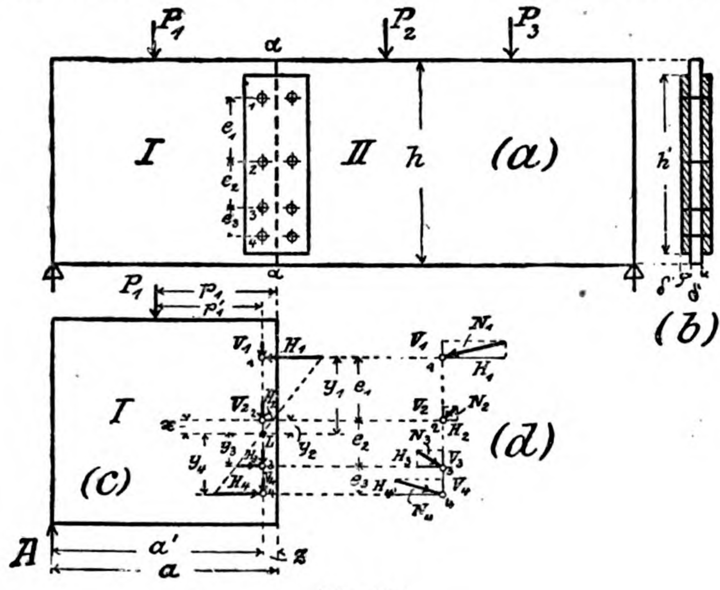


Fig. 144.

diesem greifen an: der Auflagerdruck A, die Last P_1 und die Kräfte, die die Niete auf das Blech ausüben. Letztere Kräfte sind unbekannt nach Größe und Richtung. Wir wollen uns jede in eine horizontale (H) und in eine vertikale Seitenkraft (V) zerlegt denken, die zunächst in Fig. 144 c willkürlich eingezeichnet wurden. Da nun die Nietverbindung so beschaffen sein soll, daß der Körper *I* unter der Einwirkung sämtlicher Kräfte im Gleichgewicht bleibt, so müssen die drei Gleichgewichtsbedingungen erfüllt sein: $R_x = 0$, $R_y = 0$, $\Sigma M = 0$.

Da wir aber aus diesen drei Gleichungen nicht sämtliche acht Unbekannte H und V ausrechnen können, müssen wir noch

Digitized by Google

einige Annahmen zur Hilfe nehmen. Diese sind: α) Die Horizontalkomponenten H wachsen im linearen Verhältnis; d. h. trägt man die Kräfte H graphisch auf, so liegen die Endpunkte dieser Strecken auf einer geraden Linie. In analytischer Form lautet diese Annahme: Die Kräfte H verhalten sich wie ihre Abstände y von einem, zunächst noch unbestimmten, Punkte L. β) Die Vertikalkomponenten V seien einander gleich.

Die Annahme α), über das Verhältnis der Kräfte H zueinander, wird wahrscheinlich richtig sein; denn die Kräfte H spielen am Stoße dieselbe Rolle, wie die Normalspannungen σ an einer durchlaufenden Stelle, und von den Spannungen σ ließ sich eine ähnliche Annahme herleiten. Die Annahme β) wird dagegen wahrscheinlich falsch sein. Denn die Kräfte V ersetzen die Schubspannungen (§ 41), die sonst an dieser Stelle wirksam wären, und da diese Spannungen sich nicht gleichmäßig über den Querschnitt verteilen, werden sich die Kräfte V auch nicht gleichmäßig auf die Niete verteilen. Sie ist aber die einfachste Voraussetzung und, in Ermangelung einer besseren, allgemein gebräuchlich.

In Formeln gekleidet lauten die beiden Annahmen:

$$\alpha)\quad H_1 : H_2 : H_3 : H_4 = y_1 : y_2 : y_3 : y_4\,,$$

$$\beta)\quad V_1 = V_2 = V_3 = V_4\,.$$

Nun stellen wir die Gleichgewichtsbedingungen auf, und zwar wollen wir als Bezugspunkt für die Momente den Punkt L (dessen Lage wir also zunächst als bekannt einführen) nehmen:

$$\text{(I)}\quad R_x = -H_1 - H_2 + H_3 + H_4 = 0\,,$$

$$\text{(II)}\quad R_y = +A - P_1 - V_1 - V_2 - V_3 - V_4 = 0\,,$$

$$\text{(III)}\quad \Sigma M = +A\cdot a' - P_1\cdot p_1' - H_1\cdot y_1 - H_2\cdot y_2 - H_3\cdot y_3 - H_4\cdot y_4 = 0\,.$$

(In der letzten Gleichung haben $V_1 \ldots V_4$ das Lot Null; um dieses zu erreichen, wurde L als Bezugspunkt gewählt.)

Die erste Gleichung sagt aus, daß ein Teil der Horizontalkomponenten nach links und der andere nach rechts gehen muß, damit die Summe sämtlicher horizontalen Kräfte gleich Null wird. Deshalb wurden in Fig. 144c die Kräfte H von vornherein in dieser Weise angenommen.

Um nun zwei zusammengehörige Seitenkräfte, z. B. V_1 und H_1, zu berechnen, drücken wir mit Hilfe der Voraussetzungen α) und β) sämtliche Unbekannten V und H durch V_1 und H_1 aus:

Digitized by Google

$$\alpha)\quad H_1 : H_2 = y_1 : y_2\,; \quad \text{hieraus} \quad H_2 = \frac{y_2}{y_1} H_1\,;$$

$$H_1 : H_3 = y_1 : y_3\,; \quad \text{,,} \quad H_3 = \frac{y_3}{y_1} H_1\,;$$

$$H_1 : H_4 = y_1 : y_4\,; \quad \text{,,} \quad H_4 = \frac{y_4}{y_1} H_1\,;$$

$$\beta)\quad V_2 = V_1\,; \quad V_3 = V_1\,; \quad V_4 = V_1\,.$$

Hiermit gehen die Gleichgewichtsbedingungen über in:

$$\text{(Ia)} \quad -H_1 - \frac{y_2}{y_1} H_1 + \frac{y_3}{y_1} H_1 + \frac{y_4}{y_1} H_1 = 0\,,$$

$$\text{(IIa)} \quad +A - P_1 - V_1 - V_1 - V_1 - V_1 = 0\,,$$

$$\text{(IIIa)} \quad +A \cdot a' - P_1 p_1' - H_1 \cdot y_1 - \frac{y_2}{y_1} H_1 \cdot y_2 - \frac{y_3}{y_1} H_1 \cdot y_3 - \frac{y_4}{y_1} H_1 \cdot y_4 = 0$$

Nun schreiben wir für $A - P_1$, Summe aller seitlich vom Stoße befindlichen Kräfte, die Abkürzung Q (Querkraft); $A \cdot a' - P_1 \cdot p_1'$ ist das Moment in bezug auf Punkt L und werde mit M' bezeichnet. Dann ergibt sich nach einer einfachen Umformung:

$$\text{(Ib)} \quad -\frac{H_1}{y_1} \cdot (+y_1 + y_2 - y_3 - y_4) = 0\,,$$

$$\text{(IIb)} \quad Q - 4V_1 = 0\,,$$

$$\text{(IIIb)} \quad M' - \frac{H_1}{y_1} \cdot (y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2) = 0\,.$$

Für zwei andere zusammengehörige Kräfte, z. B. V_2 und H_2, würden die entsprechenden Gleichungen lauten:

$$-\frac{H_2}{y_2} \cdot (+y_1 + y_2 - y_3 - y_4) = 0\,,$$

$$Q - 4V_2 = 0\,,$$

$$M' - \frac{H_2}{y_2} \cdot (y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2) = 0\,.$$

Da nun H_1, H_2 usw. nicht sämtlich gleich Null sein können, so muß in der ersten Gleichung der in der Klammer stehende Ausdruck gleich Null sein, damit das Produkt gleich Null wird. In der dritten Gleichung wollen wir noch statt des Momentes $M' = +A \cdot a' - P_1 \cdot p_1'$ das Moment $M = +A \cdot a - P_1 \cdot p_1$, in bezug auf einen im Stoße gelegenen Punkt, einführen. Der Unterschied gegen M' ist sehr gering (nämlich gleich $Q \cdot z$, vgl. § 57, I),

Digitized by Google

und es rechnet sich mit der Entfernung a bequemer als mit a'. Somit erhalten wir die Gleichungen:

(Ic) $+y_1 + y_2 - y_3 - y_4 = 0$; oder $y_1 + y_2 = y_3 + y_4$;

(IIc) $V_1 = +\frac{1}{4} Q$;

(IIIc) $H_1 = \frac{M}{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2} \cdot y_1$.

Aus der ersten von diesen drei Gleichungen können wir die Lage des Punktes L, aus der zweiten die Größe der Vertikalkomponente V_1 und aus der dritten die Größe der Horizontalkomponente H_1 bestimmen. Die Lage des Punktes L bestimmen wir durch seine Entfernung von einem Niet, z. B. von Niet *2*. Wir setzen dann

$$y_1 = e_1 + x, \quad y_2 = x, \quad y_3 = e_2 - x, \quad y_4 = e_3 + e_2 - x$$

und erhalten aus Gleichung (Ic):

$$e_1 + x + x = e_2 - x + e_3 + e_2 - x,$$
$$4x = -e_1 + 2e_2 + e_3,$$
$$x = \frac{-e_1 + 2e_2 + e_3}{4}.$$

In entsprechender Weise wird die Lage von L bestimmt, wenn mehr als vier Niete vorhanden sind. Nun können wir der Zeichnung die Abstände y_1, y_2, y_3 und y_4 entnehmen und berechnen V_1 und H_1. Die Richtungen der Kräfte V und H ergeben sich am einfachsten aus der Überlegung, daß bei einer positiven (nach oben gerichteten) Querkraft die Kräfte V nach unten zeigen müssen, und daß bei einem rechts drehenden Moment M das Moment der Kräfte H nach links drehen muß.

Sobald V_1 und H_1 gefunden sind, ergibt sich nach Fig. 144d die Kraft N_1, die der Niet *1* auf das Blech ausübt, aus der Gleichung

$$N_1 = \sqrt{V_1^2 + H_1^2}.$$

Aus N_1 berechnen wir dann die auftretende Scherspannung und Flächenpressung. Am größten ist H und somit die gesamte Kraft N für den Niet, der am weitesten vom Punkte L entfernt ist.

Bemerkung: Formel IIIc ist genau so gebaut wie die Biegungsformel $\sigma = (M:J)y$, wie ja auch die Ableitungen übereinstimmen. Man nennt deshalb die Summe $(y_1^2 + y_2^2 + ..)$ direkt das Trägheitsmoment J_N der Nietgruppe und $J_N : y_1$ das Widerstandsmoment W_N. (Punkt L entspricht der Nullinie.) Hiermit lautet Formel IIIc: $H_1 = M : W_N$.

Digitized by Google

b) Die Niete sitzen gleichmäßig verteilt.

Für den besonders wichtigen Fall, daß die Niete symmetrisch in der Höhenrichtung angeordnet sind, muß der Punkt L augenscheinlich in der Mitte liegen. Dieses ergibt auch die Rechnung; denn wenn $e_1 = e_3$ ist, wird $x = \frac{1}{2} e_2$. Bei symmetrischer Nietanordnung braucht man also die Gleichung (I c) nicht, sondern kann die Abstände y_1, y_2 usw. direkt der Zeichnung entnehmen.

Bei der Ermittlung der Kräfte H kommt es nun vor allen Dingen darauf an, die Summe $y_1^2 + y_2^2 + \ldots$ schnell auszurechnen. Sind die Nietentfernungen einander gleich, so lassen sich hierfür einfache Formeln ableiten. Für Fig. 145a ergibt sich folgende Rechnung: Die Entfernung der beiden äußersten Niete sei h; die Anzahl der Niete sei $n\,(= 9)$. Dann ist die Anzahl der Nietteilungen gleich $n - 1\,(= 8)$, so daß sich für eine Nietteilung der Wert ergibt $e = \frac{h}{n-1}\left(= \frac{h}{8}\right)$. Ich will jetzt die Niete mit 0, $1 \ldots r$, $1' \ldots r'$ numerieren. (Für die Ausrechnung der Summe $y_1^2 + y_2^2$ usw. ist es natürlich gleichgültig, in welcher Reihenfolge wir die Glieder nehmen.) Dann ist

$$y_1 = 1 \cdot e = \frac{h}{n-1},$$
$$y_2 = 2 \cdot e = 2\frac{h}{n-1},$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$y_r = r \cdot e = r\frac{h}{n-1}.$$

(Die Abstände e sind natürlich nicht zu verwechseln mit der Nietteilung e von § 78.)

Wir wollen die Summe $y_1^2 + y_2^2 + \ldots$ zunächst von der einen Hälfte der Niete, $o - r$, nehmen und erhalten dann

$$y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_r^2 = \left(\frac{h}{n-1}\right)^2 + \left(2\frac{h}{n-1}\right)^2 + \ldots + \left(r\frac{h}{n-1}\right)^2$$
$$= \frac{h^2}{(n-1)^2}(1^2 + 2^2 + \ldots + r^2)$$
$$= \frac{h^2}{(n-1)^2} \cdot \frac{r(r+1)(2r+1)}{6};$$

denn die Summe aus den Quadraten der ersten r Zahlen läßt sich bekanntlich darstellen durch das Produkt $\frac{1}{6} r(r+1)(2r+1)$; vgl.

Digitized by Google

§ 10, fünfte Aufgabe. Nun ist die Zahl r, d. i. die Bezeichnung des äußersten Nietes, gleich der Anzahl der Teilungen auf der oberen Hälfte, also gleich $\frac{1}{2}(n-1)$. Es ist also $r+1=\frac{1}{2}(n-1)+1=\frac{1}{2}(n+1)$ und $2r+1=2\cdot\frac{1}{2}(n-1)+1=n$. Diese Werte in die obige Gleichung eingesetzt, ergibt

$$y_1^2+y_2^2+\ldots+y_r^2=\frac{h^2}{(n-1)^2}\cdot\frac{\frac{1}{2}(n-1)\cdot\frac{1}{2}(n+1)\cdot n}{6}$$
$$=\frac{h^2}{(n-1)^2}\cdot\frac{(n-1)(n+1)n}{24}$$
$$=\frac{h^2\cdot(n+1)n}{(n-1)\cdot 24}.$$

Somit haben wir von der einen Hälfte die Summe aus den Quadraten der Abstände y ausgerechnet. Für *sämtliche* Niete ergibt sich das Doppelte:

$$y_1^2+\ldots+y_r^2+y_1'^2+\ldots+y_r'^2=2\frac{h^2\cdot(n+1)n}{(n-1)\cdot 24}$$
$$=\frac{h^2\cdot(n+1)n}{12(n-1)}.$$

Wenn wir jetzt für den äußersten Niet, r, die Horizontalkraft bestimmen wollen, so haben wir nach Formel (IIIc):

$$H_r=\frac{M}{\frac{h^2\cdot(n+1)n}{12\cdot(n-1)}}\cdot y_r.$$

Nun ist $y_r=\frac{h}{2}$; folglich

$$H_r=M\cdot\frac{\frac{h}{2}}{\frac{h^2\cdot(n+1)n}{12(n-1)}}$$
$$=M\cdot\frac{6(n-1)}{h\cdot n(n+1)}$$

$$\text{(IV)}\qquad H_r=\frac{M}{h}\cdot\frac{6(n-1)}{n(n+1)}=\frac{M}{h}\cdot f.$$

Den Wert $\frac{6(n-1)}{n(n+1)}$ wollen wir mit f bezeichnen. Wenn man also das Moment M an der Stoßstelle bestimmt, ferner die Entfernung h der beiden äußersten Niete voneinander und die An-

Digitized by Google

zahl n der Niete angenommen hat, kann man mit Hilfe der obigen Formel die im äußersten Niet vorkommende größte Horizontalkraft H sehr schnell berechnen.

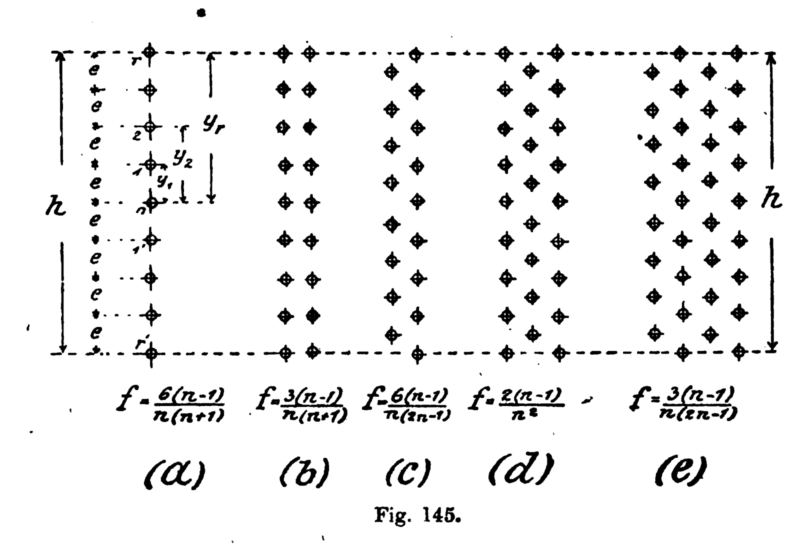


Fig. 145.

Ebenso wie für Fig. 145a kann man nun für andere Nietanordnungen die Horizontalkomponente H durch eine entsprechende Formel

$$H = \frac{M}{h} \cdot f$$

bestimmen, wobei f natürlich je nach der Nietanordnung einen verschiedenen Wert hat. Die gebräuchlichsten Fälle sind in Fig. 145b—e gezeichnet und jedesmal der Koeffizient f hinzugeschrieben. In diesen Formeln bedeutet n stets die Anzahl Niete in der dem Stoße zunächst befindlichen Reihe. Bei *einer* Nietreihe hatten wir $f = \frac{6(n-1)}{n(n+1)}$ gefunden. (Diese Formel gilt auch dann, wenn n eine gerade Zahl ist, d. h. wenn in der Mitte kein Niet sitzt.) Bei *zwei* Nietreihen auf jeder Seite des Stoßes ist f halb so groß, da in Gleichung (IIIc) die im *Nenner* stehende Summe $y_1^2 + y_2^2 + \ldots$ doppelt so groß wird; usw. Auf diese Weise kann man alle möglichen Anordnungen zusammenstellen.

In der folgenden Tabelle ist der Faktor f bereits ausgerechnet (nach F. Dircksen). Man braucht also nur das Moment M durch den Abstand h zu dividieren, den Faktor f aus der Tabelle hinzuzunehmen und hat dann sofort die Horizontalkraft des äußersten Nietes.

Digitized by Google

Tabelle für den Faktor „f".

n (Nietanzahl in der ersten Reihe neben der Stoßfuge)	Nietanordnung seitlich (links) der Stoßfuge I	II	III	IV	V
	$f_I = \frac{6(n-1)}{n(n+1)}$ Eine Nietreihe	$f_{II} = \frac{3(n-1)}{n(n+1)}$ Zwei Nietreihen, Niete paarweis	$f_{III} = \frac{6(n-1)}{n(2n-1)}$ Zwei Nietreihen, Niete versetzt	$f_{IV} = \frac{2(n-1)}{n^2}$ Drei Nietreihen	$f_V = \frac{3(n-1)}{n(2n-1)}$ Vier Nietreihen
2	1,000	0,500	1,000	0,500	0,500
3	1,000	0,500	0,800	0,444	0,400
4	0,900	0,450	0,643	0,375	0,322
5	0,800	0,400	0,533	0,320	0,267
6	0,714	0,357	0,455	0,278	0,227
7	0,643	0,321	0,396	0,245	0,198
8	0,583	0,292	0,350	0,219	0,175
9	0,533	0,267	0,314	0,198	0,157
10	0,491	0,245	0,284	0,180	0,142
11	0,455	0,227	0,260	0,165	0,130
12	0,423	0,211	0,239	0,153	0,120
13	0,396	0,198	0,222	0,142	0,111
14	0,371	0,186	0,206	0,133	0,103
15	0,350	0,175	0,193	0,124	0,097
16	0,331	0,165	0,181	0,117	0,091
17	0,314	0,157	0,171	0,111	0,086
18	0,298	0,149	0,162	0,105	0,081
19	0,284	0,142	0,153	0,100	0,077
20	0,271	0,136	0,146	0,095	0,073
21	0,260	0,130	0,139	0,091	0,070
22	0,249	0,124	0,133	0,087	0,067
23	0,239	0,120	0,128	0,083	0,064
24	0,230	0,115	0,122	0,080	0,061
25	0,222	0,111	0,118	0,077	0,059

II. Stoß des Stehbleches eines Blechträgers.

Das Stehblech eines Blechträgers, das an einer Stelle durch einen Stoß unterbrochen ist, befindet sich in genau derselben Lage wie das Blech Fig. 144a: Es stellt einen Körper von einer bestimmten Höhe und Stärke dar, dessen linker und rechter Teil durch Stoßlaschen und -niete biegungsfest verbunden werden sollen. Der Unterschied ist nur der, daß jetzt die Kraft- und die Mo-

Digitized by Google

mentensumme, die dieses Blech zu übertragen hat, nicht gegeben sind, sondern aus der gesamten Querkraft und dem gesamten Moment des Blechträgers an der betreffenden Stelle erst ermittelt werden müssen. Hinsichtlich dieser Anteile ersieht man folgendes:

Es wäre natürlich falsch, in die Formeln zur Berechnung der Stoßverbindung des Stehbleches die *ganze* Querkraft Q und das *ganze* Moment M einzuführen, die an der betreffenden Stelle auf den Blechträger einwirken. Denn ein Teil von Querkraft und Moment wird von den anderen Konstruktionsteilen (Winkeln und Lamellen) aufgenommen und kommt also für die Stoßverbindung des Stehbleches nicht in Betracht. Für die Stoßniete sind vielmehr nur die Anteile von Q und M in Rechnung zu stellen, die sonst von dem Stehblech aufgenommen werden würden, und die jetzt also, da das Stehblech durchbrochen ist, durch Niete und Laschen übertragen werden müssen. Um sie von den Gesamtwerten Q und M zu unterscheiden, wollen wir sie mit Q_s und M_s bezeichnen.

a) Hinsichtlich der **Querkraft** Q wissen wir aus unseren früheren Untersuchungen (§ 41), daß sie zum größten Teil von den mittleren Fasern des Balkens, also vom Stehblech, aufgenommen wird. Deshalb ist es vielfach gebräuchlich, für Q seinen vollen Wert einzusetzen. Dieses ist aber sehr ungünstig gerechnet, weil nämlich die größte Querkraft Q und das größte Moment M nicht bei derselben Laststellung entstehen werden. Da jedoch die vertikale Seitenkraft V gegenüber der horizontalen Kraft H gewöhnlich ziemlich gering ist, so kann man diese etwas sehr ungünstige Annahme schließlich auch machen.

b) Das **Moment** M_s bestimmt sich aus folgender Überlegung: Beträgt an der Stoßstelle das Gesamtmoment M und das gesamte Trägheitsmoment des Blechträgers J, so ist in einer beliebigen Stelle des Stehbleches (z. B. in seiner äußersten Faser) die Spannung bekanntlich:

$$\sigma = \frac{M}{J} \cdot y ,$$

worin y die Entfernung dieser Stelle von der Nullinie bedeutet.

Andererseits ergibt sich diese Spannung σ, wenn wir das Stehblech für sich betrachten, gleich:

$$\sigma = \frac{M_s}{J_s} \cdot y ,$$

worin M_s das Moment ist, das von dem Stehblech allein aufgenommen werden muß, während J_s das Trägheitsmoment des

Stehbleches ist. Aus der Gleichsetzung der beiden Ausdrücke für σ bekommen wir dann:

$$\frac{M_s}{J_s} \cdot y = \frac{M}{J} \cdot y\,,$$

$$\frac{M_s}{J_s} = \frac{M}{J}\,,$$

$$M_s = M \cdot \frac{J_s}{J}\,.$$

In Worten: *Der auf das Stehblech entfallende Teil* M_s *des Gesamtmomentes* M *ergibt sich aus diesem, indem man* M *mit dem Verhältnis des Trägheitsmomentes* J_s *des Stehbleches zu dem Trägheitsmomente* J *des Gesamtquerschnittes multipliziert.*

Wenn der Stehblechstoß an einer Stelle des Trägers liegt, an der das Material nicht vollständig ausgenutzt ist, kann man zur Ermittlung von M_s auch folgenden Weg einschlagen: Man bestimmt zunächst das Moment M', das von den Gurtungen aufgenommen werden könnte, wenn die zulässige Biegungsspannung k erreicht werden würde. Also:

$$M' = W' \cdot k\,,$$

worin W' das Widerstandsmoment des nur aus Winkeln und Lamellen bestehenden Querschnittes ist. Der Unterschied zwischen M und M' bleibt dann augenscheinlich für das Stehblech übrig. Es ist somit nach dieser Rechnung:

$$M_s = M - M',$$

und dieser Rest M_s muß von den Nieten übertragen werden. Liegt der Stoß beispielsweise unmittelbar hinter dem Anfang einer Lamelle (also dort, wo der Querschnitt mehr Material hat, als für das betreffende Moment M erforderlich ist), so kann es vorkommen, daß Lamellen und Winkel bereits zur Aufnahme des Gesamtmomentes M ausreichen. In diesem Falle bleibt für die Stoßniete des Stehbleches überhaupt kein Moment M_s übrig, so daß sie nur die Querkraft Q aufzunehmen hätten. Man muß aber bedenken, daß bei einer solchen Bemessung der Stoßverbindung in die Beanspruchung der Gurte eine Unstetigkeit hineinkommt. Im Interesse einer sicheren Konstruktion liegt es jedenfalls, die größte Beanspruchung an der Stoßstelle nicht höher zu halten als in den benachbarten Punkten, um hierdurch eine gewisse Regelmäßigkeit in den Spannungen zu erzielen. Die Klärung dieser Fragen durch experimentelle Forschung muß als eine der dringendsten Aufgaben

Digitized by Google

der Statik bezeichnet werden. Bei den folgenden Berechnungen werden wir übrigens immer mit der Formel

$$M_s = M \cdot \frac{J_s}{J}$$

arbeiten. Dieser Wert M_s ist also in Formel (IV) bzw. (IIIc) als Moment einzusetzen.

III. Stoß der Gurte eines Blechträgers.

Die Gurte (Winkeleisen und Lamellen) werden beim Stoße wie einfache Zug- bzw. Druckstäbe behandelt. Man sieht also davon ab, daß in den einzelnen Fasern die Spannungen voneinander verschieden sind.

Die Lamellen werden demnach wie Flacheisen miteinander verbunden. Die Laschen müssen denselben Querschnitt haben wie die gestoßenen Teile. Die Niete müssen die in der betreffenden Lamelle enthaltene Kraft aufnehmen.

Die Winkeleisen werden entweder durch Stoßwinkel oder durch rechtwinklig zueinander stehende Flacheisen gelascht. Hinsichtlich der Laschen und Stoßniete gilt das für die Lamellen Gesagte.

Die genaue Anordnung und Berechnung eines solchen Stoßes wird an dem Beispiele § 81a durchgeführt werden.

IV. Zusammenfassung und Ergänzung.

Zusammenfassung: Bei der Stoßverbindung eines auf Biegung beanspruchten Balkens tritt im allgemeinen an jedem Niete eine schräg gerichtete Kraft N auf, deren Vertikalkomponente V und deren Horizontalkomponente H wir getrennt bestimmen. Die Vertikalkomponente wird gleich der Kraftsumme Q der Stoßstelle, dividiert durch die Anzahl der Niete auf einer Seite des Stoßes, angenommen ($V = Q : x$). Die Horizontalkomponente H muß im allgemeinen aus der Momentensumme M der Stoßstelle mittels der Formeln (IIIc) und (Ic) bestimmt werden. Für den Spezialfall — Niete in gleichen Abständen e voneinander — ergibt sich aber für die Horizontalkomponente des äußersten, am meisten beanspruchten Nietes die einfachere Formel:

$$H = \frac{M}{h} \cdot f,$$

worin f ein von der Nietanzahl und -anordnung abhängiger Faktor ist, der aus Fig. 145 entnommen werden kann. Aus dieser Formel folgt umgekehrt, daß bei gegebener zulässiger Horizontalkraft H

Digitized by Google

eine bestimmte Nietgruppe ein Moment aufnehmen kann:

$$M = \frac{H \cdot h}{f}.$$

In die Formel $H = (M : h) \cdot f$ ist für M natürlich diejenige Momentensumme einzusetzen, die das gestoßene Blech an der Stoßstelle aufzunehmen hat. Ist das Blech für sich allein (Fig. 144), so muß also das gesamte Moment des Balkens eingesetzt werden. Ist das Blech aber nur ein Bestandteil eines größeren Querschnittes, z. B. Stehblech bei einem Blechträger, so ist vom Gesamtmoment $[M]$ nur der Teil M_s einzusetzen, der auf das Blech entfällt; nämlich

$$M_s = [M] \cdot \frac{J_s}{J}.$$

Nachdem dann V und H auf diese Weise bestimmt sind, ergibt sich die gesamte vom Niete aufzunehmende Kraft als Resultierende von V und H:

$$N = \sqrt{V^2 + H^2}.$$

Ergänzung: Häufig ergibt sich die Vertikalkomponente V so gering, daß man sie vernachlässigen kann. Dann ist also die gesamte Nietkraft N gleich der Horizontalkomponente H. Drücken wir nun die Nietkraft H durch die auftretende Scherspannung t und Flächenspannung p aus, $H = 2\frac{d^2\pi}{4}t$ und $H = d\delta p$, so finden wir bei einer doppelseitigen Laschung die Gleichungen:

$$\text{(V)} \qquad 2\frac{d^2\pi}{4} \cdot t = \frac{M}{h} \cdot f; \quad \text{hieraus} \quad t = \frac{M}{h} f \cdot \frac{1}{2\frac{d^2\pi}{4}}; \quad (d = \text{Nietdurchm.})$$

$$\text{(VI)} \qquad d\delta p = \frac{M}{h} \cdot f; \qquad \text{„} \qquad p = \frac{M}{h} f \cdot \frac{1}{d\delta}. \quad (\delta = \text{Stehblechstärke})$$

Die Scherspannung t wird nur in den seltensten Fällen in Betracht kommen, da δ fast stets kleiner als $0{,}8d$ sein wird.

§ 80a.

Beispiele zu § 80.

Erste Aufgabe.

Der Blechträger Fig. 142a habe in der Mitte einen Stehblechstoß. Die Stoßniete sind zu berechnen!

Auf jeder Seite des Stoßes mögen sich zwei Nietreihen befinden, in der Anordnung Fig. 145b. Der Abstand der äußersten Niete voneinander sei $h = 49{,}0$ cm; die Anzahl der Niete in der dem Stoße zunächst liegenden Reihe sei $n = 8$. (Hiernach zeichne man den Stoß auf.)

Digitized by Google

Die Berechnung werden wir nun in folgender Reihenfolge vornehmen:

Gesamtes Moment an der Stoßstelle (s. Fig. 142a) $M = 5175 \text{ cm } t$;
gesamtes Trägheitsmoment an der Stoßstelle $J = 148\,850 \text{ cm}^4$,
Trägheitsmoment des Stehbleches für sich: $J_s = 18000$ „ .
Folglich vom Stehblech aufzunehmendes Moment:

$$M_s = 5175 \cdot \frac{18000}{148\,850} = 626 \text{ cm } t.$$

Der Abstand h ist aus der Konstruktion gegeben: $h = 49{,}0$ cm. Den Faktor f finden wir aus der Tabelle S. 452 (Anordnung II, $n = 8$): $f = 0{,}292$. Der Einfluß der Querkraft möge vernachlässigt werden. Dann ergibt sich die größte Nietkraft:

$$N = H = \frac{626 \text{ cm } t}{49 \text{ cm}} \cdot 0{,}292 = 3{,}74\,t,$$

und der größte Leibungsdruck (bei $d = 2{,}0$ cm und $\delta = 1{,}0$ cm):

$$p = \frac{3{,}74}{2{,}0 \cdot 1{,}0} = 1{,}87\ t/\text{qcm} = 1870 \text{ kg/qcm}.$$

Zweite Aufgabe.

Wie gestaltet sich die Stoßberechnung, falls die Niete* ungleichen Durchmesser *haben?

Bei den bisherigen Stoßberechnungen haben wir nur den Fall berücksichtigt, daß sämtliche Stoßniete den gleichen Durchmesser haben. In der Praxis kommt aber auch der Fall vor, daß man den äußersten Nieten (die am meisten zu tragen haben) größeren Durchmesser gibt als den dazwischen liegenden Nieten.

Als Beispiel diene der in Fig. 146h gezeichnete Stehblechstoß (entnommen der Berechnung § 81a). Das vom Stehbleche zu übertragende Moment sei

$$M_s = 2030 \text{ cm } t.$$

Die Anordnung und Abstände der Niete sind aus Fig. 146h ersichtlich. Und zwar haben der oberste und der unterste Niet 23 mm ∅; die anderen Niete haben 20 mm ∅. Wegen dieser Verschiedenheit der Durchmesser wollen wir die äußersten und die mittleren Niete getrennt voneinander behandeln.

Bezeichnen wir die von *einem* äußersten Niet ausgeübte Kraft mit H_1, so bilden je ein oberster und ein unterster Niet ein Kräftepaar $H_1 \cdot 97{,}0$ (Fig. 146h). Da *zwei* Nietreihen auf jeder Stoßseite vorhanden sind, üben also die vier 23er Niete insgesamt ein Moment aus:

$$M_1 = 2 \cdot H_1 \cdot 97{,}0.$$

Bei den mittleren (20er) Nieten werde die größte Horizontalkraft mit H_2 bezeichnet. Diese Niete sitzen in gleichen Ab-

Digitized by Google

ständen voneinander. Das durch die Niete übertragene Moment läßt sich also durch die Formel darstellen

$$M_2 = \frac{H_2 \cdot h}{f},$$

worin h die Höhe dieser Nietreihe und f ein Faktor ist, der von der Zahl und der Anordnung der Niete abhängt (§ 80, IV). Für den vorliegenden Fall ist (Fig. 146h)

$$h = 76{,}5 \text{ cm}.$$

Der Faktor f ist bei zwei nebeneinander sitzenden Nietreihen nach der in § 80, I gegebenen Zusammenstellung (für $n = 10$ Niete in einer Reihe):

$$f = \frac{3(n-1)}{n(n+1)} = 0{,}245.$$

Somit ergibt sich das von sämtlichen 20er Nieten übertragene Moment:

$$M_2 = \frac{H_2 \cdot 76{,}5}{0{,}245}.$$

Die Summe der beiden durch die Niete übertragenen Momente M_1 und M_2 muß gleich dem aufzunehmenden Moment M_s sein. Es besteht also die Bedingung:

$$\text{(I)} \qquad 2\,H_1 \cdot 97{,}0 + H_2 \cdot \frac{76{,}5}{0{,}245} = M_s = 2030 \text{ cmt}.$$

Aus dieser einen Gleichung lassen sich aber die beiden unbekannten Nietkräfte H_1 und H_2 nicht ausrechnen. Wir müssen vielmehr noch eine Beziehung zwischen H_1 und H_2 aufstellen:

Hätten die Niete *1* und *2* (Fig. 146h) gleichen Durchmesser, so wäre einfach $H_2 : H_1 = y_2 : y_1 = \frac{76{,}5}{2} : \frac{97{,}0}{2} = 76{,}5 : 97{,}0$ zu setzen (§ 80, I). Jetzt, bei den ungleichen Durchmessern von 2,0 cm und 2,3 cm, können wir nicht annehmen, daß das obige Verhältnis ohne Rücksicht auf die Durchmesser bestehen bleibt. Wir machen vielmehr die Annahme, daß nicht die gesamten Nietkräfte H_2 und H_1, sondern die zugehörigen *Leibungsdrücke* p_2 und p_1 in diesem Verhältnis stehen mögen. Es sei also:

$$p_2 : p_1 = y_2 : y_1 = 76{,}5 : 97{,}0\,.$$

Dann kommen wir auf die Nietkräfte H, indem wir den Leibungsdruck p eines Nietes durch seine Kraft H, den Durchmesser d und die Leibungsstärke δ ausdrücken:

$$\frac{H_2}{d_2 \cdot \delta} : \frac{H_1}{d_1 \cdot \delta} = y_2 : y_1\,.$$

Digitized by Google

(Die Leibungsstärke ist für die Niete *1* und *2* die gleiche.) Hieraus folgt:

$$\text{(II)} \qquad \frac{H_2}{H_1} = \frac{y_2}{y_1} \cdot \frac{d_2 \cdot \delta}{d_1 \cdot \delta} = \frac{y_2}{y_1} \cdot \frac{d_2}{d_1}.$$

$$\text{(III)} \qquad \frac{H_2}{H_1} = \frac{76{,}5}{97{,}0} \cdot \frac{2{,}0}{2{,}3}.$$

Durch diese Beziehung läßt sich H_2 durch H_1 darstellen:

$$H_2 = H_1 \cdot \frac{76{,}5}{97{,}0} \cdot \frac{2{,}0}{2{,}3}.$$

Die Gleichung (I) geht hiermit über in:

$$2 H_1 \cdot 97{,}0 + H_1 \cdot \frac{76{,}5}{97{,}0} \cdot \frac{2{,}0}{2{,}3} \cdot \frac{76{,}5}{0{,}245} = 2030\,,$$

$$H_1(194 + 215) = 2030\,,$$

$$H_1 = \frac{2030}{409} = 4{,}95 \text{ t}.$$

Somit ist die größte von einem Niete auszuübende Horizontalkraft bestimmt.

Eine Vertikalkraft V tritt nicht auf, da an der Stoßstelle die Querkraft gleich Null ist. Es ergibt sich also der größte Leibungsdruck der Niete *1*:

$$p_1 = \frac{4{,}95}{2{,}3 \cdot 1{,}2} = 1{,}80 \text{ t/qcm}.$$

(Scherspannung kommt nicht in Betracht, da $\delta < 0{,}8\, d$ ist.) Hiermit ist die Nietverbindung des Stehblechstoßes erledigt.

Wiederholung: **Haben die Niete einer Stoßverbindung gleiche Stärke und gleiche Abstände voneinander, so überträgt die Nietgruppe ein Moment:**

$$M = \frac{H \cdot h}{f}.$$

(h = Abstand der äußersten Niete; f ein von der Anzahl n und der Anordnung der Niete abhängiger Faktor.) Hieraus ist bei vorgeschriebenem Moment die größte Horizontalkraft H zu berechnen.

Kommen zu einer solchen Nietgruppe oben und unten noch Niete von anderem Durchmesser hinzu, so wird deren Moment besonders berechnet und zu dem vorigen Moment hinzugezählt.

Digitized by Google

Um aber in dem Gesamtmoment nur *eine* Nietkraft H als Unbekannte zu haben, müssen die anderen mittels der Annahme durch H ausgedrückt werden: Das Verhältnis zweier Nietkräfte ist gleich dem Verhältnis ihrer Abstände y von dem Mittelpunkte L der Reihe, multipliziert mit dem Verhältnis der Nietdurchmesser (und eventl. noch multipliziert mit dem Verhältnis der Leibungsstärken). Insgesamt übertragen die Niete also (m = Anzahl der Nietreihen):

$$M = m \cdot H_1 \cdot h_1 + \frac{H_2 \cdot h_2}{f} = m \cdot H_1 \cdot h_1 + H_1 \frac{y_2}{y_1} \frac{d_2}{d_1} \cdot \frac{h_2}{f}$$

$$= H_1 \left(m\, h_1 + \frac{h_2}{h_1} \frac{d_2}{d_1} \frac{h_2}{f} \right).$$

Bei vorgeschriebenem M ist hieraus H_1 zu berechnen.

§ 81.

Allgemeine Konstruktionsregeln. Nietabzug.

I. Allgemeine Konstruktionsregeln.

Am Schlusse unserer Untersuchungen über Nietträger mögen noch einige Konstruktionsregeln erwähnt werden:

Die *Höhe des Stehbleches* nehme man, falls genügend Konstruktionshöhe vorhanden ist, gleich $^1/_{12}$ — $^1/_{10}$ — $^1/_8$ der Spannweite des Trägers. Kleinere Höhen verursachen größeren Materialaufwand.

Die *Stärke des Stehbleches* schwankt je nach seiner Höhe zwischen 8—14 mm. Üblich sind 10 bzw. 12 mm.

Für die *Gurtwinkel* nimmt man bei kleinen Trägern z. B. $\sphericalangle 80 \cdot 80 \cdot 10$, bei mittleren Trägern $100 \cdot 100 \cdot 12$ und bei großen Trägern $120 \cdot 120 \cdot 13$. Natürlich lassen sich aber gerade hierfür keine bestimmten Normen aufstellen.

Die *Lamellen* werden gewöhnlich so breit gewählt, daß sie auf jeder Seite ca. 1 cm über die Winkelschenkel überstehen.

Ferner möge noch folgende, von Professor *Müller-Breslau* gegebene Annäherungsformel aufgeführt werden: Ist die Gesamthöhe eines Trägers h, seine Stehblechhöhe h_0, sein Widerstandsmoment ohne Lamellen W^0, so müssen die Lamellen einer Gurtung einen Flächeninhalt von

$$F = \frac{W}{h_0} - \frac{W^0}{h}$$

erhalten, um das Widerstandsmoment W^0 auf das erforderliche Widerstandsmoment W zu erhöhen. Auf diese Weise kann man die erforderliche Lamellenfläche überschlagen, wenn man, von Stehblech und Gurtwinkeln ausgehend, ein bestimmtes Widerstandsmoment W erreichen will.

Digitized by Google

II. Nietabzug.

Allgemeines: Bei Berechnung der vorhandenen Widerstandsmomente muß in den *gezogenen* Querschnittsteilen auf jeden Fall die Schwächung durch Nietlöcher berücksichtigt werden. Denn durch die Nietlöcher wird ja tatsächlich der Querschnitt der betreffenden Lamelle od. dgl. vermindert. Bei den auf *Druck* beanspruchten Fasern brauchen die Nietlöcher nicht abgezogen zu werden, da der Nietschaft das Loch ausfüllt und also auch den Druck übertragen kann. Nach dieser Regel würde man also bei einem Träger zwischen zwei Stützen in der unteren Gurtung die Nietlöcher abziehen, in der oberen nicht.

Um aber das Widerstandsmoment bequem berechnen zu können, zieht man — wenigstens bei symmetrischen Querschnittsformen — oben und unten die Nietlöcher ab. Dann bleibt die Nullinie in ihrer alten Lage und man erleichtert sich die Rechenarbeit.

Besonderes: Wir wollen nun noch genauer untersuchen, welche Niete man abziehen muß; die horizontalen oder die vertikalen. Als Beispiel mögen die Fig. 146d—f genommen werden, wo ein Träger ohne Lamellen, mit einer Lamelle und mit zwei Lamellen gezeichnet ist. Man ersieht folgendes:

Beim Träger ohne Lamellen (Trägheitsmoment J°, Fig. 146d), müssen natürlich die horizontalen Niete abgezogen werden. Und zwar muß vom Stehblech eine ganze Nietreihe abgezogen werden, wie sie ja am Stoße oder am Anschluß eines Aussteifungswinkels tatsächlich auftritt. Erfahrungsgemäß beträgt dieser Abzug beim Stehblech rund $^1/_8$ von dessen Trägheitsmoment.

Bei J^I (Träger mit einer Lamelle) kommen horizontale und vertikale Niete vor (Fig. 146c), und es fragt sich nun, welche abgezogen werden müssen. Bei einer ordnungsmäßigen Vernietung sind die horizontalen und die vertikalen Niete gegeneinander versetzt, so daß in *einem* Querschnitte des Trägers entweder *nur* horizontale oder *nur* vertikale Niete, niemals aber beide zusammen, vorkommen. Die vertikalen Nietlöcher ergeben im allgemeinen mehr Abzug als die horizontalen (vgl. das Beispiel § 81a). Es erscheint also gerechtfertigt, bei der Ermittlung von J^I nur die vertikalen Nietlöcher zu berücksichtigen (Fig. 146e), die horizontalen dagegen nicht abzuziehen. Das Stehblech wäre demnach bei J^I mit vollem Trägheitsmomente einzusetzen.

Dieser Anschauung hinsichtlich des Nietabzuges steht aber folgendes Bedenken entgegen, das sich auf den Verlauf der eventuellen Bruchfuge eines solchen Trägers stützt. Diese Bruchfuge

Digitized by Google

wird nämlich nicht glatt in *einem* Querschnitte des Balkens verlaufen. Sie wird vielmehr bei den Gurten in deren schwächster Stelle anfangen, und dann, sobald die Gurte zerstört sind und das Stehblech an die Reihe kommt, in der schwächsten Stelle des Stehbleches weiterlaufen. Bei einem solchen zusammengesetzten Träger wird also jeder einzelne Teil an seiner schwächsten Stelle zerstört werden, so daß die gesamte Bruchfuge des Balkens nicht einen glatten Querschnitt bildet, sondern in jedem Einzelteil an dessen schwächster Stelle verläuft.

Hiernach könnte es angebracht scheinen, bei Berechnung von J^I auch das Stehblech mit Nietabzug zu nehmen. Allerdings bezieht sich die obige Betrachtung auf den Zustand des Bruches, dessen Spannungsverteilung von dem normalen Zustande, solange die Gurte als tragend vorhanden sind, natürlich durchaus verschieden ist. Eine sichere Lösung der Frage ließe sich nur durch Versuche erzielen, indem man derartige Träger mit und ohne durchlöchertem Stehbleche bis zum Bruche belastet.

Leider bestehen auch keine feststehenden Vorschriften oder Übungen, ob man bei Berechnung eines Trägers mit Lamellen die Nietverschwächung des Stehbleches berücksichtigen soll oder nicht. Im Brückenbau ist es wohl gebräuchlich, diesen Abzug zu machen. Man hat dann auch beim Konstruieren freiere Hand, indem man beim Anwinkeln anderer Konstruktionen an das Stehblech die Anschlußniete nicht so ängstlich gegen die Lamellenniete des Trägers versetzen muß.

Zusammenfassung: Beim Träger *ohne* Lamellen sind die Niete im Stehbleche und in den vertikalen Winkelschenkeln abzuziehen. (Vorausgesetzt natürlich, daß die horizontalen Winkelschenkel nicht etwa infolge anderweitiger Umstände ebenfalls Nietlöcher enthalten.) Beim Träger *mit* Lamellen sind die Löcher in den Lamellen und in den horizontalen Winkelschenkeln abzuziehen. Für das Stehblech braucht eine Nietverschwächung nicht unbedingt gerechnet zu werden, falls die Niete tatsächlich so angeordnet sind, daß die Lamellenniete und die Stehblechniete stets gegeneinander versetzt sind.

Zusatz: Will man die Verschwächung des Stehbleches infolge einer vertikalen Nietreihe genauer berechnen, so kann man folgendermaßen vorgehen:

Die Niete seien nach Fig 145a angeordnet. Nietdurchmesser $= d$, Blechstärke $= \delta$. Dann wird der Abzug vom Trägheitsmoment

Digitized by Google

infolge des Nietes 0: $\frac{1}{12}\delta d^3$,

" " " 1: $\frac{1}{12}\delta d^3 + d\delta \cdot y_1^2$,

" " " 2: $\frac{1}{12}\delta d^3 + d\delta \cdot y_2^2$ usw.

Die Werte $\frac{1}{12}\delta d^3$ sind so klein, daß wir sie vernachlässigen können. Wir erhalten also den gesamten Abzug

$$\Delta J = d\delta(y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_r^2)\,2\,.$$

Nun hatten wir im Anschluß an Fig. 145 für die Summe $y_1^2 + y_2^2 + \ldots$ den Wert $\frac{h^2 \cdot n(n+1)}{24(n-1)}$ gefunden, worin h die Entfernung der äußersten Niete voneinander und n die Anzahl der Niete ist. Somit wird

$$\Delta J = d\,\delta \cdot h^2 \frac{n(n+1)}{12(n-1)}\,.$$

Um diesen Betrag verkleinert sich also das Trägheitsmoment des Stehbleches infolge einer senkrechten Nietreihe.

Wie bereits gesagt, ergibt diese genaue Ausrechnung, daß man beim Stehblech rund $^1/_5$ seines Trägheitsmomentes als Nietverschwächung absetzen muß.

§ 81a.

Beispiel: Vollständige Durchrechnung eines genieteten Trägers.

Aufgabe: Ein Blechträger von $l = 11{,}00$ m Spannweite trägt eine feststehende, gleichmäßig verteilte Nutzlast von $P = 85000$ kg. Die zulässigen Spannungen seien: Normalspannung $k = 1000$ kg/qcm, Scherspannung $t = 0{,}9\,k = 900$ kg/qcm und Leibungsdruck $p = 2\,t = 1800$ kg/qcm. Der Träger ist zu berechnen!

Nach den Untersuchungen dieses Vortrages zerfällt die Berechnung eines solchen Trägers in folgende einzelne Abschnitte.

I. Berechnung der Momente und erforderlichen Widerstandsmomente.

Der Träger hat außer der Nutzlast natürlich noch sein eigenes Gewicht zu tragen. Letzteres schätzen wir zu 450 kg/m. Für die ganze Länge beträgt also diese Last:

$$G = 11{,}00 \cdot 450 = \text{rd. } 5000 \text{ kg.}$$

Digitized by Google

Da die Nutzlast P ebenfalls eine unbewegliche Belastung sein sollte, können G und P zu einer Gesamtlast

$$Q = 5000 + 85000$$
$$= 90000 \text{ kg}$$

vereinigt werden. Für diese Belastung ist also der Träger zu dimensionieren.

Bei gleichmäßig verteilter Belastung ist die Momentenfläche eine Parabel. Das größte Moment tritt in der Mitte auf und ist:

$$M = \frac{Q \cdot l}{8} = \frac{90{,}00 \cdot 1100}{8}$$
$$= 12380 \text{ cmt.}$$

Hieraus folgt (mit $k = 1000$ kg/qcm $= 1{,}00$ t/qcm):

$$W_{erf} = \frac{12380}{1{,}00} = 12380 \text{ cm}^3.$$

Die Kurve der erforderlichen Widerstandsmomente ist eine Parabel von der Pfeilhöhe $W = 12380$ cm³. In Fig. 146b ist diese Parabel im Maßstabe: 5000 cm³ Widerstandsmoment = 1 cm in der Zeichnung, dargestellt.

II. Wahl der Querschnitte und Berechnung der vorhandenen Widerstandsmomente.

Als Grundlage für den Querschnitt nehmen wir ein Stehblech 1100 · 12 mm und vier Gurtwinkel 120 · 120 · 13. Eine überschlägliche Rechnung bzw. ein Nachschlagen in Tabellen ergibt, daß wir noch oben und unten Lamellen von rd. 260 · 22 mm brauchen, um das größte erforderliche Widerstandsmoment $W = 12380$ cm³ zu erreichen. Wir wählen eine I. Lamelle 260 · 10 und eine II. Lamelle 260 · 12 (Fig. 146c) und berechnen nun für den Fall, daß dieser angenommene Träger ohne Lamellen, mit einer Lamelle und mit zwei Lamellen ist, die vorhandenen Widerstandsmomente. Diese drei Fälle sind in Fig. 146d—f dargestellt.

Hinsichtlich der Nietabzüge ergibt sich für diesen Träger aus § 81, II folgendes:

Das *Stehblech* wird durch die Niete der Aussteifungswinkel und durch die Niete des Stehblechstoßes geschwächt. Da diese Niete zunächst noch nicht bekannt sind, wollen wir rd. $^1/_5$ des Stehblechträgheitsmomentes als Nietabzug absetzen. Den ge-

Digitized by Google

nauen Wert können wir nachträglich, bei Berechnung der Stoßniete, bestimmen.

Bei den *Winkeleisen* müssen entweder die horizontalen oder die vertikalen Niete abgezogen werden; die ersteren bei Berechnung von W^0 (Fig. 146 d), die letzteren bei W^I und W^{II} (Fig. 146 e und f). Für die *Lamellen* kommen nur die vertikalen Niete in Betracht.

Hiernach ist die folgende Tabelle aufgestellt (vgl. Fig. 146 d—f):

Querschnittsteil	Flächeninhalt (cm²)	Trägheitsmoment (ohne Nietabzug) (cm⁴)	Nietabzug (cm⁴)		Trägheitsmoment (mit Nietabzug) (cm⁴)	
			horizontale Niete	vertikale Niete		
Stehblech $1 \cdot 110 \cdot 1{,}2$	132,0	$\frac{1{,}2 \cdot 110^3}{12} = 133\,100$	$\frac{1}{5}\,133\,100 = 26\,620$		106 480	133 100
Gurtwinkel $4 \cdot \angle\, 120 \cdot 120 \cdot 13$	$4 \cdot 29{,}7 = 118{,}8$	$4 \cdot 393 = 1\,570$ $118{,}8 \cdot 51{,}56^2 = 315\,820$ 317 390	$4 \cdot 2{,}3 \cdot 1{,}3 \cdot 49{,}0^2 = 28\,720$	$4 \cdot 2{,}3 \cdot 1{,}3 \cdot 54{,}35^2 = 35\,330$	288 670	282 060
I. Lamelle $2 \cdot 26{,}0 \cdot 1{,}0$	$2 \cdot 26{,}0 = 52{,}0$	$52{,}0 \cdot 55{,}5^2 = 160\,170$		$4 \cdot 2{,}3 \cdot 1{,}0 \cdot 55{,}5^2 = 28\,340$		131 830
II. Lamelle $2 \cdot 26{,}0 \cdot 1{,}2$	$2 \cdot 31{,}2 = 62{,}4$	$62{,}4 \cdot 56{,}6^2 = 199\,900$		$4 \cdot 2{,}3 \cdot 1{,}2 \cdot 56{,}6^2 = 35\,370$		164 530
Gesamt:	365,2	810 560		99 040		711 520

Aus diesen Beiträgen der einzelnen Querschnittsteile ergeben sich nun die Trägheits- und Widerstandsmomente des Gesamtquerschnittes: J^0, W^0 (Träger ohne Lamellen); J^I, W^I (mit der 1. Lamelle); J^{II}, W^{II} (mit beiden Lamellen). Bei J^0 sind die horizontalen Niete abgezogen; bei J^I, J^{II} nur die vertikalen. Vorsichtiger wäre es allerdings gewesen, bei J^I und J^{II} auch beim Stehblech einen Nietabzug (horizontale Niete) zu machen (vgl. § 81, II).

Trägheitsmomente (cm⁴)		Widerstandsmomente (cm³)	
$J^0 =$	106 480 288 670 395 150 cm⁴	$W^0 =$	$\frac{395\,150}{55{,}0} = 7\,180$ cm³
$J^I =$	133 100 282 060 131 830 546 990 cm⁴	$W^I =$	$\frac{546\,990}{56{,}0} = 9\,770$ cm³
$J^{II} =$	164 530 711 520 cm⁴	$W^{II} =$	$\frac{711\,520}{57{,}2} = 12\,440$ cm³

Digitized by Google

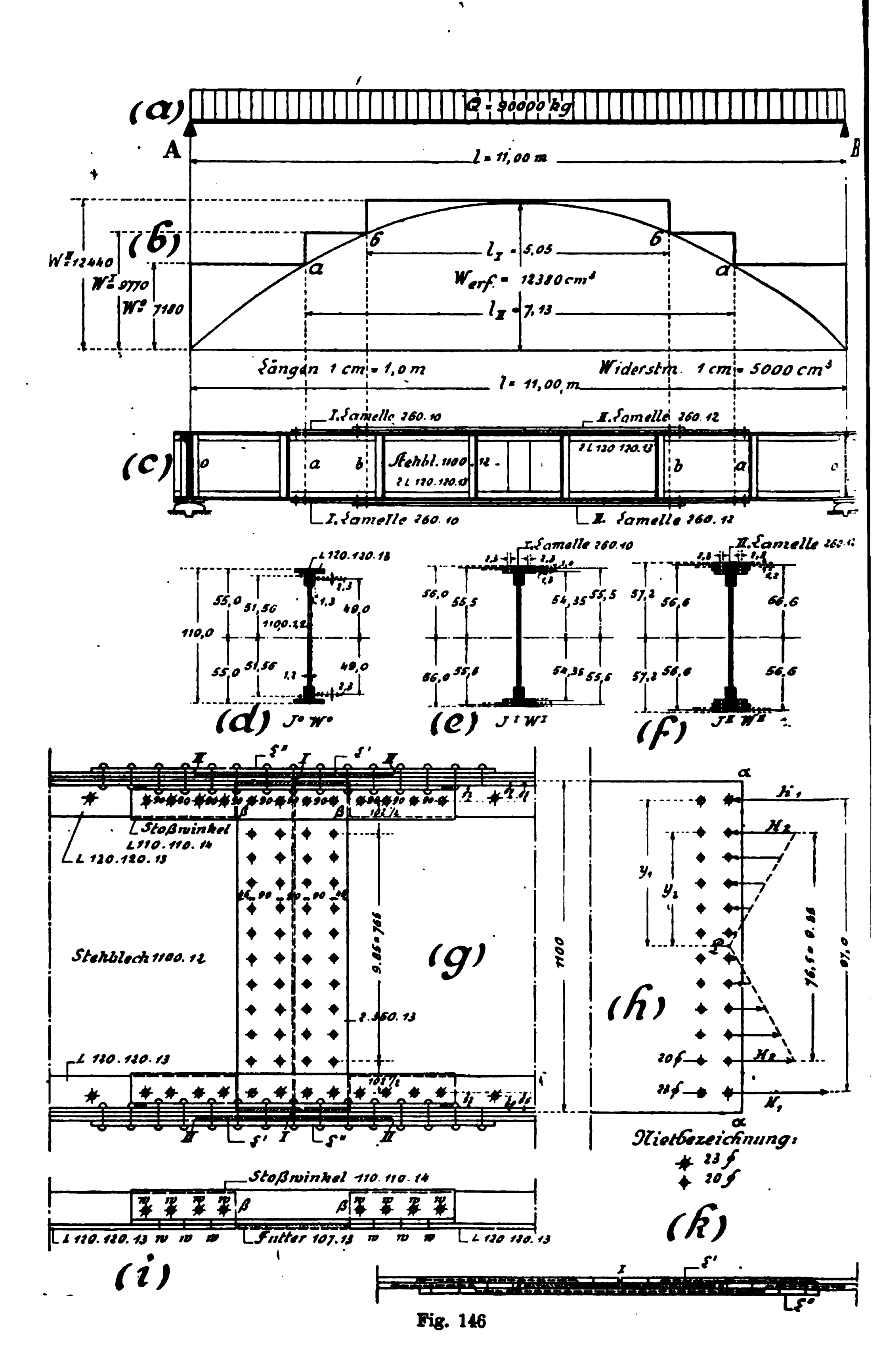


Fig. 146

Digitized by Google

III. Ermittelung der Lamellenlängen.

Die theoretisch erforderlichen Längen der Lamellen ergeben sich rechnerisch nach § 79, I (erster Spezialfall):

$$\text{I. Lamelle:}\quad l_I = 1100\sqrt{1-\frac{7180}{12380}} = 1100\sqrt{1-0{,}580}$$

$$= 1100\sqrt{0{,}420} = 1100 \cdot 0{,}648 = 713 \text{ cm},$$

$$\text{II. Lamelle:}\quad l_{II} = 1100\sqrt{1-\frac{9770}{12380}} = 1100\sqrt{1-0{,}789} = 505 \text{ cm}.$$

In Fig. 146b sind diese Lamellenlängen auch nach der zeichnerischen Methode bestimmt (§ 79, I; Fig. 143).

Wollte man nun die Lamellen so anschließen, daß vor ihren theoretischen Anfangspunkten bereits die ganze Lamelle befestigt ist, so ergäbe sich z. B. für die 1. Lamelle folgende Rechnung: Der Lamellenquerschnitt ist, nach Abzug zweier Nietlöcher von je 2,3 cm ∅:

$$F_l = (26{,}0 - 2 \cdot 2{,}3) \cdot 1{,}0 = 21{,}4 \text{ qcm}.$$

Er kann also bei der vorgeschriebenen zulässigen Spannung k eine Kraft aufnehmen:

$$P = F_l \cdot k = 21{,}4 \cdot k \,(\text{kg}).$$

Da für die (einschnittigen) Anschlußniete die Beanspruchung auf Abscheren maßgebend ist, müssen sie insgesamt eine Scherfläche

$$F_n = \frac{P}{t}$$

haben. Setzt man nun für die anzuschließende Lamellenkraft P und die zulässige Scherspannung t die berechneten bzw. vorgeschriebenen Werte ein,

$$P = F_l \cdot k \quad \text{und} \quad t = 0{,}9 \cdot k,$$

so ergibt sich für die erforderliche Scherfläche der Niete die Größe:

$$F_n = \frac{F_l \cdot k}{0{,}9 \cdot k} = \frac{F_l}{0{,}9} = \frac{21{,}4}{0{,}9} = 23{,}8 \text{ qcm}.$$

Es würden hiernach sechs Niete von 23 mm ∅ mit einer Scherfläche von

$$6 \cdot \frac{2{,}3^2 \pi}{4} = 6 \cdot 4{,}15 = 24{,}9 \text{ qcm}$$

zu wählen sein, die paarweise in drei Reihen zu setzen wären.

In dieser Weise werden häufig die zum „Einbinden“ der Lamellen nötigen Niete berechnet. Wie aber in § 79, II hingewiesen ist, ist ein derartiger Anschluß zu vorsichtig. Es genügt, vor den theoretischen Anfangspunkt eine Querreihe Niete zu setzen.

Digitized by Google

IV. Bestimmung der Querkräfte.

Als Vorarbeit zur Ermittlung der Nietteilung müssen die Querkräfte bestimmt werden. Es genügt, einige Stellen des Balkens herauszugreifen und für diese die Querkräfte aufzustellen. Und zwar wollen wir die Querschnitte über dem Auflager, am Anfange der I. und II. Lamelle, untersuchen (Querschnitt 0, a und b in Fig. 146c).

Bei direkt wirkender, gleichmäßig verteilter Belastung ist die Kraftsumme für irgendeine Stelle (§§ 59, 76):

$$Q = q \cdot x''_m,$$

worin q die Belastung pro Längeneinheit bedeutet, während x''_m die Entfernung des betrachteten Querschnittes von der Trägermitte ist. Die Belastung q beträgt bei unserer Aufgabe:

$$q = \frac{90000}{11,00} \text{ kg/m} = \frac{90,00}{11,00} \text{ t/m}.$$

Die Entfernungen x'' der Punkte a und b sind:

$$\frac{7,13}{2} \quad \text{bzw.} \quad \frac{5,05}{2} \text{ (m)}.$$

Für den Querschnitt am Auflager braucht man natürlich nicht die obige Formel, da an dieser Stelle die Querkraft gleich dem Auflagerdruck, also gleich der halben Gesamtlast, ist. In dieser Weise sind für die betrachteten Stellen 0, a und b die Querkräfte ausgerechnet (s. die folgende Tabelle in Absatz V).

V. Bestimmung der zulässigen Nietteilung.

Wir untersuchen die Niete, die durch die vertikalen Winkelschenkel und das Stehblech hindurchgehen, da diese mehr beansprucht sind als die Lamellenniete (vgl. 3. Beispiel in § 78). Die Formel zur Berechnung der größten zulässigen Nietteilung e lautet:

$$e = n \cdot \frac{N}{Q} \cdot \frac{J}{S}.$$

Der durch diese Niete anzuschließende Querschnittsteil ist die Gurtung, bestehend aus den beiden Gurtwinkeln bzw. aus den Gurtwinkeln mit einer oder zwei Lamellen. Zum Anschlusse einer

Digitized by Google

Gurtung ist in einem Schnitte immer nur *ein* Niet vorhanden. Es ist also in die obige Formel für n der Wert

$$n = 1$$

einzusetzen.

Für die Tragfähigkeit N eines solchen zweischnittigen Nietes kommt bei einem Durchmesser von 2,3 cm die Beanspruchung auf Leibungsdruck in Betracht. Denn die geringste Leibungsstärke ist 1,2 cm (Stehblech); es ist also $\delta < 0{,}8\,d$. Der zulässige Leibungsdruck ist $p = 1800$ kg/qcm, so daß sich ergibt:

$$N = 2{,}3 \cdot 1{,}2 \cdot 1800$$
$$= 4970 \text{ kg}.$$

Die Querkräfte Q sind bereits in dem vorigen Absatze dieses Paragraphen erläutert.

Die Trägheitsmomente J sind aus der früheren Tabelle der Trägheitsmomente (Absatz II) zu entnehmen. Es ist aber zu beachten, daß sie in die Formel für die Nietteilungen *ohne* Nietabzug einzusetzen sind.

Die statischen Momente S der anzuschließenden Querschnittsteile müssen noch berechnet werden. Die hierzu nötigen Flächeninhalte und Schwerpunktsabstände können aus der Tabelle für die Trägheitsmomente entnommen werden.

Hiernach ist in der folgenden Tabelle für die betrachteten Stellen 0, a und b des Trägers (Fig. 146c) die Nietteilung e bestimmt.

Trägerstelle	Querkraft (t)	Statisches Moment S (cm³)	Trägheitsmoment J (cm⁴)	$\frac{J}{S}$ (cm)	Nietteilung $e = 1 \cdot \frac{N}{Q} \cdot \frac{J}{S}$ $[N = 2{,}3 \cdot 1{,}2 \cdot 1{,}800 = 4{,}97\text{ t}]$ (cm)
0	$\frac{1}{2}\,90{,}00 = 45{,}00$	$2 \cdot 29{,}7 \cdot 51{,}56$ $S_0 = 3063$	$133\,100 + 317\,390$ $J_0 = 450\,490$	147	$\frac{4{,}97}{45{,}00} \cdot 147 = 16{,}3$
a	$\frac{90{,}00}{11{,}00} \cdot \frac{7{,}13}{2} = 29{,}17$	$26{,}0 \cdot 55{,}5 = 1443$ $S_a = 4506$	$160\,170$ $J_a = 610\,660$	135	$\frac{4{,}97}{29{,}17} \cdot 135 = 23{,}0$
b	$\frac{90{,}00}{11{,}00} \cdot \frac{5{,}05}{2} = 20{,}66$	$31{,}2 \cdot 56{,}6 = 1766$ $S_b = 6272$	$199\,900$ $J_b = 810\,560$	129	$\frac{4{,}97}{20{,}66} \cdot 129 = 31{,}0$

Da man aus praktischen Gründen die Nietteilung nicht über 16 cm nehmen wird, würde man bei diesem Träger am Auflager mit ca. 16 cm Teilung beginnen und diese Nietentfernung auf der ganzen Trägerlänge beibehalten. Die Stellen a und b hätten also gar nicht untersucht zu werden brauchen.

Digitized by Google

Die durch die Lamellen hindurchgehenden Niete werden noch bedeutend schwächer beansprucht als die Niete durch Winkelschenkel und Stehblech (vgl. 3. Beispiel in § 78). Aus praktischen Gründen kann man sie aber kaum weiter setzen oder kleinere Nietdurchmesser wählen.

Annäherungsmethode: Die genaue Berechnung der Nietteilungen macht ziemlich viel Arbeit, deren Umfang nicht im rechten Verhältnis zu ihrer Bedeutung steht. Oft kommt es außerdem vor, daß sich — wie auch beim vorliegenden Beispiele — schließlich eine zulässige Nietteilung ergibt, die man schon aus praktischen Gründen kleiner wählen muß. Deshalb ist hier eine überschlägliche Rechenmethode am Platze. Diese besteht darin, daß man den Quotienten $J:S$ nicht ausrechnet, sondern ihn angenähert gleich dem Abstande der beiden horizontalen Nietreihen im oberen und im unteren Gurtwinkel setzt. Statt des Abstandes dieser Nietreihen kann man auch die Höhe des Stehbleches — h_0 — einführen, wodurch die Rechnung noch bequemer wird. Nach dieser Annäherungsmethode erhält man stets kleinere Nietteilungen als beim genauen Verfahren und rechnet also zugunsten der Sicherheit.

VI. Anordnung und Berechnung der Stoßverbindungen.

Um den Träger bequem in zwei Teilen nach der Baustelle transportieren zu können, ist in der Mitte ein vollständiger Stoß vorgesehen. Da dieser erst während des Aufstellens zusammengenietet wird, nennt man ihn bekanntlich einen „Universal“- oder „Montagestoß“.

a) Allgemeine Anordnung des Stoßes.

Man kann einen solchen Stoß in verschiedener Weise anordnen. In Fig. 146 ist er folgendermaßen ausgebildet:

Das *Stehblech* ist in der Fuge α—α gestoßen (Fig. 146g und h). Gedeckt wird diese Fuge durch zwei Stoßlaschen 350 · 13, die auf der ganzen Höhe der Fuge (110 cm) durchgehen. Um für diese Stoßlaschen Platz zu machen, müssen demnach die Gurtwinkel vor den Laschen, an den Stellen β, Fig. 146g, aufhören.

Die *Gurtwinkel* sind also auf der Strecke β—β unterbrochen (Fig. 146g und i). Um die links und rechts von der Stoßstelle liegenden Teile eines Winkels zu verbinden, ist auf jeden der Winkel 120 · 120 · 13 ein Stoßwinkel 110 · 110 · 14 aufgelegt. Diese Stoßwinkel dienen also zur Überbrückung der durchbrochenen

Digitized by Google

Strecke β—β (Fig. 146i). Das Futter ist nur zur Ausfüllung des Hohlraumes da.

Die *I. Lamelle* ist an derselben Stelle gestoßen wie das Stehblech. Um für die I. Lamelle eine Lasche zu erhalten, ist aus der II. Lamelle ein Stück ausgeschnitten. Letztere ist also auf der Strecke *II—II* unterbrochen (Fig. 146g und k).

Die *II. Lamelle* ist ihrerseits durch die Lasche L'' gedeckt.

b) Der Stehblechstoß.

Das Gesamtmoment an der Stoßstelle ist

$$M = 12380 \text{ cmt.}$$

Der hiervon auf das Stehblech entfallende Anteil M_s ergibt sich durch Multiplikation von M mit dem Verhältnis des Stehblechträgheitsmomentes zu dem Gesamtträgheitsmoment (§ 80, II):

$$M_s = 12380 \cdot \frac{133100}{810560}$$
$$= 2030 \text{ cmt.}$$

Dieses Moment muß also von den Laschen und Stoßnieten des Stehbleches aufgenommen werden.

Die Querkraft ist an der Stoßstelle gleich Null.

α) Die Stoßlaschen. Da die Laschen die gleiche Höhe haben wie das Stehblech, brauchte jede nur in der halben Stehblechstärke genommen zu werden. Aus praktischen Gründen — weil die Gurtwinkel gegen die Laschen stoßen — geben wir ihnen jedoch dieselbe Stärke, die die Winkelschenkel haben, also 13 mm.

β) Die Stoßniete. Die Niete sind nach Fig. 146h angeordnet. Die mittleren 10 Niete haben gleichen Durchmesser und gleiche Abstände voneinander; die äußersten Niete H_1 haben anormalen Durchmesser und Abstand.

Die Berechnung einer solchen Stoßverbindung geschieht nach § 80a, 2. Aufgabe: Die Niete werden so in Gruppen geteilt, daß in jeder Gruppe nur Niete von gleichem Durchmesser stehen. Dann wird von jeder Gruppe angeschrieben, welches Moment sie übertragen kann, und die Summe dieser Momente gleich dem aufzunehmenden Moment M_s gesetzt. Auf diese Weise entsteht eine Gleichung zur Berechnung der Nietkräfte. Um aber in dieser

Digitized by Google

Gleichung nur eine Unbekannte (H_1) zu haben, müssen alle anderen Kräfte durch H_1 ausgedrückt werden: $H_2 = H_1 \frac{y_2}{y_1} \cdot \frac{d_2}{d_1}$.

Für Fig. 146h würde sich demgemäß ergeben:

$$2 \cdot H_1 \cdot h_1 + \frac{H_2 \cdot h_2}{f} = M_s.$$

[Das von H_1 zu übertragende Moment ist direkt ausgerechnet. Für die innere Nietgruppe ist, da es sich um eine größere Anzahl handelt, die Vereinfachung mittels des Faktors f benutzt; § 80, Formel IV usw].

$$2H_1 \cdot h_1 + H_1 \frac{y_2}{y_1} \cdot \frac{d_2}{d_1} \cdot \frac{h_2}{f} = M_s,$$

$$2H_1 \cdot 97{,}0 + H_1 \frac{76{,}5}{97{,}0} \cdot \frac{2{,}0}{2{,}3} \cdot \frac{76{,}5}{0{,}245} = 2030 \text{ cm } t,$$

$$H_1 (194 + 215) = 2030$$

$$H_1 = 4{,}95 \, t$$

$$\text{Leibungsdruck } p_1 = \frac{4{,}95}{2{,}3 \cdot 1{,}2} = 1{,}80 \text{ t/qcm}.$$

Hiermit ist die größte Nietbeanspruchung am Stehblechstoße bestimmt.

γ) *Verminderung des Stehblechträgheitsmomentes durch die Stoßniete.* Jetzt, da die Niete festgelegt sind, können wir auch den genauen Betrag berechnen, um den das Trägheitsmoment des Stehbleches durch die Stoßniete vermindert wird. Fs kommen natürlich nur die in *einem* Querschnitte des Stehbleches sitzende Niete in Betracht.

Die 23er Niete ergeben einen Abzug:

$$\Delta J_1 = 2 \cdot 2{,}3 \cdot 1{,}2 \left(\frac{97{,}0}{2}\right)^2.$$

Der durch die Gruppe der 20er Niete verursachte Ausfall an Trägheitsmoment ist nach § 81, II:

$$\Delta J_2 = 2{,}0 \cdot 1{,}2 \cdot 76{,}5^2 \frac{10(10+1)}{12(10-1)}.$$

Insgesamt beträgt also der Nietabzug:

$$\Delta J = 2 \cdot 2{,}3 \cdot 1{,}2 \left(\frac{97{,}0}{2}\right)^2 + 2{,}0 \cdot 1{,}2 \cdot 76{,}5^2 \frac{10 \cdot 11}{12 \cdot 9}$$

$$= 13000 + 14300 = 27300 \text{ cm}^4.$$

Unsere ursprüngliche Schätzung war also genügend genau.

c) Der Stoß der Gurte.

In Fig. 146i ist der Stoß eines der unteren ***Gurtwinkel*** besonders gezeichnet: Die in dem Winkel enthaltene Kraft wird durch die Niete w in den Stoßwinkel $110 \cdot 110 \cdot 14$ geleitet und

Digitized by Google

von diesem auf der anderen Seite wieder an den Gurtwinkel zurückgeführt. Die Spannung im Gurtwinkel nehmen wir der Einfachheit wegen als gleichmäßig verteilt an, und zwar in der Größe der zulässigen Spannung k. Bei einer Querschnittsfläche F_w des Gurtwinkels ist dann also eine Kraft von $F_w \cdot k$ zu übertragen. Da für die Laschen die zulässige Spannung natürlich ebenfalls k ist, und für die (einschnittigen) Niete w eines jeden Winkels die zulässige Scherspannung $t = 0{,}9\ k$ maßgebend ist, so folgt:

erforderlicher Laschenquerschnitt $F_l = \dfrac{F_w \cdot k}{k} = F_w$,

erforderliche Nietscherfläche $F_n = \dfrac{F_w \cdot k}{0{,}9\ k} = \dfrac{F_w}{0{,}9}$.

Der Stoß der (unteren) *Lamellen* ist in Fig. 146k dargestellt. Die Überleitung der Kräfte ist klar ersichtlich. Für jeden Übergang einer Lamellenkraft in die zugehörige Lasche ist eine besondere Nietgruppe vorgesehen. Die Schafte dieser Niete sind in Fig. 146k nur so weit gezeichnet, wie sie für die betreffende Kraftüberleitung wirksam sind.

In der folgenden Tabelle ist der gesamte Stoß einer Gurtung mit den sich ergebenden Beanspruchungen klargelegt.

Gestoßener Teil		Gestoßen durch		Übertragungsniete		Beanspruchungen	
Profil	Querschnittsfläche (cm²)	Profil	Querschnittsfläche (cm²)	Anzahl	Scherfläche (cm²)	Laschen	Niete
Gurtwinkel 120 · 120 · 13	29,70 − 2,3 · 1,3 = 26,71	∢110·110·14	29,00 − 2,3 · 1,4 = 25,78	7 (23 ⌀)	7 · 4,15 = 29,05	$\frac{26{,}71\,k}{25{,}78} = 1{,}04\,k$	$\frac{26{,}71\,k}{29{,}05} = 0{,}92\,k$
I. Lamelle 26,0 · 1,0	(26,0 − 2·2,3) 1,0 = 21,40	26,0 · 1,2	(26,0 − 2·2,3) 1,2 = 25,68	6 (23 ⌀)	6 · 4,15 = 24,90	$\frac{21{,}40\,k}{25{,}68} = 0{,}83\,k$	$\frac{21{,}40\,k}{24{,}90} = 0{,}86\,k$
II. Lamelle 26,0 · 1,2	(26,0 − 2·2,3) 1,2 = 25,68	26,0 · 1,2	25,68	8 (23 ⌀)	8 · 4,15 = 33,20	1,00 k	$\frac{25{,}68\,k}{33{,}20} = 0{,}77\,k$
Gesamt:	73,79		77,14		87,15		

Die geringe Mehrbeanspruchung bei den Laschen und Nieten der Gurtwinkel ist unbedenklich, da in den Winkeln ja tatsächlich nicht die zulässige Biegungsspannung k, sondern höchstens $k \cdot \dfrac{55{,}0}{57{,}2} = 0{,}96\ k$ herrschen kann. Außerdem findet bei einem solchen Stoße unzweifelhaft ein gewisser Ausgleich innerhalb der verschiedenen Laschen statt.

Zusatz 1: Ist an der Stoßstelle das Material bedeutend unter der zulässigen Spannung beansprucht, so wird man die zu über-

Digitized by Google

tragenden Kräfte natürlich nicht auf Grund der Spannung k, sondern der wirklich vorhandenen Spannung $\sigma = \frac{M}{W}$ berechnen.

Zusatz 2: Man ordne die Stoßfugen und Laschen so an, daß die Überleitung der Kräfte klar nachweisbar ist. Jeder Niet hat dann eine bestimmte Aufgabe. Er wirkt wie ein Dorn, der die beiden aufeinanderliegenden Konstruktionsteile verbindet (Fig. 146i und k). Zu jedem dieser Dorne gehört dann eine bestimmte Scherfläche und Leibungsstärke, die durch *eine* bestimmte Kraftüberleitung in Anspruch genommen werden.

VII. Aussteifungen des Stehbleches.

Um ein Einknicken (Falten) des Stehbleches zu verhindern, wird es durch „*Aussteifungswinkel*" verstärkt. Theoretisch läßt sich deren Beanspruchung nicht verfolgen. Am Auflager, wo die größten Querkräfte und Schubspannungen auftreten, ist diese Aussteifung besonders nötig. Für unseren Fall nehmen wir ∢ 80 · 80 · 10.

VIII. Berechnung eines Lagers.

Zum Schlusse dieses Beispiels mögen die Formeln zur Berechnung eines einfachen Tangentiallagers abgeleitet werden.

Der Auflagerdruck sei A. Damit er auch dann, wenn der Träger sich durchbiegt, möglichst auf der Mittellinie m—m der Platte (Fig. 147b) bleibt, geben wir dieser eine kleine Wölbung (Tangentiallager). Unter der Vorraussetzung, daß die Platte einen starren Körper bildet, kann man eine ziemlich gleichmäßige Verteilung des Druckes in der Grundfläche $a \times b$ annehmen. Es entfällt dann auf *ein* Quadratzentimeter der Berührungsfläche zwischen Platte und Mauerwerk bzw. Unterlagstein, die

$$\textit{Pressung} \quad p = \frac{A}{a \cdot b}.$$

Nimmt man für p einen zulässigen Wert an, so kann man aus dieser Formel die erforderliche Grundfläche $a \cdot b$ bestimmen.

Die *Stärke δ der Platte* ergibt sich aus der Biegungsbeanspruchung. In der Breitenrichtung b (Fig. 147c) haben wir oben die verteilte Belastung A und unten an jeder Stelle den Gegendruck des Mauerwerkes (Auflagersteines). In dieser Richtung

Digitized by Google

kann also kein Abbiegen der Platte eintreten. Wohl aber in Richtung der Länge a (Fig. 147a). Hier haben wir die Belastung an der oberen Fläche nur im Punkte m; an der unteren Fläche sind die Kräfte auf die Länge a verteilt, so daß ein Durchbiegen der Platte eintreten wird. Das Biegungsmoment infolge der unteren Belastung (p) ist für einen Querschnitt um so größer, je näher er nach der Mitte m liegt. Der gefährliche Querschnitt ist augenscheinlich bei $\alpha'—\alpha$ (Fig. 147a und b). Denn hier hat das Biegungsmoment beinahe seinen Größtwert erreicht, während der Querschnitt nur mit der Höhe $\alpha'—\alpha$, ohne Verstärkungsrippe R, zu rechnen ist. Für einen Querschnitt, der noch mehr

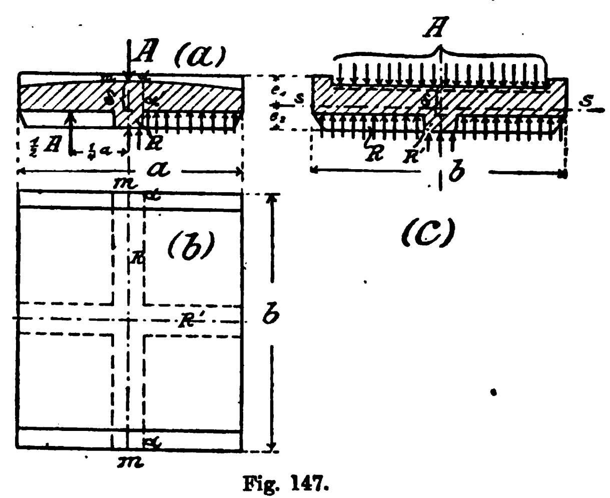


Fig. 147.

nach der Mitte zu liegt, ist das Biegungsmoment zwar etwas größer; dafür hat aber auch das Widerstandsmoment durch das Hinzutreten der Rippe R bedeutend zugenommen, so daß sich eine kleinere Biegungsspannung ergeben wird. Um nun die Untersuchung zu vereinfachen, rechnen wir so: Wir stellen das Biegungsmoment für die Mitte, m, in Rechnung, berücksichtigen aber nur den Querschnitt an der Stelle $\alpha—\alpha$ oder, was auf dasselbe hinauskommt, den Querschnitt in der Mitte *ohne* Verstärkungsrippe R. Das Moment für die Mitte ist (Fig. 147a)

$$M = \frac{1}{2} A \cdot \frac{1}{4} a = \frac{A \cdot a}{8};$$

denn die Ersatzkraft sämtlicher auf der einen Seite von m wirkenden Drücke ist gleich dem halben Auflagerdruck A, und der Abstand ist $\frac{1}{4} a$. Für das Widerstandsmoment kommt der in

Digitized by Google

Fig. 147c schraffierte Querschnitt in Betracht. Wir rechnen für ihn

$$W = \frac{1}{6} b \delta^2,$$

d. h., wir nehmen ihn als ein Rechteck $b \times \delta$ an und lassen die Rippe R' und die oberen seitlichen Führungen ebenfalls unberücksichtigt. Dann findet sich die größte Spannung in der Lagerplatte

$$\sigma = \frac{M}{W} = \frac{\frac{1}{8} A \cdot a}{\frac{1}{6} b \cdot \delta^2}.$$

Für den vorliegenden Fall ergibt sich also folgende Rechnung: Es ist

$$A = 45000 \text{ kg}.$$

Ferner nehmen wir

$$a = b = 50{,}0 \text{ cm}; \quad \delta = 5{,}8 \text{ cm}.$$

Dann wird

$$M = \frac{45000 \cdot 50}{8} = 281250 \text{ cmkg},$$

$$W = \frac{1}{6} 50 \cdot 5{,}8^2 = 281 \text{ cm}^3.$$

Hieraus folgen die Beanspruchungen:

Pressung auf den Unterlagstein $p = \frac{45000}{50 \cdot 50} = 18$ kg/qcm,

Biegungsspannung der Platte $\sigma = \frac{281250}{281} = 1000$ kg/qcm.

Für den Unterlagstein ist z. B. fester Sandstein zu verwenden, für die Platte ist Stahl erforderlich.

Will man die Rippe R' und die Führungsleisten berücksichtigen, so muß man erst die Lage der Schwerachse s—s und für diese das Trägheitsmoment ausrechnen, und findet dann die größten Spannungen

$$\sigma_1 = -\frac{M}{J} e_1 \cdot \text{(in der obersten Schicht)},$$

$$\sigma_2 = +\frac{M}{J} e_2 \cdot \text{(in der untersten Schicht)}.$$

Häufig ergeben sich diese Spannungen aber größer als die für das Rechteck berechneten; denn das Trägheitsmoment hat durch das Hinzukommen der Rippe und der Führungen wenig zugenommen, während die Entfernungen der äußersten Fasern bedeutend größer geworden sind.

Digitized by Google

Übungsaufgabe:

Konstruiere den in Fig. 121, 122 dargestellten Brückenträger! Es sind hierbei also der Reihe nach zu bestimmen:

Momente, Querschnitte, Lamellenlängen;
Querkräfte, Nietteilungen;
Stoßverbindungen;
Lager.

---

14. Vortrag:

Berechnung von Durchbiegungen.

Neben genügender Sicherheit gegen Bruchgefahr muß jede Konstruktion auch Gewähr gegen zu große Durchbiegungen besitzen. Letztere können — namentlich bei beweglicher Last — leicht zu Schwingungen des Balkens Veranlassung geben, die die Sicherheit des Bauwerkes gefährden. Aus diesem Grunde ist es in vielen Fällen notwendig, auch die Durchbiegungen zu untersuchen. Außerdem wird sich die Theorie der elastischen Formänderungen als nötig erweisen zur Untersuchung von statisch unbestimmt gelagerten Trägern.

Zunächst wollen wir zwei Voraufgaben erledigen (§ 82 bis § 83a). Aus diesen folgen dann mit Leichtigkeit alle weiteren Biegungsuntersuchungen.

§ 82.

Der Drehungswinkel zweier Querschnitte gegeneinander.

1. Die Querschnitte liegen unendlich nahe beieinander.

In Fig. 148a stelle die stark gezeichnete Linie ein Stück eines auf Biegung beanspruchten Stabes dar. Es ist für das Folgende gleichgültig, ob es sich um einen Träger auf zwei Stützen, einen Freiträger oder um einen Teil einer größeren, statisch bestimmten oder statisch unbestimmten Konstruktion handelt. Wir wollen annehmen, daß die Momente für die einzelnen Querschnitte bereits berechnet und in den betreffenden Punkten graphisch aufgetragen sind. Die in Fig. 148a gezeichnete Fläche stellt also nicht die Belastungen dar, sondern bedeutet die Momentenfläche. Der Einfachheit wegen ist sie direkt auf den Träger aufgezeichnet.

In Fig. 148c ist nun das Stück x im ursprünglichen Zustand (vor der Durchbiegung) und in Fig. 148d im durchgebogenen

Digitized by Google

Zustand in größerem Maßstabe dargestellt. Ich denke mir die Länge x durch eine große Anzahl von Schnitten in lauter Stücke von der sehr kleinen Länge u zerlegt. Die neutrale Faserschicht sei NN'. Dieses möge also die Schicht sein, die ihre ursprüngliche Länge beibehält. Für eine andere Faserschicht, z. B. Schicht $\overline{ab}$ zwischen Schnitt 0 und Schnitt 1, berechnen wir dann die Spannung nach der allgemeinen Biegungsformel

$$\sigma = \frac{M}{J} y .$$

Das Moment M ändert sich von Querschnitt zu Querschnitt. Wenn wir aber die Entfernung u zweier Querschnitte unendlich

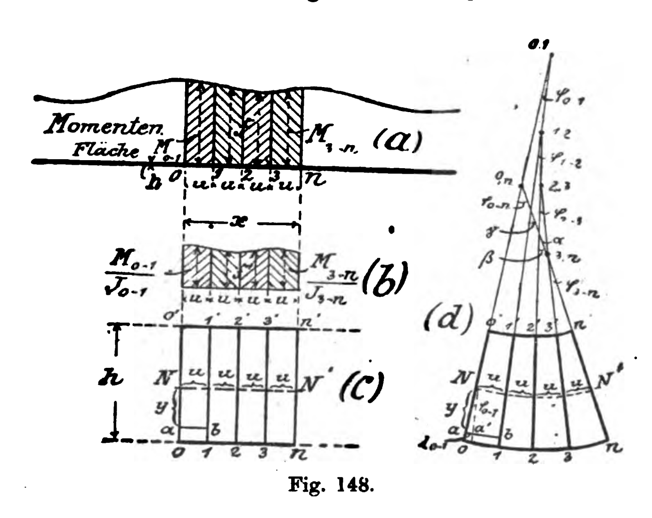


Fig. 148.

klein nehmen, ist die Zu- oder Abnahme, die das Moment innerhalb einer solchen unendlich kleinen Strecke erfährt, ebenfalls nur unendlich klein. Wir können dann also, ohne daß dadurch ein Fehler von endlicher Größe in die Rechnung hineinkommt, für jeden Abschnitt u einen konstanten Mittelwert des Momentes einführen. Er werde für die erste Strecke mit M_{0-1} bezeichnet (Fig. 148a). Da wir außerdem den allgemeinen Fall annehmen wollen, daß auch die Trägheitsmomente des Balkens an den einzelnen Querschnitten verschieden sind, so führen wir für das Trägheitsmoment auf der ersten Strecke u ebenfalls einen Mittelwert, J_{0-1}, ein. Der Abstand y ist beliebig genommen. Wir erhalten dann die Spannung in der Schicht $\overline{ab}$:

$$\sigma = \frac{M_{0-1}}{J_{0-1}} \cdot y .$$

Digitized by Google

Die durch diese Spannung hervorgerufene Dehnung ergibt sich hieraus:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{M_{0-1}}{E \cdot J_{0-1}} y ,$$

und das Stück λ_{0-1}, um das die ursprüngliche Länge u dieser Schicht zunimmt:

$$\lambda_{0-1} = \varepsilon \cdot u = \frac{M_{0-1} \cdot u}{E \cdot J_{0-1}} \cdot y .$$

Ziehen wir nun in Fig. 148d durch N die Parallele zu $\overline{1-1'}$, so ist $a'b$ gleich der Länge u, folglich $\overline{aa'}$ gleich der Verlängerung λ_{0-1}.

Den Winkel aNa' bezeichne ich mit φ_{0-1}. Wir wollen seine Größe nicht, wie gewöhnlich, in Grad, Minuten und Sekunden messen; sondern wir bestimmen sie dadurch, daß wir angeben, in welchem Verhältnis der zu diesem Winkel gehörige Kreisbogen zum Radius steht. Augenscheinlich kann man auf diese Weise die Größe eines Winkels ebensogut bestimmen wie durch die Angabe der Grade. Für einen Winkel von z. B. 360° ist das Verhältnis von Kreisbogen zu Radius gleich $2r\pi : r = 2\pi = 6{,}28$; für einen Winkel von 180°:) $\frac{1}{2} 2r\pi : r = \pi = 3{,}14$; für einen Winkel von 90°:) $\frac{1}{4} 2r\pi : r = \frac{\pi}{2} = 1{,}57$; für einen Winkel von 20°:) $\frac{1}{18} 2r\pi : r = \frac{1}{9}\pi = 0{,}35$, usw. In der höheren Mathematik ist diese Methode, die Winkel durch „Bogenmaß“ zu messen, allgemein üblich, da sie die zweckmäßigere ist. Haben wir dann bei einer in dieser Weise durchgeführten Rechnung für einen Winkel beispielsweise die Größe von 1,96 (unbenannte Zahl) gefunden, so können wir diese Größe natürlich auch in Grad umrechnen:

ein Winkel von der Größe π ist gleich 180°

„ „ „ „ „ 1,96 „ „ $\frac{180° \cdot 1{,}96}{3{,}14} = 112{,}2°$.

Um nun die Größe des Winkels φ_{0-1} zu bestimmen, beachten wir, daß wir mit genügender Genauigkeit die Verlängerung λ_{0-1} als einen Kreisbogen mit dem Radius y um den Punkt N als Mittelpunkt auffassen können. Die Größe des Winkels φ_{0-1}, in Bogenmaß ausgedrückt, ist also

$$\varphi_{0-1} = \frac{\lambda_{0-1}}{y} = \frac{M_{0-1} \cdot u}{E \cdot J_{0-1}} \cdot \frac{y}{y}$$

$$= \frac{M_{0-1} \cdot u}{E \cdot J_{0-1}} .$$

Digitized by Google

Verlängern wir die Linien $\overline{0—0'}$ und $\overline{1—1'}$ bis zu ihrem Schnittpunkte *0, 1*, so erscheint an dieser Stelle ebenfalls der Winkel φ_{0-1}. Wir wollen ihn jetzt den ***Drehungswinkel von Schnitt 0 gegen Schnitt 1*** nennen, weil diese beiden Querschnitte sich infolge der Durchbiegung um diesen Winkel φ_{0-1} gegeneinander gedreht haben. Er ist also derjenige Winkel, den die beiden Schnitte nach der Durchbiegung miteinander einschließen. Durch die obige Gleichung ist seine Größe im Bogenmaß bestimmt.

Gehen wir jetzt zu zwei folgenden Schnitten, so finden wir deren Drehungswinkel φ_{1-2} in Fig. 148 in genau entsprechender Weise zu:

$$\varphi_{1-2} = \frac{M_{1-2} \cdot u}{E \cdot J_{1-2}},$$

worin M_{1-2} und J_{1-2} das Biegungs- und das Trägheitsmoment zwischen den Schnitten *1* und *2* sind. Ferner ergibt sich

Drehungswinkel von Schnitt *2* gegen *3*: $\varphi_{2-3} = \dfrac{M_{2-3} \cdot u}{E \cdot J_{2-3}}$;

„ „ „ *3* „ *n*: $\varphi_{3-n} = \dfrac{M_{3-n} \cdot u}{E \cdot J_{3-n}}$.

Allgemein bekommen wir also den Drehungswinkel zweier unendlich benachbarter Schnitte gegeneinander, indem wir das an dieser Stelle befindliche Biegungsmoment multiplizieren mit dem unendlich kleinen Abstand u der beiden Querschnitte und dividieren durch das Produkt aus Elastizitätsmodul mal Trägheitsmoment an der betreffenden Stelle.

2. Die Querschnitte haben eine endliche Entfernung x voneinander.

Um nun den Drehungswinkel der beiden Querschnitte *0* und n gegeneinander zu finden, verlängern wir die Linie $n—n'$ bis zum Punkte $0, n$ (Fig. 148d). Dann ist zunächst $\sphericalangle \varphi_{3-n} = \sphericalangle \alpha$. Hiermit ergibt sich

$$\begin{aligned} \sphericalangle \beta &= \sphericalangle \alpha + \sphericalangle \varphi_{2-3} \\ &= \sphericalangle \varphi_{3-n} + \sphericalangle \varphi_{2-3} \end{aligned}$$

(da der Außenwinkel am Dreieck gleich der Summe der beiden ihm gegenüberliegenden Dreieckswinkel ist). Weiterhin finden wir

$$\begin{aligned} \sphericalangle \gamma &= \sphericalangle \beta + \sphericalangle \varphi_{1-2} \\ &= \sphericalangle \varphi_{3-n} + \sphericalangle \varphi_{2-3} + \sphericalangle \varphi_{1-2}, \end{aligned}$$

und schließlich

$$\sphericalangle \varphi_{0-n} = \sphericalangle \gamma + \varphi_{0-1},$$

$$\sphericalangle \varphi_{0-n} = \sphericalangle \varphi_{3-n} + \sphericalangle \varphi_{2-3} + \sphericalangle \varphi_{1-2} + \sphericalangle \varphi_{0-1}.$$

Digitized by Google

Der Winkel φ_{0-n} ist derjenige, den die beiden Querschnitte *0* und *n* nach der Durchbiegung einschließen; er ist also der Drehungswinkel von *0* gegen *n*. Setzen wir nun für $\sphericalangle\varphi_{0-1}$ usw. die vorhin bestimmten Werte ein, so wird

$$\sphericalangle\varphi_{0-n} = \frac{M_{0-1}\cdot u}{E\cdot J_{0-1}} + \frac{M_{1-2}\cdot u}{E\cdot J_{1-2}} + \frac{M_{2-3}\cdot u}{E\cdot J_{2-3}} + \frac{M_{3-n}\cdot u}{E\cdot J_{3-n}}.$$

Für den fast stets vorliegenden Fall, daß das Material des Stabes und also auch sein Elastizitätsmodul sich innerhalb der Strecke x nicht verändern, ziehen wir E vor die Klammer und erhalten

$$\text{(I)} \qquad \sphericalangle\varphi_{0-n} = \frac{1}{E}\left(\frac{M_{0-1}\cdot u}{J_{0-1}} + \frac{M_{1-2}\cdot u}{J_{1-2}} + \ldots\right).$$

Die Anzahl der in der Klammer enthaltenen Glieder ist unendlich groß, da die Entfernung u der einzelnen Querschnitte voneinander unendlich klein genommen werden mußte, und wir also eine unendlich große Anzahl von Teilen erhalten haben.

Die Ermittelung dieser Summe

$$\frac{M_{0-1}\cdot u}{J_{0-1}} + \frac{M_{1-2}\cdot u}{J_{1-2}} + \ldots$$

ist eine Aufgabe der Integralrechnung. Wir können sie aber mit Hilfe einiger geometrischen Betrachtungen auch auf elementare Weise finden. Denken wir uns nämlich die Ordinaten M_{0-1}, M_{1-2} usw. der Momentenfläche Fig. 148a durch die an den betreffenden Stellen vorhandenen Trägheitsmomente J_{0-1}, J_{1-2} usw. dividiert, die auf diese Weise gefundenen Werte durch Strecken dargestellt und deren Endpunkte miteinander verbunden (Fig. 148b), so erhalten wir eine neue Fläche, die wir die *„verzerrte Momentenfläche“* nennen wollen. Der erste Streifen dieser Fläche (in Fig. 148b rechtssteigend schraffiert) hat also die Höhe $\frac{M_{0-1}}{J_{0-1}}$. Sein Flächeninhalt ergibt sich zu $\frac{M_{0-1}}{J_{0-1}}\cdot u$, da wir ihn als ein unendlich schmales Trapez ansehen können. Der Inhalt des zweiten Streifens ist entsprechend $\frac{M_{1-2}}{J_{1-2}}\cdot u$, und der Inhalt der gesamten verzerrten Momentenfläche ist somit

$$\mathfrak{F}' = \frac{M_{0-1}\cdot u}{J_{0-1}} + \frac{M_{1-2}\cdot u}{J_{1-2}} + \ldots,$$

Digitized by Google

er ist also eine graphische Darstellung der in der obigen Klammer enthaltenen Summe. Setzen wir diesen Wert in Gleichung (I) ein, so erhalten wir

$$\text{(II)} \qquad \sphericalangle \varphi_{0-n} = \frac{\mathfrak{F}'}{E};$$

d. h. *der Drehungswinkel zweier Querschnitte gegeneinander ist gleich der zwischen diesen Querschnitten liegenden verzerrten Momentenfläche, dividiert durch den Elastizitätsmodul des Stabes.*

Die verzerrte Momentenfläche $\mathfrak{F}'$ ist immer sehr leicht zu finden. Für den besonders häufig vorkommenden Fall, daß der Träger konstantes Trägheitsmoment hat, daß also $J_{0-1} = J_{1-2} = \ldots$ gleich einem bestimmten Werte J ist, ist $\mathfrak{F}'$ nichts anderes als die im $\frac{1}{J}$-fachen Maßstabe aufgetragene Momentenfläche $\mathfrak{F}$ von Fig. 148a. (Jede der Ordinaten M_{0-1}, M_{1-2} usw. ist um das $\frac{1}{J}$-fache verkleinert.) In diesem Falle brauchen wir die Fläche $\mathfrak{F}'$ gar nicht zu zeichnen, sondern nehmen den Inhalt der Fläche $\mathfrak{F}$ und dividieren diesen durch J. In dem anderen, sehr oft vorkommenden Fall, daß das Trägheitsmoment auf eine Strecke x_0 einen bestimmten Wert J^0, dann eine Strecke x_1 hindurch einen Wert J^{I}, dann J^{II} usw. hat (Träger mit Lamellen), finden wir die verzerrte Momentenfläche $\mathfrak{F}'$, indem wir das erste, x_0 lange Stück der Momentenfläche $\mathfrak{F}$ im $\frac{1}{J^0}$-fachen Maßstabe, das nächste Stück im $\frac{1}{J^{I}}$-fachen Maßstabe aufzeichnen, usw. Für den allgemeinen Fall, daß das Trägheitsmoment sich von Punkt zu Punkt ändert (Konsole, Kranausleger usw.), nehmen wir entweder ein mittleres Trägheitsmoment an, oder wir teilen die Momentenfläche $\mathfrak{F}$ in eine Anzahl Teile und dividieren die Höhe eines jeden Teiles durch das an dieser Stelle befindliche Trägheitsmoment.

§ 82a.

Beispiele zu § 82.

Erste Aufgabe.

Ein Träger I N.-P. 30 von $l = 800$ cm Länge trage eine gleichmäßig verteilte Last von $P = 6500$ kg. Der Drehungswinkel des ersten und des letzten Querschnittes gegeneinander soll bestimmt werden!

Digitized by Google

In Fig. 149a ist dieser Träger in seiner ursprünglichen, geraden Gestalt, und in Fig. 149b im durchgebogenen Zustande gezeichnet. Wir sollen nun den Winkel φ_{0-n} bestimmen, den die Querschnitte 0 und n miteinander einschließen. Zu seiner Berechnung brauchen wir die verzerrte Momentenfläche. Die normale Momentenfläche ist in Fig. 149c dargestellt. Sie ist für gleichmäßig verteilte Belastung bekanntlich eine Parabel mit der Pfeilhöhe $\frac{1}{8}Pl$. Aus der Mathematik ist bekannt (§ 55), daß der Inhalt eines Parabelabschnittes gleich $^2/_3$ von dem Inhalt des umschriebenen Rechteckes ist. Wir bekommen also als Inhalt der normalen Momentenfläche

$$\mathfrak{F} = \frac{2}{3} l \cdot \frac{Pl}{8} = \frac{1}{12} Pl^2.$$

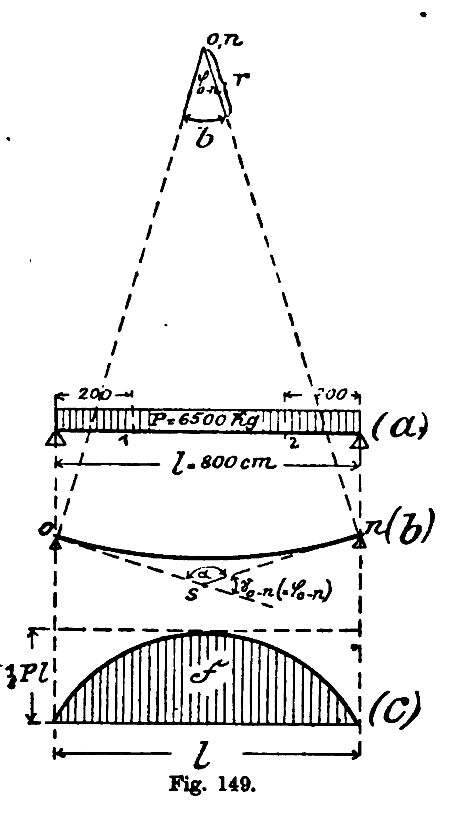


Fig. 149.

Nun müssen wir jede Ordinate dieser Momentenfläche dividieren durch das an der betreffenden Stelle vorhandene Trägheitsmoment, um die verzerrte Momentenfläche zu erhalten. Im vorliegenden Falle ist aber das Trägheitsmoment für alle Stellen dasselbe, da es sich um einen Walzträger handelt; und zwar ist nach den Tabellen $J = 9785$ cm^4. Wir bekommen also den Inhalt der verzerrten Momentenfläche

$$\mathfrak{F}' = \frac{\mathfrak{F}}{J} = \frac{1}{12} \frac{Pl^2}{J}.$$

Hiermit ergibt sich (bei einem Elastizitätsmodul $E = 2150000$ kg/qcm) der Drehungswinkel

$$\varphi_{0-n} = \frac{\mathfrak{F}'}{E} = \frac{1}{12} \frac{Pl^2}{EJ}$$

$$= \frac{1}{12} \frac{6500 \text{ kg} \cdot (800 \text{ cm})^2}{2150000 \text{ kg/cm}^2 \cdot 9785 \text{ cm}^4},$$

Digitized by Google

$$\varphi_{0-n} = \frac{1}{12} \frac{6500 \text{ kg} \cdot 640000 \text{ cm}^2}{2150000 \text{ kg/cm}^2 \cdot 9785 \text{ cm}^4},$$

$$\varphi_{0-n} = 0{,}0165.$$

Dieses ist also die, im *Bogenmaß* gemessene, Größe des Winkels φ_{0-n}. Mit anderen Worten: Wenn wir um den Punkt $0, n$ mit einem beliebigen Radius r den Kreis schlagen, so ergibt die Länge des Bogens b dividiert durch die Länge des Radius r die Zahl 0,0165; es ist also $b = 0{,}0165 \cdot r$. Nehmen wir r gerade gleich 1,0 cm, so wird der Bogen b gleich 0,0165 cm. Man sieht, daß die wirklich zustande kommende Drehung der Querschnitte natürlich bedeutend kleiner ist, als in Fig. 149b der Deutlichkeit wegen gezeichnet wurde. Zur Übung wollen wir dieses Bogenmaß auch noch in Gradmaß umrechnen. Wir erhalten dann die Anzahl x der Grade aus der Gleichung

$$x : 360° = 0{,}0165\, r : 2 r \pi,$$

$$x = \frac{0{,}0165 \cdot 360}{2\pi} = \sim 1°.$$

Dieses ist also die im *Gradmaß* gemessene Größe des Winkels φ_{0-n}.

Zweite Aufgabe.

Der Winkel, unter dem sich zwei Stabelemente im durchgebogenen Zustande schneiden, ist zu bestimmen!

An Fig. 149b wollen wir noch folgende Betrachtung knüpfen. Wenn wir das erste und das letzte Stück der Stabachse geradlinig verlängern bis zu ihrem Schnittpunkte s, so entsteht ein Viereck s—0—(o, n)—n, mit den beiden rechten Winkeln bei 0 und bei n. Daraus folgt, daß in diesem Viereck $\sphericalangle \alpha + \sphericalangle \varphi_{0-n} = 2R$ ist. Andererseits ist aber auch der Winkel γ_{0-n} in Fig. 149b mit dem Winkel α zusammen gleich $2R$. Mithin ist:

$$\sphericalangle \gamma_{0-n} = \sphericalangle \varphi_{0-n}.$$

Der Winkel γ_{0-n}, unter dem sich zwei Stabelemente resp. deren Verlängerungen schneiden, ist also ebenso groß wie der Drehungswinkel φ_{0-n} der beiden senkrecht zu diesen Stabelementen stehenden Querschnitte.

Zusatz. In Fig. 148 und 149 sind *positive* Momente angenommen (oben Druck, unten Zug). Dann krümmt sich der Balken nach unten. Bei *negativen* Momenten (oben Zug, unten Druck) wölbt er sich nach oben. Man merke sich den anschaulichen Zusammenhang:

Positives Moment: Krümmung der betreffenden Stelle ⌣,
Negatives „ : „ „ „ „ ⌢.

Digitized by Google

§ 83.

Die Abschnitte der einzelnen Stabelemente auf einer rechtwinklig zum Stabe gezogenen Geraden.

In Fig. 150b stelle $\overline{ab}$ einen Teil eines Balkens dar, der irgendwie belastet und irgendwie gestützt ist. $\mathfrak{F}'$ (Fig. 150a) sei die zu dieser Belastung und Stützung gehörige verzerrte Momentenfläche (d. h. wir haben für jede Stelle des Balkens das Moment M ausgerechnet, dieses Moment durch das an der betreffenden Stelle vorhandene Trägheitsmoment dividiert und dann aufgetragen). Nun denke ich mir die Stabachse in die Stücke 0, 1, $2 \ldots n$ zerlegt. Im durchgebogenen Zustande (Fig. 150c) schließen diese Stabelemente die Winkel γ_{0-1}, γ_{1-2} usw. miteinander ein. Am Schlusse des vorigen Paragraphen haben wir gesehen, daß diese Winkel ebenso groß sind wie die entsprechenden Drehungswinkel φ. Es ist also z. B. der Winkel γ_{1-2} (zwischen den beiden Stabelementen 1 und 2, gleich dem Winkel φ_{1-2}, den die zu diesen Stabelementen gehörigen Querschnitte (1) und (2) miteinander bilden. Da nun dieser Winkel gleich ist dem zwischen den Querschnitten (1) und (2) liegenden Teile $\mathfrak{f}_2'$ der verzerrten Momentenfläche, dividiert durch den Elastizitätsmodul E, so folgt, daß auch γ_{1-2} gleich $\mathfrak{f}_2' : E$ ist. Wir finden also irgendeinen Winkel γ von Fig. 150c, indem wir die Mitten der beiden zu diesem Winkel gehörigen Stabelemente hinaufloten und den hierdurch bestimmten Streifen der Fläche $\mathfrak{F}'$ durch den Elastizitätsmodul E dividieren. In Wirklichkeit müssen natürlich die Stabelemente unendlich klein genommen werden; denn der Stab besteht im durchgebogenen Zustande nicht aus einzelnen Knicken, sondern bildet eine kontinuierlich durchlaufende Linie. Der erste Winkel γ liegt also unmittelbar am Auflager; der zu ihm gehörige Streifen der Fläche $\mathfrak{F}'$ fängt mithin bei a an. Daran reiht sich dann der nächste, unendlich schmale Streifen, durch den der nächste Winkel γ bestimmt ist; usw.

Nun wollen wir an beliebiger Stelle eine Linie L—L senkrecht zu der Linie $\overline{a'b'}$ ziehen und alle Stabelemente bis zu dieser Linie verlängern. Das Stück, das auf L—L durch die Verlängerungen $1'$ und $2'$ zweier beliebiger Stabelemente, z. B. 1 und 2, abgeschnitten wird, nenne ich z_{1-2} (Fig. 150c). Die Berechnung von z_{1-2} wird nun dadurch vereinfacht, daß der Unterschied zwischen der ursprünglichen und der durchgebogenen Gestalt des

Digitized by Google

Balkens sehr gering ist. Das Dreieck $1'—2'—z_{1-2}$ sieht in Wirklichkeit nicht so aus, wie es in Fig. 150c der Deutlichkeit wegen gezeichnet wurde, sondern ungefähr so, wie Fig. 150d zeigt. Die Linie $L—L$, die zu der Linie $\overline{a'b'}$ senkrecht gezogen wurde, kann also auch als zu der Linie $1'$ oder $2'$ senkrecht stehend angenommen werden. Da nun ferner ein unendlich kleiner Kreisbogen stets als eine *gerade, zum Radius senkrecht stehende* Linie betrachtet werden darf, und umgekehrt, so können wir das Stück z_{1-2} als einen unendlich kleinen Kreisbogen auffassen, der senkrecht zu seinen beiden Radien $1'$ und $2'$ steht und in O

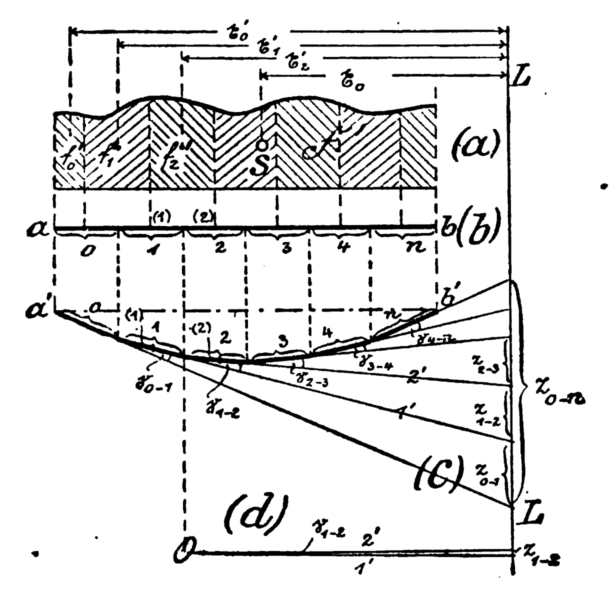


Fig. 150.

seinen Mittelpunkt hat. Als Radius nehmen wir $1'$ oder $2'$; beide Entfernungen unterscheiden sich ja nur um eine unendlich kleine Strecke. Der Zentriwinkel dieses Kreisbogens ist γ_{1-2}. Die Länge z_{1-2} erscheint also in der einfachen Form:

$$\text{Bogen } z_{1-2} = \text{Radius } 1' \times \text{Zentriwinkel } \gamma_{1-2},$$

wobei der Winkel im Bogenmaß einzusetzen ist. Von diesem Kunstgriff, eine Gerade durch einen Kreisbogen zu ersetzen, macht man vielfach Gebrauch, wenn es sich um die Berechnung einer Strecke handelt, die senkrecht zu einer anderen steht und im Verhältnis zu dieser verschwindend klein ist. Die Rechnung wird hierdurch bedeutend einfacher und der Fehler ist ver-

Digitized by Google

schwindend klein. Für den Winkel γ_{1-2} haben wir nach dem Früheren die Formel

$$\sphericalangle \gamma_{1-2} = \frac{\mathfrak{f}'_2}{E},$$

worin $\mathfrak{f}'_2$ den über *1*, *2* liegenden Streifen der verzerrten Momentenfläche bedeutet. Der Radius *1'* kann nach Fig. 150c und a noch durch den Schwerpunktsabstand $\mathfrak{x}'_2$ des Flächenstreifens $\mathfrak{f}'_2$ von der Linie *L—L* ersetzt werden. Insgesamt erhalten wir für z_{1-2} den Ausdruck:

$$z_{1-2} = \frac{1}{E} \mathfrak{f}'_2 \cdot \mathfrak{x}'_2 ;$$

d. h.: Das Stück z_{1-2}, das durch die Verlängerungen zweier Stabelemente *1* und *2* auf der Geraden *L—L* abgeschnitten wird, ist gleich dem zu *1*, *2* gehörigen Streifen $\mathfrak{f}'_2$ der verzerrten Momentenfläche mal dem Abstande $\mathfrak{x}'_2$ bis zur Geraden, und dividiert durch E.

In entsprechender Weise lassen sich die anderen Abschnitte z_{0-1}, z_{2-3} usw. finden. Immer ist hierbei zu beachten, daß die Stabelemente, resp. deren Verlängerungen nahezu horizontal verlaufen, und daß also die Abschnitte z als senkrecht zu den Stabelementen stehende kleine Kreisbögen aufgefaßt werden dürfen. Für den Gesamtabschnitt z_{0-n}, zwischen dem ersten und dem letzten Stabelement, bekommen wir somit:

$$z_{0-n} = \frac{1}{E} (\mathfrak{f}'_0 \cdot \mathfrak{x}'_0 + \mathfrak{f}'_1 \cdot \mathfrak{x}'_1 + \mathfrak{f}'_2 \cdot \mathfrak{x}'_2 + \cdots) .$$

Statt nun aber jeden einzelnen Flächenstreifen mit seinem Schwerpunktsabstand zu multiplizieren, werden wir zweckmäßig die gesamte Fläche $\mathfrak{F}'$ mit ihrem Schwerpunktsabstand $\mathfrak{x}_0$ nehmen. Denn nach der Lehre vom Schwerpunkt einer Fläche ist dieser Punkt ja gerade dadurch ausgezeichnet, daß das Produkt aus Gesamtfläche mal Schwerpunktsabstand gleich ist der Summe der Produkte aus den einzelnen Flächenstreifen mal ihren zugehörigen Schwerpunktsabständen. Somit erhalten wir das Schlußresultat

$$z_{0-n} = \frac{1}{E} \cdot \mathfrak{F}' \cdot \mathfrak{x}_0 ;$$

d. h. Die Strecke z_{0-n}, die durch das erste und durch das letzte Element eines Balkenteiles $\overline{a'b'}$ auf einer senkrecht zu $\overline{a'b'}$ gezogenen Geraden L—L abgeschnitten wird, ist gleich dem Inhalte $\mathfrak{F}'$ der zu $\overline{a'b'}$ gehörigen verzerrten Momentenfläche, multipliziert mit

Digitized by Google

deren Schwerpunktsabstand $\mathfrak{x}_0$ von der Geraden L—L und dividiert durch den Elastizitätsmodul E.

Es möge bemerkt werden, daß im allgemeinen die Verbindungslinie $\overline{a'b'}$ nicht parallel sein wird der ursprünglichen Stabachse $\overline{ab}$. Denn da der Balkenteil $\overline{ab}$ ein Stück einer größeren, zusammenhängenden Konstruktion darstellen soll, so wird dieses Stück durch die Formänderung der angrenzenden Teile natürlich auch eine Verschiebung und Drehung erfahren. Hierzu kommt dann seine eigene Formänderung. Da es sich aber bei unseren Konstruktionen immer um verschwindend kleine Formänderungen handelt, so braucht man die Abweichung der Geraden $\overline{a'b'}$ von der ursprünglichen Geraden $\overline{ab}$ nicht zu berücksichtigen. Man kann also die Linie L—L senkrecht zu der *ursprünglichen* Stabachse $\overline{ab}$ ziehen.

§ 83a.

Beispiel zu § 83.

Ein Träger I N.-P. 30 von $l = 800$ cm (Fig. 151a) trage eine Last von $P = 4000$ kg. Welche Strecke z_{0-n} schneiden die Verlängerungen des ersten und des letzten Trägerelementes auf einer im Abstande von 100 cm seitlich von B gezogenen Geraden L—L ab?

Die einfache Momentenfläche ist in Fig. 151b gezeichnet.

$$\mathfrak{F} = \frac{1}{2} l \cdot \frac{P a b}{l} = \frac{1}{2} P a b \,.$$

Die verzerrte Momentenfläche ergibt sich hieraus durch Division mit dem konstanten Trägheitsmoment $J = 9785$ cm^4, also

$$\mathfrak{F}' = \frac{1}{2} \frac{P a b}{J} \,.$$

Nun müssen wir das statische Moment dieser Fläche in bezug auf die Linie L—L bilden. Wenn man irgendein Dreieck ABC hat, dessen Eckpunkte die Abstände x_1, x_2 und x_3 von einer Geraden L—L haben, so ist der Abstand des Schwerpunktes von der betreffenden Geraden gleich $\frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3)$. In Fig. 151b wird also

$$\mathfrak{x}_0 = \frac{1}{3}(900 + 300 + 100) = 433{,}3 \text{ cm.}$$

Digitized by Google

Das Produkt aus $\mathfrak{F}' \cdot \mathfrak{x}_0$:

$$\mathfrak{F}' \cdot \mathfrak{x}_0 = \frac{1}{2}\,\frac{4000\ \text{kg} \cdot 200\ \text{cm} \cdot 600\ \text{cm}}{9785\ \text{cm}^4} \cdot 433{,}3\ \text{cm}$$

$$= 10600000\ \frac{\text{kg}}{\text{cm}}.$$

Hiermit ergibt sich die Strecke z_{0-n}:

$$z_{0-n} = \frac{1}{E}\,\mathfrak{F}' \cdot \mathfrak{x}_0 = \frac{10600000\ \dfrac{\text{kg}}{\text{cm}}}{2150000\ \dfrac{\text{kg}}{\text{cm}^2}}$$

$$= 4{,}9\ \text{cm}.$$

Diese Strecke würde, wenn man sie in Fig. 151c maßstäblich einzeichnen wollte, in einer Länge von $^1/_4$ mm erscheinen. Daraus erkennt man, daß die Stabelemente auch in ihrer durchgebogenen Lage als vertikal zu der Linie $L—L$ stehend angenommen werden können, so daß die Strecke z_{0-n} als ein unendlich kleiner Kreisbogen erscheint.

Wenn wir in Fig. 151c die Linie $L—L$ durch den Schwerpunkt S der Momentenfläche angenommen hätten, so würde der Abstand $\mathfrak{x}_0$ gleich Null einzusetzen sein. Folglich wird für diese Linie der Abschnitt

$$z_{0-n} = \frac{1}{E}\,\mathfrak{F}' \cdot 0 = 0\,.$$

Dieses bedeutet: Die Verlängerungen des ersten und des letzten Stabelementes treffen auf der durch den Schwerpunkt S der verzerrten Momentenfläche gezogenen Vertikalen zusammen.

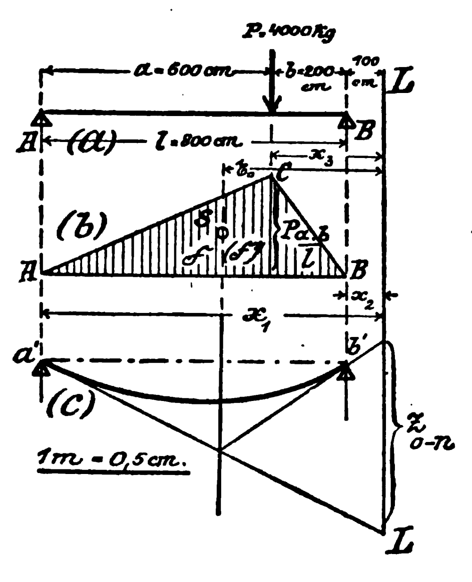


Fig. 151.

Wenn man bei irgendeiner Kurve ein Element derselben geradlinig verlängert, so nennt man diese Gerade bekanntlich die an die Kurve in dem betreffenden Punkte gelegte *Tangente*. Nach dieser Ausdrucksweise bezeichnet man die Strecke z_{0-n} als diejenige Länge, die von den an die Punkte *0* und *n* der Stabachse gelegten Tangenten auf der Geraden $L—L$ abgeschnitten wird.

Digitized by Google

§ 84.

Durchbiegungen und Ausschlagwinkel des Freiträgers.

Der in Fig. 152a gezeichnete *einseitig eingespannte* Träger sei durch eine beliebige Belastung beansprucht. Es soll die Gestalt bestimmt werden, die der Träger infolge der Belastung annimmt (Fig. 152b).

Die Form, die ein Stab im durchgebogenen Zustande hat, nennen wir seine „*elastische Linie*". Diese ist vollständig bestimmt, sobald wir von jedem Punkte des Stabes angeben, um wieviel er sich in vertikaler und in horizontaler Richtung verschiebt. Im vorliegenden Falle kommen aber merkbare Horizontalverschiebungen überhaupt nicht vor. Die Stabachse (d. i. die neutrale Faserschicht) behält ja bei der Durchbiegung ihre ursprüngliche Länge bei. Allerdings nimmt sie die Gestalt einer Kurve an, so daß hierdurch außer der vertikalen auch eine seitliche Verschiebung eintreten könnte. Da aber die elastische Linie stets eine sehr flache Kurve ist, so sind diese horizontalen Abweichungen verschwindend klein. Man wird dieses am besten einsehen, wenn man versucht, in einer Zeichnung die Durchbiegungen maßstäblich einzutragen. Wenn man dann den Maßstab auch so groß wählt, daß die Durchbiegungen selber zu erkennen sind, so wird es doch nicht gelingen, eine horizontale Verschiebung nachzuweisen. Mathematisch kommt dieses dadurch zum Ausdruck, daß in einem rechtwinkligen Dreieck mit einer sehr kleinen Kathete die andere Kathete sich nur um einen verschwindend kleinen Betrag von der Hypotenuse unterscheidet. Bei der Genauigkeit, mit der wir unsere technischen Berechnungen überhaupt durchführen können, fallen also die Horizontalverschiebungen gänzlich außer Betracht.

Um nun die Verschiebungen in vertikaler Richtung zu bestimmen, zeichnen wir zunächst die zu der Belastung gehörige verzerrte Momentenfläche $\mathfrak{F}'$ (Fig. 152a). Dann denken wir uns den Stab wieder in einzelne Stabelemente zerlegt. Das erste Element, 0 in Fig. 152a und b, erfährt infolge der festen Einmauerung weder eine Verschiebung noch eine Drehung. Um nun die Verschiebung eines anderen Punktes, z. B. c, zu finden, ziehe ich durch c' eine vertikale Linie $L—L$. Dann zeigt Fig. 152b, daß die Senkung δ des Punktes c identisch ist mit der Strecke z_{0-m}, die die Elemente 0 und m auf der Geraden $L—L$ abschneiden. Dieses kommt eben daher, weil das Element 0 seine ursprüngliche horizontale Lage beibehält. Die Strecke z_{0-m} können wir

Digitized by Google

aber nach dem Früheren bestimmen: Wir berechnen den Inhalt $\mathfrak{F}'_{0-m}$ des zwischen *0* und *m* liegenden Teiles der verzerrten Momentenfläche, bestimmen seinen Schwerpunktsabstand $\mathfrak{x}$ von der Linie *L—L* und erhalten

$$\delta = z_{0-m} = \frac{1}{E}\,\mathfrak{F}'_{0-m}\cdot\mathfrak{x}\,.$$

Hiermit ist die Durchbiegung an der Stelle *m* gefunden. Für den äußersten Punkt ergibt sich entsprechend:

$$f = \frac{1}{E}\,\mathfrak{F}'\cdot\mathfrak{x}_0\,.$$

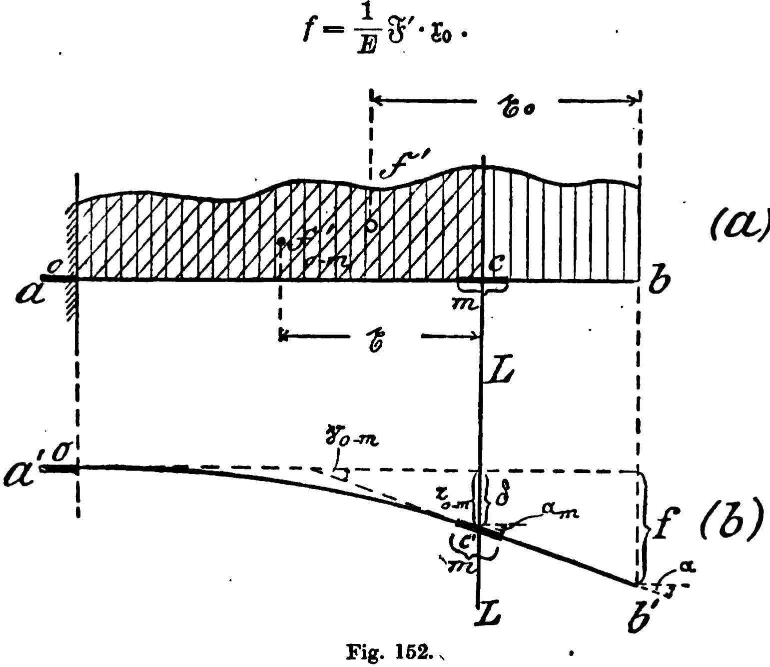


Fig. 152.

Eigentlich müßten wir die Geraden *L—L* senkrecht zu den Verbindungslinien $\overline{a'c'}$ und $\overline{a'b'}$ ziehen. Wie aber bereits im vorigen Paragraphen erläutert wurde, kann dadurch, daß wir *L—L* senkrecht zur ***ursprünglichen*** Stabachse nehmen, kein nachweisbarer Fehler in die Rechnung hineinkommen.

Außer der Durchbiegung wollen wir auch noch die „Ausschlagwinkel“ bestimmen. Mit diesem Ausdrucke bezeichnen wir die Winkel, die die einzelnen Stabelemente im durchgebogenen Zustande des Stabes mit ihrer ursprünglichen (horizontalen) Richtung bilden. Beim Element *0* ist dieser Winkel gleich Null, denn dieses Element bleibt ja fest eingespannt. Bei einem anderen Element, z. B. bei *m*, ergibt sich nach Fig. 152b, daß der Ausschlagwinkel α_m

Digitized by Google

gleich dem Winkel γ_{0-m} ist, den die beiden Elemente *0* und *m* miteinander bilden. Da nun der Winkel γ_{0-m} nach dem Früheren gleich dem zwischen *0* und *m* liegenden Teile $\mathfrak{F}'_{0-m}$ der verzerrten Momentenfläche, dividiert durch *E* ist, so ist also auch

$$\sphericalangle \alpha_m = \frac{1}{E} \cdot \mathfrak{F}'_{0-m} \, .$$

Für das äußerste Element ergibt sich:

$$\sphericalangle \alpha = \frac{1}{E} \cdot \mathfrak{F}' \, .$$

Durch die Angaben der Einsenkungen δ und der Ausschlagwinkel α können wir jede Frage hinsichtlich der Gestalt der elastischen Linien beantworten.

Zusammenfassung zur Berechnung der Formänderungen eines Freiträgers: Bei einem Freiträger ist der **Ausschlagwinkel** irgendeines Stabelementes gleich dem Inhalte der zwischen diesem Elemente und der Einspannstelle befindlichen verzerrten Momentenfläche, dividiert durch *E*. Die **Einsenkung** an irgendeinem Punkte ist gleich dem Inhalte der zwischen diesem Punkte und der Einspannstelle befindlichen verzerrten Momentenfläche, multipliziert mit dem Schwerpunktsabstand und dividiert durch *E*.

§ 84a.

Beispiele zu § 84.

I. Belastung durch Einzellast am Ende (Fig. 153).

Für eine Stelle *m* (Fig. 153a) ist das Moment $M = P \cdot x$; für den Einspannungsquerschnitt ist $M = P \cdot l$. Wenn wir also ein Dreieck mit der Höhe $P \cdot l$ zeichnen (Fig. 153b), so ergeben die Ordinaten dieses Dreiecks für jeden Punkt des Balkens das zugehörige Biegungsmoment; Fig. 153b ist demnach die einfache Momentenfläche. Aus ihr finden wir die verzerrte Momentenfläche, indem wir durch *J* dividieren. (*J* sei konstant.)

Der Inhalt eines Trapezes (Fig. 153c) ist bekanntlich $\frac{1}{2}(a + b)\,h$; die Schwerpunktsabstände sind $u = \frac{h}{3}\,\frac{2a+b}{a+b}$, $v = \frac{h}{3}\,\frac{a+2b}{a+b}$. Somit wird für die Stelle *m*:

I. Ausschlagwinkel

$$\text{(I)} \quad \alpha_m = \frac{1}{E} \cdot \frac{\frac{1}{2}(Pl + Px)(l - x)}{J} = \frac{P(l+x)(l-x)}{2EJ} = \frac{P(l^2 - x^2)}{2EJ} \, .$$

Digitized by Google

II. Einsenkung

$$\delta_m = \frac{1}{E} \cdot \frac{\frac{1}{2}(Pl + Px)(l - x) \cdot \mathfrak{x}}{J} = \frac{P(l + x)(l - x) \cdot \frac{l - x}{3} \cdot \frac{2Pl + Px}{Pl + Px}}{2EJ}$$

$$= \frac{P(l - x)^2 \cdot (2l + x)}{6EJ} = \frac{P(l^2 - 2lx + x^2)(2l + x)}{6EJ},$$

$$\text{(II)} \qquad \delta_m = \frac{P(2l^3 - 3l^2x + x^3)}{6EJ}.$$

Die Gleichung (II) ist besonders wichtig. Wenn wir die Einsenkung an irgendeiner Stelle des Balkens wissen wollen, so brauchen wir nur die Strecke x einzusetzen, die diese Stelle vom Ende ent-

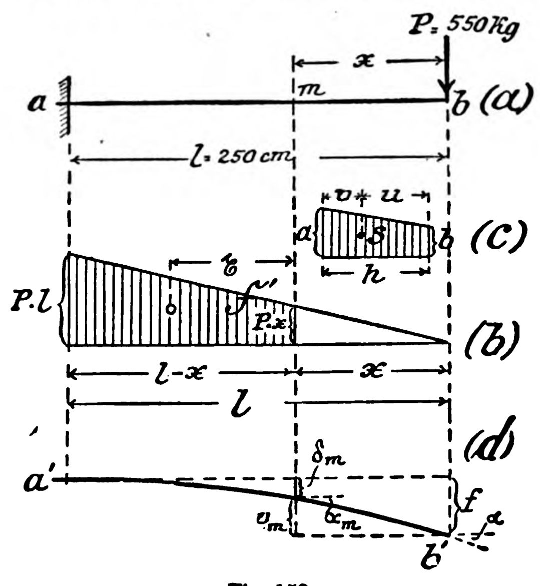


Fig. 153.

fernt ist, und können dann δ ausrechnen. Eine derartige Gleichung nennt man die „*Gleichung der elastischen Linie*“ für den betreffenden Stab. Für das Stabende selber ist $x = 0$ einzusetzen. Es ergeben sich somit für den äußersten Punkt:

$$\text{Ausschlagwinkel} \quad \alpha = \frac{Pl^2}{2EJ}, \qquad \text{Einsenkung} \quad f = \frac{Pl^3}{3EJ}.$$

Natürlich kann man diese Werte auch direkt ableiten:

$$\alpha = \frac{1}{E} \cdot \frac{\frac{1}{2} \cdot Pl \cdot l}{J} = \frac{Pl^2}{2EJ},$$

$$f = \frac{1}{E} \cdot \frac{\frac{1}{2} \cdot Pl \cdot l}{J} \cdot \frac{2}{3} l = \frac{Pl^3}{3EJ}.$$

Digitized by Google

In manchen Tabellen findet man nicht die Durchbiegungen δ, sondern die Abstände y (Fig. 153d) für die einzelnen Stabpunkte angegeben. Man kann natürlich die obige Formel (II) auch hierfür umrechnen. Denn es ist

$$\delta_m = f - y_m = \frac{P l^3}{3 E J} - y_m .$$

Die Gleichung (II) geht also über in:

$$\frac{P l^3}{3 E J} - y_m = \frac{P}{6 E J}(2 l^3 - 3 l^2 x + x^3),$$

$$y_m = \frac{P}{6 E J}[2 l^3 - (2 l^3 - 3 l^2 x + x^3)]$$

$$= \frac{P}{6 E J}(3 l^2 x - x^3) .$$

Diese Gleichung kann man auch in der Form schreiben (vgl. Hütte usw.):

$$\text{(IIa)} \qquad y_m = \frac{P l^3}{2 E J}\left(\frac{x}{l} - \frac{1}{3}\frac{x^3}{l^3}\right).$$

Hiernach sind die Abstände y etwas einfacher zu berechnen als nach Gleichung (II) die Einsenkungen δ. Grundsätzlich sollte man aber daran festhalten, unter „Durchbiegung" oder „Einsenkung" stets den Höhenunterschied zwischen der alten und der neuen Lage eines Punktes zu verstehen.

Zahlenbeispiel: Es sei $l = 250$ cm, $P = 550$ kg. Der Träger sei ein Holzbalken von 18×24 cm; $E = 100000$ kg/qcm.

Wie groß sind Ausschlagwinkel und Einsenkung am Ende?

$$\alpha = \frac{550 \text{ kg} \cdot (250 \text{ cm})^2}{2 \cdot 100000 \text{ kg/cm}^2 \cdot 20736 \text{ cm}^4} = 0{,}0083;$$

$$f = \frac{550 \text{ kg} \cdot (250 \text{ cm})^3}{3 \cdot 100000 \text{ kg/cm}^2 \cdot 20736 \text{ cm}^4} = 1{,}38 \text{ cm}.$$

Wenn also auf dem Ende dieses Balkens eine vertikale Säule von z. B. 300 cm Höhe stehen würde, so würde diese infolge der Durchbiegung um $300 \cdot 0{,}0083 = 2{,}5$ cm seitlich ausschlagen. Bei ruhender Last sind diese Formänderungen nicht bedenklich, da die Beanspruchung nicht zu hoch ist (80 kg/qcm). Bei wechselnder Belastung ist die Konstruktion aber zu unsicher, da infolge der großen Durchbiegungen sehr gefährliche Schwingungen eintreten würden.

Digitized by Google

II. Gleichmäßig verteilte Last g (Fig. 154a).

Gesucht sind Ausschlagwinkel und Durchbiegung am Ende (Fig. 154b). Das Trägheitsmoment sei J cm⁴. Zunächst müssen wir die gewöhnliche Momentenfläche bestimmen. Für eine Stelle, die vom Ende um x entfernt ist, ist das Moment

$$M = g \cdot x \cdot \frac{1}{2} x = \frac{g}{2} x^2 .$$

Für die Einspannstelle ist

$$M' = g\, l \cdot \frac{l}{2} = \frac{g}{2} l^2 .$$

Die beiden Momente M und M' verhalten sich demnach wie die Quadrate der Abstände x und l. Daraus folgt: Tragen wir die Momente an den einzelnen Stellen des Balkens auf, so ergibt sich eine Parabel (s. § 55, 1). Und es wird für Fig. 154c (vgl. § 55, Skizze IX):

$$\mathfrak{F} = \frac{1}{3} \cdot l \frac{g . l^2}{2} ; \quad \mathfrak{x}_0 = \frac{3}{4} l .$$

Mithin

$$\alpha = \frac{1}{E} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{g\, l^3}{2J} = \frac{g\, l^3}{6EJ} = \frac{G \cdot l^2}{6EJ} ,$$

$$f = \frac{1}{E} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{g\, l^3}{2J} \cdot \frac{3}{4} l = \frac{1}{8} \frac{g\, l^4}{EJ} = \frac{1}{8} \frac{G \cdot l^3}{EJ} .$$

III. Verschiedene Belastungsfälle.

Aufgabe 1. Ein Freiträger von l cm Länge ist in einem Abstande l_1 vom Auflager durch P belastet. Wie groß sind Ausschlagwinkel und Einsenkung am Ende? (Fig. 154d.)

Die elastische Linie (Fig. 154e) bildet von a' bis b' eine Kurve und geht von da ab als gerade Linie weiter. Denn, da auf der Strecke l_2 keine Momente wirken, so finden auf dieser Länge auch keine Beanspruchungen und folglich auch keine Verdrehungen der Stabquerschnitte gegeneinander statt. Man hat also $\sphericalangle \alpha = \sphericalangle \alpha' = \frac{1}{E} \mathfrak{F}'$. Die Einsenkung am Ende ist: $f = \frac{1}{E} \mathfrak{F}' \cdot \mathfrak{x}_0$. (Man setze selber Zahlenwerte ein!)

Aufgabe 2. Ein Freiträger von l Länge ist unter einem Winkel β gegen die Horizontale eingespannt und wird dann durch P belastet. Wie groß ist die Verschiebung des Endpunktes in vertikaler Richtung?

Digitized by Google

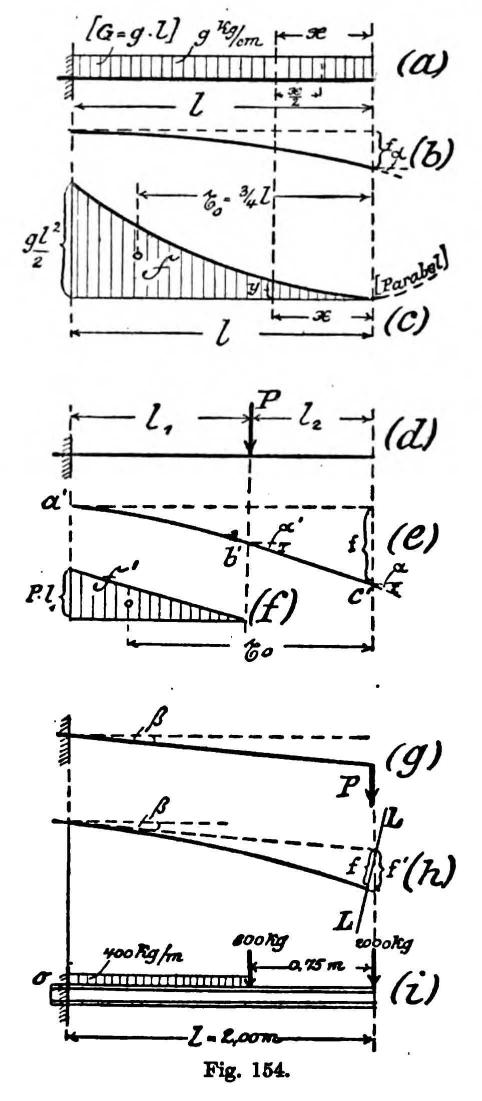


Fig. 154.

Man bestimme zunächst in gewöhnlicher Weise den Abschnitt f auf der zu der Stabachse senkrecht gezogenen Linie L—L. Dann ergibt sich $f' = f \cos\beta$. Da bei einem kleinen Winkel der Kosinus annähernd gleich 1 ist, so braucht eine geringe Abweichung von der Horizontalen überhaupt nicht berücksichtigt zu werden.

Im vorliegenden Falle wird der Balken außer auf Biegung auch noch auf Zug beansprucht (durch die Komponente $P \sin\beta$.) Die hierdurch hinzukommende Formänderung kann ebenfalls leicht berechnet werden, ist jedoch belanglos.

Aufgabe 3. Bei dem in Fig. 154i gezeichneten Freiträger aus Walzeisen (I N.-P.) sollen das Profil und die Durchbiegung am Ende bestimmt werden! Außerdem soll angenommen werden, daß infolge Nachgiebigkeit der Widerlager eine Drehung des Stabelementes *0* um $\beta = \frac{1}{4}°$ eintritt und der hierdurch hervorgerufene Zusatz zu der Einsenkung berechnet werden!

§ 85.

Ausschlagwinkel und Durchbiegungen des Trägers auf zwei Stützen.

Beim Freiträger wurde die Berechnung der Formänderungen dadurch vereinfacht, daß wir ein Stabelement hatten, dessen Drehung und Senkung wir ohne weiteres angeben konnten. Von

Digitized by Google

diesem Elemente aus war es dann einfach, die Formänderungen der anderen Elemente zu bestimmen.

Beim Träger auf zwei Stützen ist ebenfalls die Senkung des ersten Elementes bekannt, nämlich gleich Null. Dagegen ist nicht bekannt der Ausschlagwinkel dieses Elementes, da dieser nicht mehr gleich Null ist (Fig. 155b). Dafür ist jetzt aber auch die Senkung des letzten (rechten) Elementes bekannt (gleich Null).

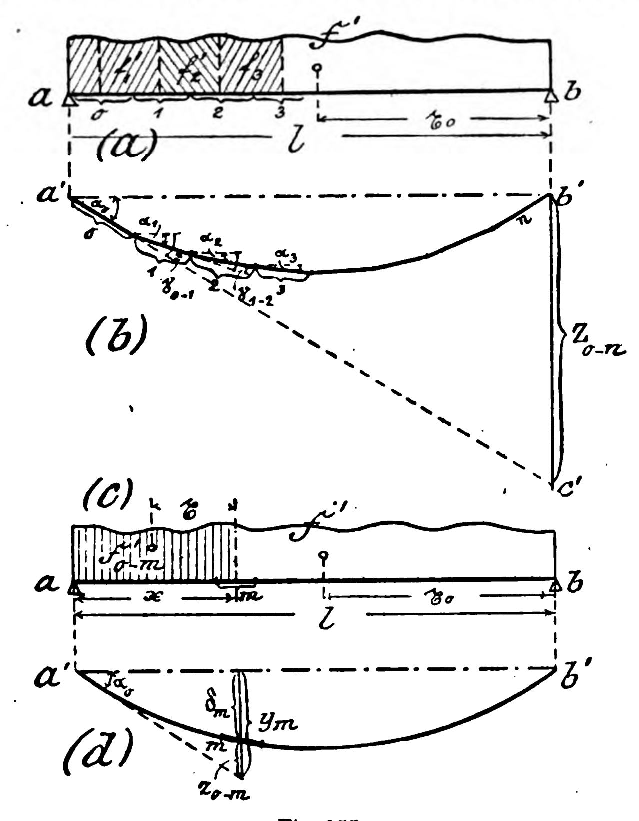


Fig. 155.

Wir haben also wieder zwei Angaben, von denen aus wir die anderen Formänderungen bestimmen können.

1. Um zunächst den **Ausschlagwinkel** α_0 des ersten Elementes zu finden, berechne ich die Strecke z_{0-n}, die die Verlängerung des Elementes *0* auf einer durch den Punkt b' vertikal zu $\overline{a'b'}$ gezogenen Geraden abschneidet. Diese Strecke ist nach dem Früheren:

$$z_{0-n} = \frac{1}{E} \cdot \mathfrak{F}' \cdot \mathfrak{x}_0 \, .$$

($\mathfrak{F}'$ = Inhalt der verzerrten Momentenfläche.) In dem Dreiecke $a'b'c'$ sind also zwei Seiten und der eingeschlossene (rechte) Winkel bekannt; wir können hieraus den noch unbekannten Winkel α_0 finden. Bei seiner Berechnung berücksichtigen wir natürlich den Umstand, daß z_{0-n} eine verschwindend kleine Strecke ist und demnach als Kreisbogen um a' mit dem Radius l aufgefaßt werden darf. Dann wird

$$\alpha_0 = \frac{z_{0-n}}{l} = \frac{1}{E} \cdot \frac{\mathfrak{F}' \cdot \mathfrak{x}_0}{l}.$$

Hiermit ist der erste Ausschlagwinkgl α_0 gefunden. Mit Hilfe dieses Winkels α_0 lassen sich die anderen leicht bestimmen. Nach Fig. 155b ist:

$$\alpha_1 = \alpha_0 - \gamma_{0-1},$$
$$\alpha_2 = \alpha_1 - \gamma_{1-2} = \alpha_0 - \gamma_{0-1} - \gamma_{1-2},$$
$$\alpha_3 = \alpha_2 - \gamma_{2-3} = \alpha_0 - \gamma_{0-1} - \gamma_{1-2} - \gamma_{2-3}; \text{ usw.}$$

Drücken wir noch in diesen Gleichungen die einzelnen Winkel γ durch die Inhalte der darüberliegenden Streifen der verzerrten Momentenfläche aus, so ergeben sich zur Berechnung der Ausschlagwinkel folgende Gleichungen:

$$\text{(I)} \quad \begin{cases} 1) \ \alpha_0 = \dfrac{1}{E} \dfrac{\mathfrak{F}' \cdot \mathfrak{x}_0}{l}, \\ 2) \ \alpha_1 = \dfrac{1}{E}\left(\dfrac{\mathfrak{F}' \cdot \mathfrak{x}_0}{l} - \mathfrak{f}_1'\right), \\ 3) \ \alpha_2 = \dfrac{1}{E}\left(\dfrac{\mathfrak{F}' \cdot \mathfrak{x}_0}{l} - (\mathfrak{f}_1' + \mathfrak{f}_2')\right), \\ 4) \ \alpha_3 = \dfrac{1}{E}\left(\dfrac{\mathfrak{F}' \cdot \mathfrak{x}_0}{l} - (\mathfrak{f}_1' + \mathfrak{f}_2' + \mathfrak{f}_3')\right); \quad \text{usw.} \end{cases}$$

(Man beachte, daß die Elemente unendlich klein sind, und daß also der erste Streifen unmittelbar am Auflager beginnt.) Allgemein erhält man den Ausschlagwinkel eines Stabelementes, indem man zunächst das Produkt $\frac{\mathfrak{F}' \cdot \mathfrak{x}_0}{l}$ bildet, hiervon den seitlich von dem Stabelement liegenden Teil der Fläche $\mathfrak{F}'$ subtrahiert und das Ganze durch E dividiert.

Diese Regel läßt sich nun in einer einfachen, sich leicht dem Gedächtnis einprägenden Form darstellen. Denken wir uns nämlich, die Fläche $\mathfrak{F}'$ sei nicht eine Momentenfläche, sondern eine Belastungsfläche. Sie stelle also z. B. eine Mauer dar, die

Digitized by Google

der Balken zu tragen hat. Wenn wir dann den Auflagerdruck A dieses Trägers berechnen sollten, so würden wir das Gewicht $\mathfrak{F}'$ mit dem Schwerpunktsabstand $\mathfrak{x}_0$ von B multiplizieren und durch die Spannweite l dividieren; also

$$A = \frac{\mathfrak{F}' \cdot \mathfrak{x}_0}{l}.$$

Wenn wir ferner für irgendeinen Querschnitt die Querkraft berechnen sollen, so erhalten wir

$$Q = +A - (\mathfrak{f}_1' + \mathfrak{f}_2' + \mathfrak{f}_3' + \ldots),$$

$$Q = \left[+\frac{\mathfrak{F}' \cdot \mathfrak{x}_0}{l} - (\mathfrak{f}_1' + \mathfrak{f}_2' + \mathfrak{f}_3' + \ldots)\right].$$

Vergleicht man diese Ausdrücke mit den zur Berechnung der Ausschlagwinkel aufgestellten Gleichungen, so ergibt sich: *Der Ausschlagwinkel α an irgendeiner Stelle des durchgebogenen Balkens ist gleich der durch E dividierten Querkraft eines gedachten Balkens, der die Fläche $\mathfrak{F}'$ als Belastungsfläche trägt.* Dieser Satz stimmt auch für das erste Stabelement, denn am Auflager ist ja die Querkraft eines Balkens gleich der Auflagerkraft.

2. Nun gehen wir zur Berechnung der **Durchbiegungen** selber über. Wenn wir in Fig. 155d das erste Element verlängern, so erscheint die Einsenkung δ_m irgendeines anderen Elementes m gleich der Differenz zweier Strecken, y_m und z_{0-m}. Diese beiden Strecken lassen sich aus dem Vorhergehenden berechnen. Die erste, y_m, ist gleich $\alpha_0 \cdot x$, worin x die Entfernung von m bis a ist. (Es handelt sich um eine verschwindend kleine Kathete.) Die zweite, z_{0-m}, ist bekanntlich gleich $\frac{1}{E} \cdot \mathfrak{F}_{0-m}' \cdot \mathfrak{x}$, worin $\mathfrak{F}_{0-m}'$ der Inhalt der verzerrten Momentenfläche zwischen a und m, und $\mathfrak{x}$ ihr Schwerpunktsabstand bis m sind. Somit ist die Einsenkung δ_m ausgedrückt durch:

$$\delta_m = \frac{1}{E} \frac{\mathfrak{F}' \cdot \mathfrak{x}_0}{l} \cdot x - \frac{1}{E} \cdot \mathfrak{F}_{0-m}' \cdot \mathfrak{x},$$

$$\text{(II)} \qquad \delta_m = \frac{1}{E}\left(\frac{\mathfrak{F}' \cdot \mathfrak{x}_0}{l} \cdot x - \mathfrak{F}_{0-m}' \cdot \mathfrak{x}\right).$$

Auch diese Formel läßt einen einfachen Vergleich zu: Denken wir uns auf den Balken die Momentenfläche $\mathfrak{F}'$ als Belastung aufgebracht und für die Stelle m das Biegungsmoment berechnet, so bekämen wir

$$\mathfrak{M} = \frac{\mathfrak{F}' \cdot \mathfrak{x}_0}{l} \cdot x - \mathfrak{F}_{0-m}' \cdot \mathfrak{x};$$

Digitized by Google

d. h., wir bekommen denselben Wert, durch den die Durchbiegung δ ausgedrückt ist. Wir können also die Berechnung der Durchbiegungen auf die einfachen, gewohnten Rechenmethoden zur Bestimmung von Biegungsmomenten zurückführen.

Zusammenfassung zur Berechnung der Formänderungen eines Trägers auf zwei Stützen: Wir bestimmen die verzerrte Momentenfläche $\mathfrak{F}'$ und denken uns einen Träger von der Spannweite l, der diese Fläche als Belastung trägt. Dann gilt für irgendeine Stelle m des wirklich vorhandenen Trägers: 1. Der **Ausschlagwinkel** α ist gleich der für die entsprechende Stelle des gedachten Trägers berechneten **Querkraft** $\mathfrak{Q}$, dividiert durch E; 2. die **Einsenkung** δ ist gleich dem für die betreffende Stelle des gedachten Trägers berechneten **Biegungsmoment** $\mathfrak{M}$, dividiert durch E.

§ 85a.

Beispiele zu § 85.

I. Gleichmäßig verteilte Last P (bei konstantem J).

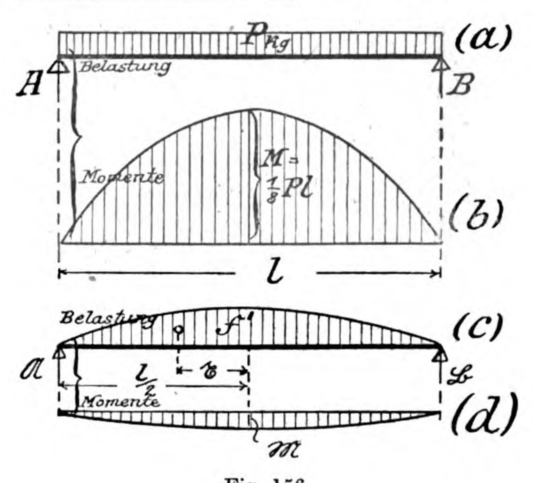


Fig. 156.

Die normale Momentenfläche hat den Inhalt

$$\mathfrak{F} = \frac{2}{3} \cdot l \cdot \frac{1}{8} P l \text{ cm} \cdot \text{cmkg} = \frac{1}{12} P l^2 \text{ kgcm}^2 .$$

Mithin beträgt der Inhalt der verzerrten Momentenfläche

$$\mathfrak{F}' = \frac{\mathfrak{F}}{J} \frac{\text{kg} \cdot \text{cm}^2}{\text{cm}^4} = \frac{1}{12} \frac{P l^2}{J} \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} .$$

Diese Fläche denken wir uns nun als Belastung auf einen Balken aufgebracht (Fig. 156 c) und berechnen dann dessen Biegungs-

Digitized by Google

moment in der Mitte. Dieses gibt nach Division mit E die gesuchte Durchbiegung an. Der Auflagerdruck ist:

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{B} = \frac{1}{24} \frac{Pl^2}{J} \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}.$$

Der Schwerpunktsabstand $\mathfrak{x}$ ist gleich $\frac{3}{8} \frac{l}{2} = \frac{3}{16} l$. Mithin

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{A}\left(\frac{l}{2} - \mathfrak{x}\right) = \frac{1}{24} \frac{Pl^2}{J} \cdot \frac{5}{16} l \frac{\text{kgcm}^2 \cdot \text{cm}}{\text{cm}^4} = \frac{5}{384} \frac{Pl^3}{J} \frac{\text{kg}}{\text{cm}}.$$

Hiermit ergibt sich die gesuchte Durchbiegung

$$f = \frac{1}{E} \cdot \frac{5}{384} \frac{Pl^3}{J} \frac{\text{cm}^2}{\text{kg}} \cdot \frac{\text{kg}}{\text{cm}}$$

$$f = \frac{5}{384} \frac{Pl^3}{EJ} \text{cm}.$$

II. Einzellast P in der Mitte.

$$M = \frac{Pl}{4}; \quad \mathfrak{F} = \frac{1}{2} l \cdot \frac{Pl}{4} = \frac{Pl^2}{8}; \quad \mathfrak{F}' = \frac{Pl^2}{8J}; \quad \mathfrak{M} = \frac{1}{2} \frac{Pl^3}{8J} \cdot \frac{l}{3} = \frac{Pl^3}{48J}$$

$$f = \frac{1}{48} \frac{Pl^3}{EJ}.$$

§ 86.

Weitere Beispiele. Graphische Methoden.

I. Anwendung eines graphischen Verfahrens.

Eine Stahlfeder von $l = 12{,}00$ cm Länge ist nach Fig. 157 belastet. Die Durchbiegungen an den einzelnen Stellen sollen bestimmt werden! Abmessungen der Feder: $h = 0{,}1$ cm, $b = 10{,}0$ cm, mithin $J = \frac{1}{12} \cdot 10 \cdot 0{,}1^3 = \frac{1}{1200}$ cm^4.

Die normale Momentenfläche wurde in Fig. 157c gezeichnet. Aus ihr ergibt sich die verzerrte Momentenfläche durch Division mit J. Die hierdurch entstandenen Werte sind in Fig. 157d eingeschrieben. Die Benennungen der Ordinaten dieser Fläche sind: $\frac{\text{cmkg}}{\text{cm}^4} = \frac{\text{kg}}{\text{cm}^3}$. Nun sollen wir uns also einen Balken denken, der diese Fläche als Belastung trägt, und dessen Momente bestimmen. Um diese genau zu erhalten, müßte man die Fläche (Fig. 157d) in eine möglichst große Anzahl von Streifen zerlegen,

Digitized by Google

damit man dann jeden Streifen als eine kleine Einzellast in die Rechnung einführen kann. Wir wollen uns jedoch mit den vier, in Fig. 157d angedeuteten Streifen begnügen. Die Werte der Streifen sind:

$$w_1' = \frac{1}{2} \cdot 2{,}5\ \mathrm{cm} \cdot 42000 \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{cm}^3} = 52500 \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{cm}^2},$$

$$w_2' = \frac{1}{2} \cdot 3{,}5\ \mathrm{cm} \cdot (42000 + 67200) \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{cm}^3} = 191100 \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{cm}^2},$$

$$w_3' = w_2'\,; \quad w_4' = w_1'\,.$$

Diese Lasten sollen also auf den gedachten Balken aufgebracht werden. Dann ergeben dessen Momente $\mathfrak{M}$, dividiert durch E, für jede Stelle die Durchbiegung des wirklich vorhandenen Balkens:

$$\delta = \frac{\mathfrak{M}}{E}\,.$$

Die Momente $\mathfrak{M}$ wurden nun nicht rechnerisch, sondern graphisch mittels Seilpolygon bestimmt. Es wurden also die Werte w' aufgetragen $\left(\text{Maßstab: } 100000 \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{cm}^2} = 0{,}5\ \mathrm{cm}\right)$, hierauf vom Pole O die Polstrahlen und parallel zu diesen die Seilstrahlen gezeichnet (Fig. 157e und f). Dann ist bekanntlich für irgendeinen Querschnitt m des (gedachten) Balkens Fig. 157d das Biegungsmoment $\mathfrak{M}$:

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{H} \cdot \mathfrak{y}\,.$$

Hieraus ergibt sich die gesuchte Durchbiegung des wirklich vorhandenen Balkens:

$$\delta = \frac{\mathfrak{M}}{E} = \frac{\mathfrak{H} \cdot \mathfrak{y}}{E}\,.$$

Um das Ausrechnen dieses Ausdruckes zu sparen, wollen wir die Polweite $\mathfrak{H}$ nicht beliebig, sondern gleich E nehmen. Dann wird nämlich

$$\delta = \frac{E}{E} \cdot \mathfrak{y}\,,$$

$$\text{(I)} \qquad \delta = \mathfrak{y}\,,$$

d. h. ***das zu den Werten w_1', w_2' usw. mit der Polweite E gezeichnete Seilpolygon gibt direkt die Durchbiegungen an.***

Um die Durchbiegungen an den einzelnen Stellen genauer zu erhalten, müßte man die Fläche $\mathfrak{F}'$ natürlich nicht in vier, sondern in mehr Streifen einteilen. Dann würde das Seilpolygon die in Fig. 157f einpunktierte Gestalt annehmen.

Digitized by Google

Zusatz 1. In diesem Beispiele wurden die Abmessungen so gewählt, daß die Länge des Trägers *maßstäblich* gezeichnet werden konnte. Dann erscheinen also auch die Durchbiegungen maßstäblich. Im allgemeinen muß man ja aber die Systemfigur in einem kleineren Maßstabe darstellen; z. B. im Maßstabe $1:x$.

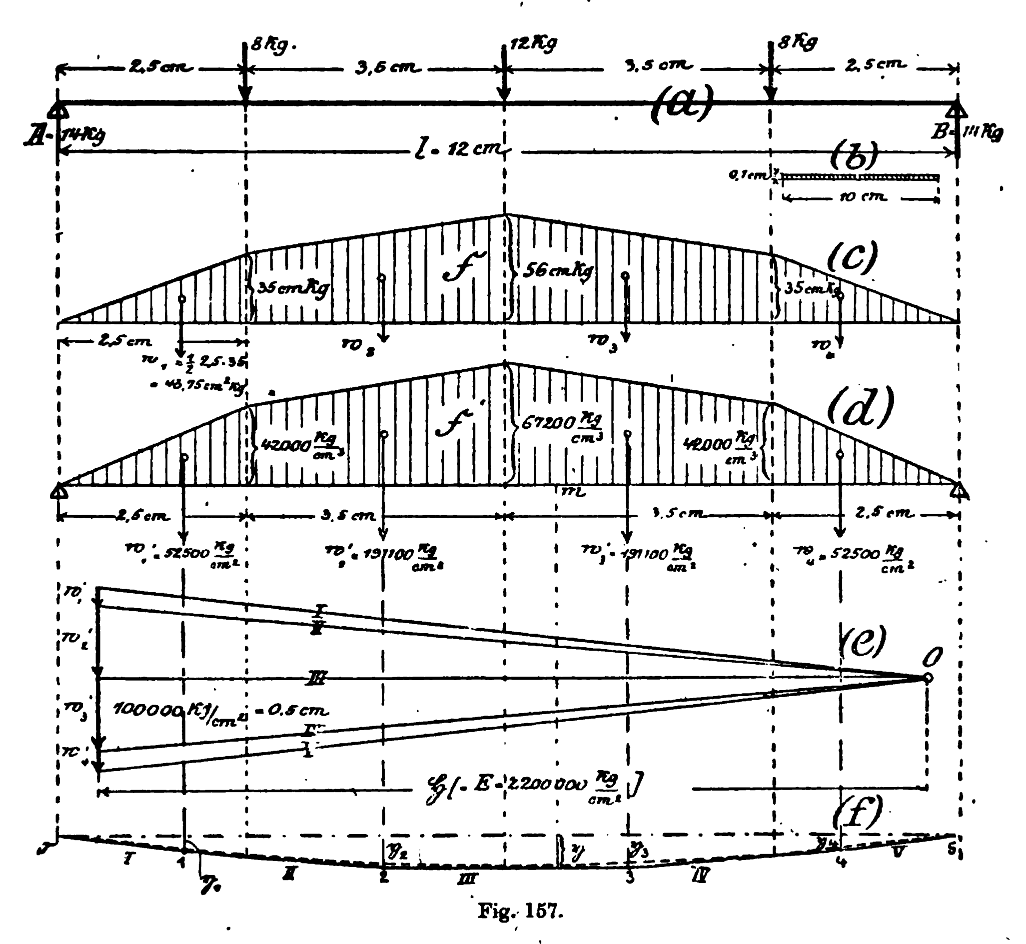


Fig. 157.

Dann erscheint also auch das Seilpolygon in diesem kleineren Längenmaßstab; d. h. die Knickpunkte *0*, *1*, *2* usw. des Seilpolygons rücken entsprechend näher aneinander. Da nun die Neigung der einzelnen Seilstrahlen gegen die Horizontale unverändert geblieben ist (denn sie sind ja stets parallel den entsprechenden Polstrahlen des Kräftepolygons Fig. 157e), so folgt daraus, daß auch die Ordinaten $\mathfrak{y}$ entsprechend kleiner werden. Wenn wir also in Fig. 157 die Längen im Maßstab $1:x$ auftragen, so erhalten wir auch die

Digitized by Google

Ordinaten $\mathfrak{y}$ im Maßstabe $1:x$. Auf diese Weise würden wir bei größeren Trägern undeutliche Seilpolygone erhalten. Da können wir uns nun dadurch helfen, daß wir die Polweite $\mathfrak{H}$ nicht mehr gleich E, sondern gleich $\frac{E}{x}$ nehmen. Dann werden die Polstrahlen und hiermit auch die Seilstrahlen I, II usw. entsprechend steiler, und die Ordinaten $\mathfrak{y}$ erscheinen wieder in natürlicher Größe.

Dieser Umstand, daß die Ordinaten eines Seilpolygons sich in demselben Maßstabe vergrößern, wie die Polweite verkleinert wird (und umgekehrt), ermöglicht es, die Durchbiegungen auch im *vergrößerten* Maßstabe darzustellen. Zu diesem Zwecke nehmen wir die Polweite nicht gleich E resp. $\frac{E}{x}$, sondern gleich $\frac{1}{y}$-tel dieser Werte; $\mathfrak{H} = \frac{E}{y}$ resp. $= \frac{E}{x \cdot y}$. Dann vergrößern sich die Ordinaten des Seilpolygons um das y-fache; d. h. die Durchbiegungen erscheinen y-mal so groß, als sie wirklich sind.

Zusatz 2. Statt die Werte w_1', w_2' usw. aus der Fläche $\mathfrak{F}'$ auszurechnen (Fig. 157d), können wir auch einfach die Werte w_1 und w_2 aus der wirklichen Momentenfläche $\mathfrak{F}$ (Fig. 157c) nehmen und zu diesen das Kräfte- und das Seilpolygon zeichnen. Da wir dann aber die J-fach zu großen Werte auftragen, würden wir auch das Seilpolygon im J-fachen Maßstabe erhalten. Das wäre im allgemeinen nicht angenehm. Wir helfen uns dadurch, daß wir auch die Polweite im J-fachen Maßstabe nehmen. Dann erhalten die Polstrahlen dieselbe Neigung, als ob die richtigen Werte w_1' usw. aufgetragen wären, und das Seilpolygon erscheint also in dem verlangten Maßstabe.

Zusammenfassung. Ist ein Träger im Maßstabe $1:x$ gezeichnet und wollen wir die Durchbiegungen im y-fachen der natürlichen Größe haben, so bestimmen wir zunächst die wirkliche Momentenfläche $\mathfrak{F}$, berechnen von dieser die Werte w_1, w_2 usw. der einzelnen Streifen, tragen diese Werte auf, nehmen die Polweite $\mathfrak{H} = \frac{E}{x \cdot y} \cdot J$ und zeichnen das Seilpolygon. Dessen Ordinaten geben dann in dem verlangten Maßstabe die Durchbiegungen an. (Die Werte w_1 usw. haben die Benennung cm · cmkg = cm²kg; die Polweite $\mathfrak{H}$ hat die Benennung $\frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} \cdot \text{cm}^4 = \text{cm}^2\text{kg}$.)

In diesem Beispiele hatten wir ein konstantes J. Jetzt wollen wir das Verfahren auch für veränderliches J verwenden.

Digitized by Google

II. Durchbiegungen eines Blechträgers. (Veränderliches J.)

Der Trägermaßstab sei $1:x$. Der Maßstab für die Durchbiegungen soll $y:1$ sein. Von dem vorigen Beispiele unterscheidet sich dieses dadurch, daß der Träger in Fig. 158 für die verschiedenen Querschnitte verschiedene Trägheitsmomente hat. Diese seien J^0 (für den Querschnitt ohne Lamellen), J^I und J^{II}. Zunächst wurde die wirkliche Momentenfläche $\mathfrak{F}$ gezeichnet (Fig. 158b). Dann wurde $\mathfrak{F}$ in Streifen zerlegt. Letztere wurden so angenommen, daß überall da, wo eine Last steht, und da, wo sich das Trägheitsmoment ändert, ein neuer Streifen beginnt. Eigentlich müßten

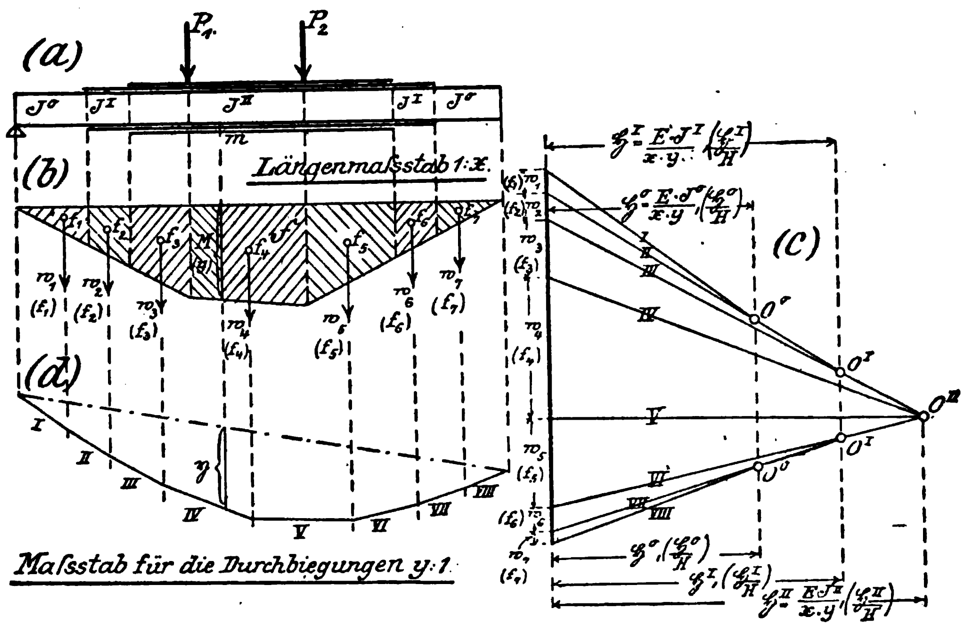


Fig. 158.

wir nun den Streifen w_1 durch das Trägheitsmoment J^0, den Streifen w_2 durch J^I, die Streifen w_3 bis w_5 durch J^{II} usw. teilen, diese Werte auftragen und mit der Polweite $\frac{E}{x \cdot y}$ das Seilpolygon zeichnen, um dann die Einsenkungen im y-fachen Maßstabe zu erhalten. Statt dessen verfahren wir aber, wie in Zusatz 2 im vorigen Beispiel angegeben wurde: Wir tragen w_1 selber auf (also einen J_0-fach zu großen Wert), nehmen dafür aber die Polweite ebenfalls J_0-mal so groß, also gleich $\frac{E}{x \cdot y} \cdot J_0$ (Fig. 158c). Dann haben die Strahlen I und II dieselbe Neigung, als ob wir

den Wert $\frac{w_1}{J^0}$ mit der Polweite $\frac{E}{x \cdot y}$ aufgetragen hätten. Zu dem nächsten Werte, w_2, gehört bereits ein anderes Trägheitsmoment, nämlich J^I. Wir müssen also die Polweite gleich $\frac{E}{x \cdot y} \cdot J^I$ nehmen. Da der neue Pol, O^I, außerdem auf dem Strahle II liegen muß, so ist seine Lage bestimmt und der Strahl III kann eingezeichnet werden. Entsprechend bestimmen wir den Pol O^{II}, der zu den Werten w_3 bis w_5 gehört; usw. Dann zeichnen wir zu diesen Polstrahlen die Seilstrahlen (Fig. 158d) und erhalten für irgendeinen Punkt m des Trägers die y-fache Durchbiegung, dargestellt durch die Ordinate $\mathfrak{y}$ des Seilpolygons.

Zusatz. Bisher haben wir angenommen, daß wir die wirklichen Momente M durch Rechnung ermittelt und hierdurch die Fläche $\mathfrak{F}$ bestimmt hätten. Häufig liegt nun der Fall vor, daß auch die Momente M mittels Seilpolygon gefunden worden sind. Nehmen wir also an, daß Fig. 158b nicht die eigentliche Momentenfläche $\mathfrak{F}$ wäre, sondern nur das zu den Lasten P_1 und P_2 mit einer Polweite H gezeichnete Seilpolygon darstelle. Dann würde also die wirkliche Momentenfläche H-mal so groß sein; denn es ist ja $M = H \cdot y$. Statt aber etwa Fig. 158b im H-fachen Maßstabe umzuzeichnen, bestimmen wir einfach die Flächeninhalte f_1, f_2 usw. der einzelnen Streifen, tragen diese in Fig. 158c an Stelle der Werte w_1, w_2 usw. auf und nehmen dafür aber die Polweite gleich $\frac{1}{H}$tel von $\mathfrak{H}$. Denn die Inhalte der Streifen f_1, f_2 usw. sind proportional den Werten w_1, w_2 usw. (Es ist $f_1 = \frac{1}{H} \cdot w_1$, $f_2 = \frac{1}{H} \cdot w_2$ usw.) Wenn wir also die Polweite in demselben Verhältnis verkleinern $(1 : H)$, in dem die Werte f kleiner sind als die Werte w, so bleibt die Neigung der Polstrahlen und demnach auch das Seilpolygon unverändert.

Zusammenfassung. Ist bei einem Träger nicht die wirkliche Momentenfläche $\mathfrak{F}$ gegeben, sondern wurden die Biegungsmomente graphisch mittels Seilpolygon ermittelt, so bestimmen wir graphisch die Durchbiegungen, indem wir die einzelnen Flächenstreifen des ersten Seilpolygons ausmessen, diese Flächeninhalte f_1, f_2 auftragen und mit den Polweiten

$$\frac{\mathfrak{H}^0}{H} = \frac{1}{H} \cdot \frac{E \cdot J^0}{x \cdot y}, \quad \frac{\mathfrak{H}^I}{H} = \frac{1}{H} \cdot \frac{E \cdot J^I}{x \cdot y} \quad \text{usw.}$$

Digitized by Google

das zweite Seilpolygon zeichnen. Dieses gibt die Durchbiegungen im y-fachen Maßstabe an. Hinsichtlich der Maßstäbe ist zu merken: In der Formel $M = H \cdot y$ muß der eine Wert als Länge, der andere als Kraft gemessen werden. Wir wollen die Ordinaten y im Längenmaßstab und die Polweite H im Kräftemaßstab messen. Dann haben also die Werte f_1, f_2 usw. die Bezeichnung $\text{cm} \cdot \text{cm} = \text{cm}^2$. Dieselbe Bezeichnung haben die Polweiten, wie sich aus den Formeln ergibt. Wir nehmen dann als Maßstab z. B. $100000 \text{ cm}^2 = 1 \text{ cm}$, od. dgl., tragen hiernach die Werte f_1, f_2 usw. und die Polweiten $\frac{1}{H} \cdot \frac{E \cdot J^0}{x \cdot y}$, $\frac{1}{H} \cdot \frac{E \cdot J^I}{x \cdot y}$ usw. auf und zeichnen das Seilpolygon.

Bemerkung: Die Trägheitsmomente werden bei Berechnung von Durchbiegungen stets ohne Nietabzug genommen.

III. Beispiel für eine zusammengesetzte Konstruktion.

Aufgabe: Der in Fig. 159 skizzierte Kranausleger ist durch eine Last P beansprucht. Die Verschiebung des Endpunktes soll berechnet werden. Der horizontale Arm habe das durchschnittliche Trägheitsmoment J, der vertikale das Trägheitsmoment J' und den Querschnitt F.

Zunächst bestimmen wir die Auflagerdrücke und Momente. Der Ausleger sei unten durch ein Spurlager gestützt und darüber durch ein Halslager geführt (Fig. 159b). Die Auflagerkräfte sind:

$$B = H = \frac{P \cdot l}{h_1},$$

$$V = P.$$

Die Momente für die einzelnen Teile sind in Fig. 159b graphisch aufgetragen; die dort gezeichneten Flächen sind also die Flächen $\mathfrak{F}$. Um nun die Durchbiegung zu bestimmen, betrachte ich zunächst den horizontalen Arm, während der vertikale Teil als starr angesehen wird. Dann haben wir es mit einem einfachen Freiträger zu tun, der am linken Ende fest eingespannt ist und am rechten Ende die Einzellast P trägt. Seine Durchbiegung ist nach dem Früheren (Fig. 159c):

$$\text{(I)} \qquad \delta_1 = \frac{1}{3} \frac{P l^3}{E J}.$$

Somit ist der Anteil, den der horizontale Arm zur Gesamteinsenkung liefert, bestimmt.

Digitized by Google

Nun gehen wir zum vertikalen Teile über (Fig. 159b, d u. e). Dieser erscheint als ein Träger, der bei a ein festes und bei b ein bewegliches Lager hat. (Eine Einspannung ist bei b nicht anzunehmen.) Seine Momentenfläche besteht aus einem Dreieck und aus einem Rechteck. Die Fläche des ersteren sei $\mathfrak{F}_D$, die des letzteren $\mathfrak{F}_R$ (Fig. 159d). Die elastische Linie dieses Stabes hat die in Fig. 159e skizzierte Form. Uns kommt es hauptsächlich auf die Verschiebung δ' und den Ausschlagwinkel α_n am Endpunkte an. Zu deren Bestimmung lesen wir aus Fig. 159d und e der Reihe nach ab:

$$z_{0-m} = \frac{1}{EJ'} \mathfrak{F}_D \cdot \mathfrak{x}_D ; \qquad z_{0-n} = \frac{1}{EJ'} (\mathfrak{F}_R \cdot \mathfrak{x}_R + \mathfrak{F}_D \cdot \mathfrak{x}'_D) ,$$

$$\delta' = z_{0-n} - x = z_{0-n} - z_{0-m} \cdot \frac{h}{h_1}$$

$$= \frac{1}{EJ'} \left(\mathfrak{F}_R \cdot \mathfrak{x}_R + \mathfrak{F}_D \cdot \mathfrak{x}'_D - \mathfrak{F}_D \cdot \mathfrak{x}_D \cdot \frac{h}{h_1} \right)$$

$$= \frac{1}{EJ'} \left[P l \cdot h_2 \cdot \frac{h_2}{2} + \frac{1}{2} P l \cdot h_1 \cdot \left(\frac{h_1}{3} + h_2 \right) - \frac{1}{2} P l \cdot h_1 \cdot \frac{h_1}{3} \cdot \frac{h}{h_1} \right] ,$$

$$\text{(II)} \qquad \delta' = \frac{P l}{2 EJ'} h_2 \left(h_2 + \frac{2}{3} h_1 \right) .$$

Ferner

$$\alpha_0 = \frac{1}{EJ'} \cdot \frac{1}{3} \mathfrak{F}_D ,$$

$$\gamma_{0-n} = \frac{1}{EJ'} \cdot (\mathfrak{F}_R + \mathfrak{F}_D) ,$$

$$\alpha_n = \gamma_{0-n} - \alpha_0 = \frac{1}{EJ'} \left(\mathfrak{F}_R + \mathfrak{F}_D - \frac{1}{3} \mathfrak{F}_D \right)$$

$$= \frac{1}{EJ'} \cdot \left(P l \cdot h_2 + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot P l \cdot h_1 \right) ,$$

$$\text{(III)} \qquad \alpha_n = \frac{P l}{EJ'} \cdot \left(h_2 + \frac{h_1}{3} \right) .$$

Dieser Winkel α_n ist also derjenige Winkel, um den das Endelement n des vertikalen Teiles gegen seine ursprüngliche (vertikale) Richtung ausschlägt. Da nun an dieser Stelle der vertikale und der horizontale Arm miteinander verbunden sind, so schlägt letzterer um denselben Betrag gegen die Horizontale aus. Hierdurch senkt sich der Angriffspunkt der Last um:

$$\delta_2 = \alpha_n \cdot l = \frac{P l^2}{EJ'} \left(h_2 + \frac{h_1}{3} \right) .$$

Digitized by Google

Insgesamt erleidet also der Endpunkt des Auslegers folgende Verschiebungen (Fig. 159f):

in vertikaler Richtung: $\delta = \delta_1 + \delta_2 = \frac{P l^2}{3 E}\left(\frac{l}{J} + \frac{3 h_2 + h_1}{J'}\right)$,

„ horizontaler „ $\delta' = \frac{P l h_2}{2 E J'}\left(h_2 + \frac{2}{3} h_1\right)$.

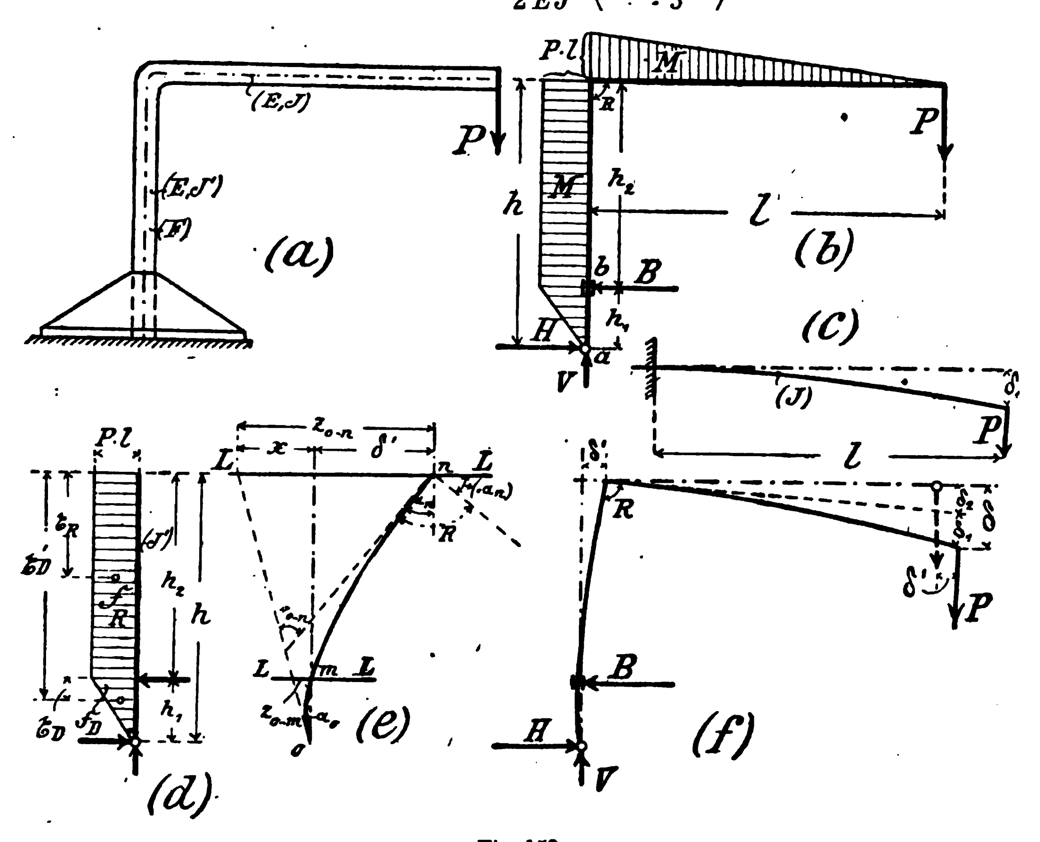


Fig. 159.

Da der vertikale Teil einen Druck $V = P$ aufzunehmen hat, wird er außerdem um eine Strecke $\frac{P h}{E F}$ zusammengedrückt. Dieser Betrag käme also noch zu der Senkung hinzu. Er ist aber im Verhältnis zu den durch die Biegung verursachten Formänderungen so gering, daß er vernachlässigt werden darf.

Aufgabe. Man leite die Formeln (II) und (III) auch in der Weise ab, daß man den Teil $\overline{mn}$ als einen Freiträger von der Länge h_2 betrachtet, dessen Einspannstelle um einen Winkel α_m

Digitized by Google

(d. i. der Ausschlagwinkel des Elementes m) nachgibt. Ferner setze man Zahlenwerte ein und rechne das Beispiel vollständig durch.

Schlußbemerkung. Bei der Untersuchung der elastischen Formänderungen haben wir bisher stets den — theoretisch sehr schwer verfolgbaren — Einfluß der Schubspannungen τ vernachlässigt. Durch diese vergrößern sich die Durchbiegungen durchschnittlich um etwa 5%; doch wird dieser Zuschlag fast stets vernachlässigt.

---

15. Vortrag:

Der eingespannte Träger und der durchlaufende Träger auf mehreren Stützen.

§ 87.

Der eingespannte Träger.

I. Der Balken mit fester Einspannung.

Bei der wichtigsten Trägerart, dem Balken auf zwei Stützen, ist bisher stets vorausgesetzt, daß die Enden frei auf den Lagern aufliegen. Für diesen Fall haben wir in den früheren Untersuchungen die Auflagerkräfte, Momente, Querkräfte, Spannungen und schließlich auch die elastischen Formänderungen bestimmt.

In Fig. 160a ist nun angenommen, daß ein Balken an seinen Enden *eingespannt* (eingemauert) sei. Zwischen einem solchen „eingespannten Träger" (Fig. 160a) und einem frei aufliegenden Träger (Fig. 160c) besteht augenscheinlich folgender Unterschied: Beim ersteren sind infolge der Einmauerung die beiden äußersten Stabelemente 0 und n gezwungen, auch nach der Belastung ihre ursprüngliche horizontale Lage beizubehalten; beim letzteren führen sie infolge der Belastung eine kleine Drehung aus, so daß die Ausschlagwinkel α_0 und β_0 entstehen (Fig. 160c). Dieses ist also der Unterschied zwischen den beiden Trägerarten hinsichtlich der Formänderungen.

Wodurch kommt nun der Unterschied zustande? Zunächst haben die Stabelemente 0 und n in Fig. 160a ebenfalls das Bestreben, sich bei Belastung des Trägers zu drehen. Infolge der Einmauerung können sie aber diese Drehung nicht ausführen. Sie

Digitized by Google

erhalten vielmehr von der über den Auflagern befindlichen Auflast einen Gegendruck, der sie in ihrer ursprünglichen Lage festhält. Auf den frei aufliegenden Träger auf zwei Stützen wirken außerhalb der Stützpunkte überhaupt keine Kräfte ein. Beim eingespannten Träger dagegen sind solche Kräfte vorhanden, nämlich die Gegendrücke der Aufmauerungen. Diese Kräfte sind sogar sehr beträchtlich und bringen auch in bezug auf die Punkte A und B bereits Momente hervor. Dieses ist also der Unterschied zwischen beiden Trägerarten hinsichtlich der vorhandenen Kräfte.

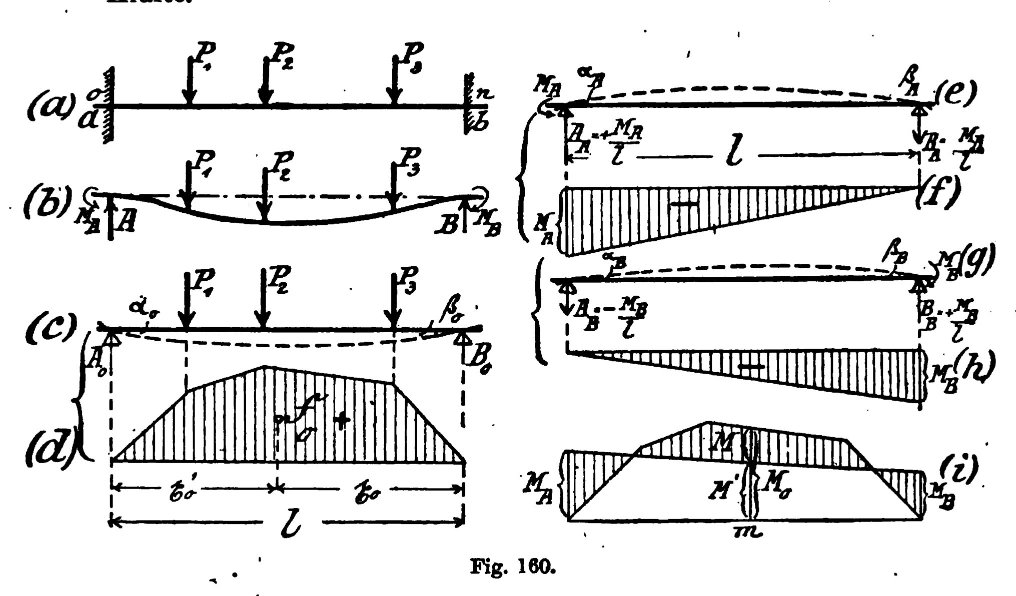


Fig. 160.

Statt durch Einmauerung kann die Einspannung eines Trägers AB auch dadurch geschehen, daß auf die Stabelemente 0 und n Kräftepaare wirken. Wirkt bei 0 ein linksherum zeigendes und bei n ein rechtsherum zeigendes Kräftepaar, so kann hierdurch augenscheinlich ebenfalls erreicht werden, daß die Ausschlagwinkel des ersten und des letzten Stabelementes gleich Null werden; d. h. daß der Balken „eingespannt“ ist. Dieser Fall, daß die Einspannung durch Kräftepaare geschieht, ist für die weiteren Untersuchungen besonders wichtig. Namentlich beim Träger auf mehreren Stützen lassen sich die einzelnen Teile als Balken auffassen, die durch Kräftepaare eingespannt sind (§ 88). Wir wollen deshalb zunächst die Berechnung eines derartig durch Kräftepaare eingespannten Balkens erledigen.

Digitized by Google

a) Berechnung der Einspannmomente.

Das Moment des Kräftepaares bei A werde M_A und das bei B werde M_B genannt. Gemeinsam führen sie die Bezeichnung „*Einspannmoment*". Die Größe dieser Einspannmomente kann nicht aus den Gleichgewichtsbedingungen der Statik bestimmt werden. Denn wir haben am Balken Fig. 160b erstens die Auflagerkräfte an den beiden Lagerstellen und außerdem noch die beiden Einspannmomente. Wenn wir letztere zunächst in die Rechnung einführten, so könnten wir aus dem Gleichgewicht des Körpers AB die Auflagerdrücke bestimmen. Dann sind aber auch die Gleichgewichtsbedingungen verbraucht, so daß M_A und M_B als (zwei) Unbekannte zurückbleiben. Die Konstruktion ist (zweifach) statisch unbestimmt.

Wir müssen also das elastische Verhalten des Trägers untersuchen. Hierbei ergibt sich naturgemäß folgender Rechnungsgang: Da die Wirkung der Einspannmomente darin besteht, daß der Ausschlagwinkel des ersten und des letzten Stabelementes gleich Null werden, so werden wir zunächst die Ausdrücke für die Ausschlagwinkel aufstellen. In diesen Ausdrücken kommen natürlich auch M_A und M_B vor. Dann setzen wir die Ausschlagwinkel gleich Null und erhalten zwei Gleichungen zur Bestimmung von M_A und M_B.

Die folgende Untersuchung gewinnt an Klarheit, wenn wir den Einfluß der Lasten P und der Einspannmomente getrennt aufstellen. Betrachten wir zunächst die Wirkung der Kräfte P, ohne die Einspannmomente. Dieser Fall ist in Fig. 160c dargestellt. Die Auflagerdrücke A_0 und B_0 und die dazugehörige Momentenfläche $\mathfrak{F}_0$ lassen sich in bekannter Weise aus den Lasten bestimmen. Hieraus ergeben sich dann für diesen Fall die Ausschlagwinkel

$$(1) \qquad \alpha_0 = \frac{1}{EJ} \frac{\mathfrak{F}_0 \cdot \mathfrak{x}_0}{l}; \quad \beta_0 = \frac{1}{EJ} \frac{\mathfrak{F}_0 \cdot \mathfrak{x}_0}{l}.$$

Nachdem somit die Lasten P erledigt sind, untersuchen wir den Einfluß der auf das Element 0 wirkenden Einspannung. Das Moment der Einspannkräfte in bezug auf den Punkt A war mit M_A bezeichnet. Weiter sollen jetzt also keine Kräfte berücksichtigt werden. Es entstehen dann für diesen Fall die in Fig. 160f und e eingeschriebenen Momente und Auflagerdrücke am Balken und schließlich die Ausschlagwinkel der Stabelemente 0 und n:

$$\alpha_A = \frac{1}{EJ}\left(-\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} l \cdot M_A\right),$$

Digitized by Google

(2) $$\alpha_A = -\frac{1}{EJ}\cdot\frac{1}{3}M_A\cdot l\,; \qquad \beta_A = -\frac{1}{EJ}\cdot\frac{1}{6}M_A\cdot l\,.$$

(Das Moment M_A ist negativ, da es am linken Balkenteile linksherum zeigt. Daher ergeben sich die Winkel α_A und β_A ebenfalls negativ. Sie sind ja auch tatsächlich entgegengesetzt gelegen zu den Winkeln α_0 und β_0.)

In entsprechender Weise entstehen, falls nur das Moment M_B auf den Balken wirkt, die Ausschlagwinkel (Fig. 160g und h)

(3) $$\alpha_B = -\frac{1}{EJ}\cdot\frac{1}{6}M_B\cdot l\,; \qquad \beta_B = -\frac{1}{EJ}\cdot\frac{1}{3}M_B\cdot l\,.$$

Setzen wir nun alle drei Wirkungen — die Lasten P, das Moment M_A und das Moment M_B — zusammen, so kommen wir auf unsere ursprüngliche Aufgabe zurück: Träger an den Enden eingespannt und durch Lasten P belastet. Für diesen Fall ergeben sich also die Ausschlagwinkel

des Elementes 0: $\alpha = \alpha_0 + \alpha_A + \alpha_B$,
„ „ n: $\beta = \beta_0 + \beta_A + \beta_B$.

Diese Ausschlagwinkel müssen aber gleich Null sein, da ja die Stabelemente 0 und n fest eingespannt sind. Wir haben also die Bedingungen

$$\begin{cases} \dfrac{1}{EJ}\dfrac{\mathfrak{F}_0\cdot\mathfrak{x}_0}{l} - \dfrac{1}{EJ}\cdot\dfrac{1}{3}M_A\cdot l - \dfrac{1}{EJ}\cdot\dfrac{1}{6}M_B\cdot l = 0\,, \\ \dfrac{1}{EJ}\dfrac{\mathfrak{F}_0\cdot\mathfrak{x}_0'}{l} - \dfrac{1}{EJ}\cdot\dfrac{1}{6}M_A\cdot l - \dfrac{1}{EJ}\cdot\dfrac{1}{3}M_B\cdot l = 0\,, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{EJ}\left(\dfrac{\mathfrak{F}_0\cdot\mathfrak{x}_0}{l} - \dfrac{1}{3}M_A\cdot l - \dfrac{1}{6}M_B\cdot l\right) = 0\,, \\ \dfrac{1}{EJ}\left(\dfrac{\mathfrak{F}_0\cdot\mathfrak{x}_0'}{l} - \dfrac{1}{6}M_A\cdot l - \dfrac{1}{3}M_B\cdot l\right) = 0\,. \end{cases}$$

Hieraus folgen für die beiden Momente M_A und M_B die Gleichungen:

(I) $$\begin{cases} 2\,M_A + M_B = 6\,\dfrac{\mathfrak{F}_0\cdot\mathfrak{x}_0}{l^2}\,, \\ M_A + 2\,M_B = 6\,\dfrac{\mathfrak{F}_0\cdot\mathfrak{x}_0'}{l^2}\,. \end{cases}$$

Aus diesen beiden Gleichungen lassen sich dann die beiden Unbekannten M_A und M_B bestimmen:

$$M_A = \frac{4\,\mathfrak{F}_0\cdot\mathfrak{x}_0}{l^2} - \frac{2\,\mathfrak{F}_0\cdot\mathfrak{x}_0'}{l^2}\,,$$

Digitized by Google

$$\text{(Ia)} \qquad \begin{cases} M_A = \dfrac{2\,\mathfrak{F}_0}{l^2}\,(2\,\mathfrak{x}_0 - \mathfrak{x}_0')\,, \\[2ex] M_B = \dfrac{2\,\mathfrak{F}_0}{l^2}\,(-\mathfrak{x}_0 + 2\,\mathfrak{x}_0')\,. \end{cases}$$

So groß müssen also M_A und M_B sein, wenn die Ausschlagwinkel der Elemente *0* und *n* zu Null werden sollen.

b) Berechnung der Auflagerdrücke.

Sobald M_A und M_B ermittelt sind, finden wir die Auflagerdrücke A und B:

$$A = A_0 + A_A + A_B\,.$$

(A_0 = Auflagerdruck des frei aufliegenden Trägers infolge der Lasten P; A_A entsprechender Auflagerdruck infolge des Momentes M_A, usw.) Nach Einsetzung der Werte von A_A, A_B usw. aus Fig. 160e und g ergibt sich:

$$\text{(II)} \qquad A = A_0 + \frac{M_A - M_B}{l}\,, \qquad B = B_0 - \frac{M_A - M_B}{l}\,.$$

Bemerkung: Geschieht die Einspannung nicht durch Kräftepaare, sondern durch direkte Aufmauerung auf den Elementen *0* und *n*, so müssen ferner die Drücke dieser Aufmauerung bestimmt werden. Sie ergeben sich aus den Momenten M_A und M_B und den Abständen der Angriffspunkte der Drücke von den Lagerpunkten (Moment = Druck $\times$ Abstand). Diese Drücke sind dann zu den obigen Werten von A und B zu addieren.

c) Berechnung der Zwischenmomente.

Das Gesamtmoment M für einen Punkt m (Fig. 160i) *innerhalb* der Stützweite ergibt sich, wenn wir die einzelnen Momentenflächen Fig. 160d, f und h zusammenlegen. Letztere beiden sind negativ und ergeben zusammen ein Trapez. Deshalb finden wir M, indem wir die Differenz aus der positiven Fläche $\mathfrak{F}_0$ und diesem negativen Trapeze zeichnen (Fig. 160i). Rechnerisch würde sich das Moment eines Querschnittes folgendermaßen ermitteln lassen: Wir bestimmen zunächst das Moment des Querschnittes infolge der Lasten P für den Fall, daß der Balken frei aufliege. Es werde M_0 genannt. Hat dann der Querschnitt vom rechten bzw. linken Auflager die Abstände x_m bzw. x_m', so ist sein Gesamtmoment (mit Berücksichtigung der Einspannung):

$$\text{(III)} \qquad M = M_0 - M_A \cdot \frac{x_m}{l} - M_B \cdot \frac{x_m'}{l}\,.$$

Digitized by Google

d) Berechnung der Querkräfte.

Die Querkraft für den Schnitt m in Fig. 160i ist, wenn wir beispielsweise den Balkenteil links vom Schnitte betrachten, gleich dem Auflagerdruck A weniger den Lasten P links vom Schnitte. Nun besteht aber der Auflagerdruck A aus den beiden Teilen A_0 und $\frac{M_A - M_B}{l}$. Der erste Teil, A_0, ist der Auflagerdruck für den Fall, daß der Balken frei aufliegt (Fig. 160c). Es würde also A_0 zusammen mit den links vom Schnitte befindlichen Lasten die Querkraft des Schnittes m ergeben für den frei aufliegend gedachten Träger. Diese Querkraft werde mit $Q_{0,m}$ bezeichnet. Sie läßt sich in der bekannten Weise für jedes Lastensystem schnell berechnen. Sobald dann $Q_{0,m}$ ermittelt ist, ergibt sich die richtige (d. h. mit Berücksichtigung der Einspannung berechnete) Querkraft des Schnittes m:

$$\text{(IV)} \qquad Q_m = Q_{0,m} + \frac{M_A - M_B}{l}.$$

Zusammenfassung. Bei der Berechnung eines eingespannten Trägers sehen wir zunächst von der Einspannung ab und bestimmen die *„einfache Momentenfläche* $\mathfrak{F}_0$*"* so, als ob der Balken frei auf zwei Stützen gelagert wäre. Dann ergeben sich mit Hilfe der Fläche $\mathfrak{F}_0$ und deren Schwerpunktsabstände $\mathfrak{x}_0$ und $\mathfrak{x}_0'$ aus den Gleichungen (I), bzw. (Ia) die Einspannmomente M_A und M_B. Nach deren Ermittlung finden wir durch die Gleichungen (II), (III) und (IV) die Auflagerdrücke A und B des eingespannten Trägers, ferner dessen Moment und Querkraft für jede beliebige Stelle.

Man beachte, daß bei einem eingespannten Träger die Auflagerdrücke nicht dieselben sind, als wenn der Träger frei aufliegen würde. Nur wenn $M_A = M_B$ wird, ist $A = A_0$ und $B = B_0$.

Beispiel. Eingespannter Träger mit gleichmäßig verteilter Last. Wir bestimmen zunächst (vgl. hierzu Fig. 156a und b):

$$\mathfrak{F}_0 = \frac{2}{3} l \cdot \frac{Pl}{8} = \frac{Pl^2}{12}, \qquad \mathfrak{x}_0 = \mathfrak{x}_0' = \frac{l}{2}.$$

Hiermit ergeben sich die Einspannmomente [s. Gleichungen (Ia)]:

$$M_A = \frac{2Pl^2}{12 l^2}\left(2\frac{l}{2} - \frac{l}{2}\right)$$
$$= \frac{P}{6} \cdot \frac{l}{2}$$
$$= \frac{Pl}{12},$$

Digitized by Google

$$M_B = M_A = \frac{Pl}{12}.$$

Diese Momente sind negativ (wie sie von vornherein in die Rechnung eingeführt sind). In der Mitte ist das Moment:

$$M = M_0 - \frac{Pl}{12} \cdot \frac{1}{2} - \frac{Pl}{12} \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \frac{Pl}{8} - \frac{Pl}{12} = \frac{Pl}{24}.$$

II. Der Balken mit nachgiebiger Einspannung.

Der vorhin behandelte Fall kommt in der Praxis ziemlich selten vor. Meistens sind die Widerlager nicht absolut unbeweglich. Sie gestatten vielmehr häufig den Endelementen eine kleine Drehung und dann stimmt unsere ganze Rechnung, die ja auf der Bedingung $\alpha = \beta = 0$ aufgebaut ist, nicht mehr.

Die Untersuchung eines Balkens mit nachgiebig eingespannten Enden wollen wir in einer Form durchführen, die auch für die Berechnung des kontinuierlichen Trägers verwendbar ist. Zu diesem Zwecke stellen wir folgende Aufgabe: Auf einen einfachen, frei aufliegenden Balken wirken die gegebenen Lasten P und an den Enden die zunächst unbekannten Einspannmomente (Kräftepaare) M_A und M_B. (Letztere ebenfalls positiv genommen.) Die Ausschlagwinkel α und β, die die Endelemente nach der Durchbiegung aufweisen, seien *durch Messung gefunden*. Wie groß müssen danach M_A und M_B sein?

Die Lösung dieser Aufgabe ist nach dem Vorhergehenden einfach. Zunächst zeichnen wir die Momentenfläche infolge der Lasten P und ferner die durch M_A und M_B hervorgerufenen Momentenflächen auf. Die erstere werde in Fig. 161c mit $\mathfrak{F}_0$ bezeichnet. Die beiden letzteren sind zu einem Trapez zusammengelegt (Fig. 161e). Dann finden wir die Ausschlagwinkel:

$$\alpha = \frac{1}{EJ}\left(\frac{\mathfrak{F}_0 \cdot \mathfrak{x}_0}{l} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} l \cdot M_A + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} l \cdot M_B\right),$$

$$\beta = \frac{1}{EJ}\left(\frac{\mathfrak{F}_0 \cdot \mathfrak{x}_0'}{l} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} l \cdot M_A + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} l \cdot M_B\right).$$

Diese Ausschlagwinkel sind jetzt aber nicht gleich Null zu setzen, sondern sie sollen bestimmte Werte haben. Hiermit er-

Digitized by Google

geben sich zur Bestimmung von M_A und M_B aus der Auflösung der obigen Gleichungen die Ausdrücke:

$$\text{(V)} \quad \begin{cases} 2\,M_A + \quad M_B = -6\,\dfrac{\mathfrak{F}_0 \cdot \mathfrak{x}_0}{l^2} + 6\,\dfrac{E\,J\,\alpha}{l}, \\[2ex] \quad M_A + 2\,M_B = -6\,\dfrac{\mathfrak{F}_0 \cdot \mathfrak{x}_0'}{l^2} + 6\,\dfrac{E\,J\,\beta}{l}. \end{cases}$$

Sobald also die Belastung (und damit die Momentenfläche $\mathfrak{F}_0$) und die Ausschlagwinkel α und β gegeben sind, können wir aus den obigen Gleichungen die Einspannmomente M_A und M_B berechnen. Man sieht, daß die Belastung ein negatives und die Ausschlagwinkel ein positives Moment erzeugen. Wenn $\alpha = 0$ ist. d. h. wenn der Träger *starr* eingemauert ist, gehen die Gleichungen (V)

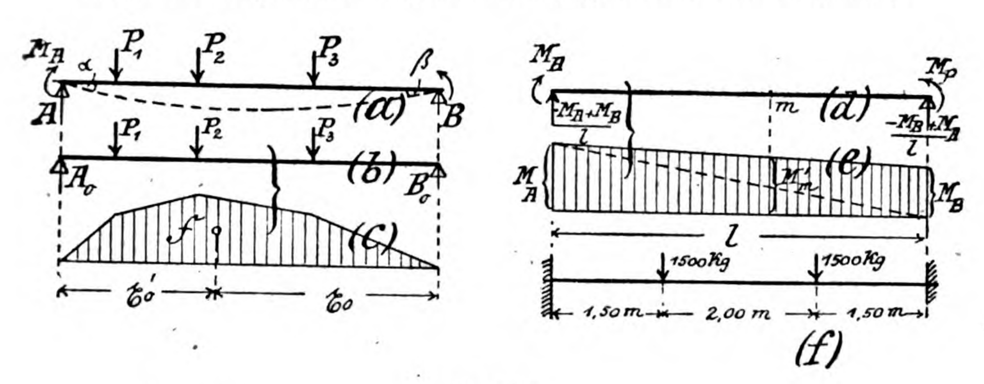


Fig. 161.

natürlich in die vorhin abgeleiteten Gleichungen (I) über. [Der Unterschied im Vorzeichen kommt daher, weil wir bei den Gleichungen (I) die Momente M_A und M_B von vornherein negativ wirkend eingezeichnet haben; die Aussagen der Gleichungen (V) und (I) stimmen also überein.]

Sobald die Momente M_A und M_B bestimmt sind, ergeben sich die Auflagerdrücke, wie früher:

$$A = A_0 - \frac{M_A - M_B}{l},$$

$$B = B_0 + \frac{M_A - M_B}{l}.$$

[Für M_A und M_B würden sich bei einem Zahlenbeispiel (Fig. 161f) negative Werte ergeben. Es würden also in die obigen Gleichungen negative Zahlen einzusetzen sein.]

Digitized by Google

Aufgabe. Bei dem in Fig. 161f gezeichneten eingespannten Balken bestimme man Biegungsmomente und Auflagerdrücke für den Fall, daß a) die Enden starr eingespannt sind, b) die Widerlager um die Winkel $\alpha = \beta = 0{,}0087$ ($^1/_2{}^\circ$) nachgeben.

Die Nachgiebigkeit der Widerlager läßt sich z. B. bei Mauerwerk fast niemals theoretisch ermitteln; man ist hier auf Schätzungen angewiesen. Ein geringes Nachgeben kann übrigens für einen eingespannten Träger günstig sein, da dann die Einspannmomente kleiner und das Mittelmoment größer werden (vgl. den eingespannten Träger mit gleichmäßig verteilter Last). Im allgemeinen geben dann aber die Widerlager gleich so viel nach, daß der Träger wie ein frei aufliegender Balken beansprucht wird. Man erkennt hieraus, daß derartige statisch unbestimmte Konstruktionen immer eine gewisse Unsicherheit in sich bergen.

§ 88.

Der durchlaufende Träger auf mehreren Stützen.

a) Berechnung der Stützenmomente.

Die Theorie des durchlaufenden (kontinuierlichen) Trägers wollen wir an Hand des in Fig. 162a gezeichneten Balkens auf sechs Stützen durchnehmen. Die Belastung sei gegeben. Eines von den Lagern ist fest (Kipplager), um auch horizontale Kräfte aufnehmen zu können; die anderen sind beweglich. Wir beschränken uns im folgenden jedoch auf vertikale Belastung, so daß an allen Lagern nur vertikale Drücke auftreten. Außerdem wollen wir die Untersuchung nur für den Fall durchführen, daß der Balken überall das gleiche Trägheitsmoment hat. Allerdings wendet man in der Praxis die abzuleitenden Formeln auch dann an, wenn diese Bedingung nicht genau erfüllt ist.

Der Balken hat sechs (vertikale) Auflagerkräfte; also vier mehr als ein einfacher Träger auf zwei Stützen. Da bei letzterem die Gleichgewichtsbedingungen gerade zur Berechnung der Unbekannten ausreichen, so haben wir hier, beim kontinuierlichen Träger, also vier Unbekannte zu viel. Wir müssen versuchen, diese vier Unbekannten aus dem elastischen Verhalten der Konstruktion zu bestimmen.

Nun wäre es naheliegend, etwa die vier Auflagerdrücke C_1, C_2, C_3 und C_4 als statisch unbestimmte Größen einzuführen. Wir würden dann das ganze System als einen Balken betrachten, der

Digitized by Google

bei *A* und *B* gelagert ist und auf den außer den Lasten *P* noch die Kräfte $C_1 \ldots C_4$ wirken. Zur Bestimmung der letzteren würden dann die vier Bedingungen führen, daß dieser Balken $\overline{AB}$ an den vier Stellen *1*, *2*, *3* und *4* die Einsenkung Null hat. In der Tat gibt dieses einen recht anschaulichen Rechnungsgang.

Wir wollen aber im folgenden eine andere Methode durchnehmen, die die älteste und auch jetzt noch am häufigsten benutzte ist. Sie stammt von dem französischen Ingenieur *Clapeyron*.

Diese Methode beruht darauf, daß man als Unbekannte die Biegungsmomente an den Stellen *1*, *2*, *3* und *4* in die Rechnung

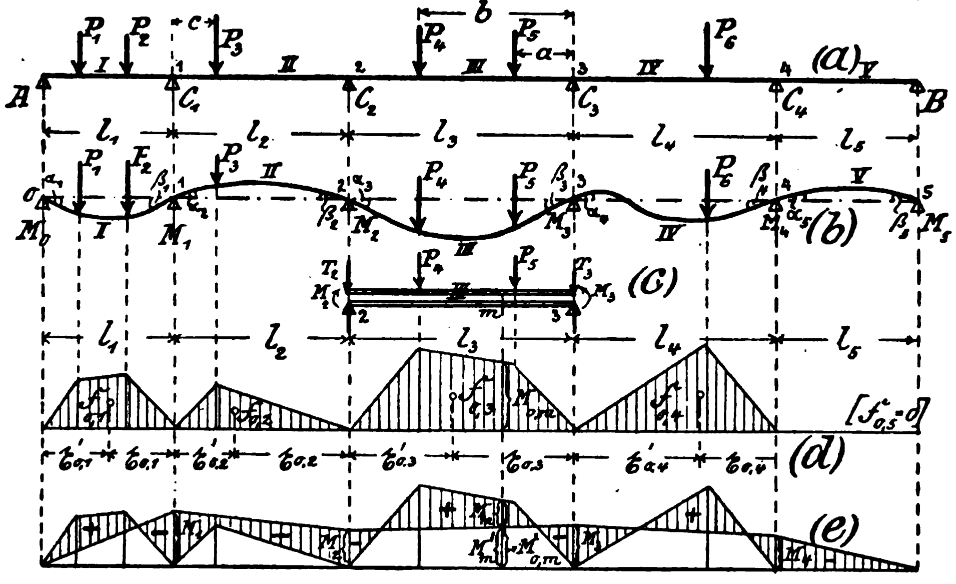


Fig. 162.

einführt. Betrachten wir z. B. die Öffnung l_3 für sich (Fig. 162c), so wirken auf diesen Teil der Gesamtkonstruktion die Lasten P_4 und P_5, die Auflagerdrücke bei *2* und *3*, und die Kräfte, die von den links und rechts anschließenden Teilen auf den Teil *III* ausgeübt werden. Dieses sind also diejenigen Kräfte, die im Innern des Balkens in den Schnitten *2* und *3* wirken; d. h. die Normalspannungen σ (rechtwinklig zum Querschnitt) und die Schubspannungen τ (in der Ebene des Querschnittes). Letztere denke ich mir zu den Resultierenden T_2 und T_3 zusammengesetzt. Die Normalspannungen σ sind zum Teil Zug-, zum Teil Druckspannungen. Die Größe dieser inneren Kräfte ist zunächst noch unbekannt. Wir wissen nur aus den Untersuchungen über innere Kräfte, daß

Digitized by Google

in jedem Querschnitte eines auf Biegung beanspruchten Stabes die inneren Kräfte ein Kräftepaar ergeben, dessen Moment ebenso groß ist wie die Summe der statischen Momente der links oder rechts vom Schnitte liegenden äußeren Kräfte (§ 40, II, Fig. 78). Insgesamt haben wir also folgendes Resultat: Der Teil *III* ist ein Balken, auf den außer den Lasten P noch die Momente M_2 und M_3 und die Einzelkräfte T_2 und T_3 wirken. Letztere werden direkt am Auflager aufgenommen; für die Formänderungen des Stabes kommen also außer den Lasten nur die „*Stützenmomente*“ M_2 und M_3 in Betracht. Diese Stützenmomente spielen genau dieselbe Rolle wie die Einspannmomente beim eingespannten Träger. In der Tat kann man ja den Teil *III* als einen Träger auffassen, der in den Punkten *2* und *3* eingespannt ist (durch den Zusammenhang mit den angrenzenden Teilen). Diese Einspannung ist nicht starr, denn die Ausschlagwinkel α_3 und β_3 (Fig. 162b) werden nicht gleich Null. Sie ist aber vorhanden, denn die Winkel α_3 und β_3 können in Fig. 162b nicht die Größe annehmen, die sie haben würden, wenn der Teil *III* ein vollständig frei aufliegender Träger (ohne Einspannmomente) wäre. Die Stützenmomente führen wir in die Rechnung zunächst als im positiven Sinne wirkend ein (Fig. 162c).

Nun haben wir im Abschnitte II des vorigen Paragraphen gesehen, daß sich zur Bestimmung der Momente M_2 und M_3 die Gleichungen aufstellen lassen (Fig. 162d):

$$2M_2 + \quad M_3 = -6\,\frac{\mathfrak{F}_{0,3}\cdot\mathfrak{x}_{0,3}}{l_3^2} + 6EJ\,\frac{\alpha_3}{l_3}\,,$$

$$M_2 + 2M_3 = -6\,\frac{\mathfrak{F}_{0,3}\cdot\mathfrak{x}'_{0,3}}{l_3^2} + 6EJ\,\frac{\beta_3}{l_3}\,.$$

Hierin ist $\mathfrak{F}_{0,3}$ der Inhalt der Momentenfläche, die nur von den Lasten P_4 und P_5 herrührt, bei der also die Stützenmomente M_2 und M_3 unberücksichtigt sind. Die übrigen Bezeichnungen sind aus der Figur ersichtlich. Das Trägheitsmoment J ist für den ganzen Träger $\overline{AB}$ als konstant angenommen. Wenn α_3 und β_3 bekannt wären, könnten wir jetzt M_2 und M_3 ausrechnen. Leider sind die Winkel noch unbekannt. Trotzdem können wir aber einige Beziehungen zwischen den Ausschlagwinkeln aufstellen. Aus Fig. 162b ergibt sich nämlich, daß der linke Ausschlagwinkel α_3 des Teiles *III* ebenso groß ist wie der rechte Ausschlagwinkel β_2 des Teiles *II*. Dieses kommt daher, weil das Stabelement, das gerade über dem Stützpunkt *2* ist, sowohl das erste Element von Teil *III* als das letzte Element von Teil *II* darstellt. Da die

Digitized by Google

Winkel α_3 und β_2 aber nach verschiedenen Richtungen gegen die ursprüngliche Stabachse ausschlagen, müssen sie mit verschiedenen Vorzeichen in die Gleichungen eingeführt werden. Wir haben also die eine Beziehung zwischen den Ausschlagwinkeln gefunden: $\beta_2 = -\alpha_3$. Insgesamt bekommen wir an dem ganzen System die Beziehungen:

$$
\begin{aligned}
1)\quad & \beta_1 = -\alpha_2 , \\
2)\quad & \beta_2 = -\alpha_3 , \\
3)\quad & \beta_3 = -\alpha_4 , \\
4)\quad & \beta_4 = -\alpha_5 .
\end{aligned}
$$

Diese vier Beziehungen müssen wir nun so verwenden, daß wir mit ihrer Hilfe die vier Unbekannten M_1, M_2, M_3 und M_4 finden. Zu diesem Zwecke schreiben wir die Bestimmungsgleichungen der Momente für die einzelnen Teile *I*—*V* an. Hierbei ist zu beachten, daß M_0 und M_5 gleich Null sind, da der Balken bei *0* und *5* frei aufliegt. Jedes der übrigen Stützenmomente kommt bei je zwei aneinander grenzenden Teilen vor. (Z. B. M_1 wirkt sowohl bei Teil *I* als bei Teil *II* als Einspannmoment usw.) Wir erhalten also für die einzelnen Teile *I*, *II* usw. die Beziehungen [vgl. die Gleichungen (V) in § 87]:

$$
\text{Teil } I: \begin{cases} 2\cdot\ 0 + \ \ M_1 = -6\,\dfrac{\mathfrak{F}_{0,1}\cdot\mathfrak{x}_{0,1}}{l_1^2} + 6EJ\cdot\dfrac{\alpha_1}{l_1}, \\[2ex] \ \ 0 + 2M_1 = -6\,\dfrac{\mathfrak{F}_{0,1}\cdot\mathfrak{x}'_{0,1}}{l_1^2} + 6EJ\cdot\dfrac{\beta_1}{l_1}; \end{cases}
$$

$$
\text{Teil } II: \begin{cases} 2\cdot M_1 + \ \ M_2 = -6\,\dfrac{\mathfrak{F}_{0,2}\cdot\mathfrak{x}_{0,2}}{l_2^2} + 6EJ\cdot\dfrac{\alpha_2}{l_2}, \\[2ex] M_1 + 2M_2 = -6\,\dfrac{\mathfrak{F}_{0,2}\cdot\mathfrak{x}'_{0,2}}{l_2^2} + 6EJ\cdot\dfrac{\beta_2}{l_2}; \end{cases}
$$

$$
\text{Teil } III: \begin{cases} 2\cdot M_2 + \ \ M_3 = -6\,\dfrac{\mathfrak{F}_{0,3}\cdot\mathfrak{x}_{0,3}}{l_3^2} + 6EJ\cdot\dfrac{\alpha_3}{l_3}, \\[2ex] M_2 + 2M_3 = -6\,\dfrac{\mathfrak{F}_{0,3}\cdot\mathfrak{x}'_{0,3}}{l_3^2} + 6EJ\cdot\dfrac{\beta_3}{l_3} \end{cases}
$$

usw.

Um nun auf diese Gleichungen die oben aufgestellten Beziehungen 1)—4) anwenden zu können, schreiben wir sie so, daß die Winkel auf einer Seite allein stehen:

$$
\text{Teil } I: \begin{cases} 2\cdot 0\cdot l_1 + \ \ M_1\cdot l_1 + 6\,\dfrac{\mathfrak{F}_{0,1}\cdot\mathfrak{x}_{0,1}}{l_1} = 6EJ\cdot\alpha_1, \\[2ex] 0\cdot l_1 + 2M_1\cdot l_1 + 6\,\dfrac{\mathfrak{F}_{0,1}\cdot\mathfrak{x}'_{0,1}}{l_1} = 6EJ\cdot\beta_1; \end{cases}
$$

Digitized by Google

Teil *II*:
$$\begin{cases} 2\,M_1 \cdot l_2 + \quad M_2 \cdot l_2 + 6\,\dfrac{\mathfrak{F}_{0,2} \cdot \mathfrak{X}_{0,2}}{l_2} = 6\,EJ \cdot \alpha_2\,, \\ M_1 \cdot l_2 + 2\,M_2 \cdot l_2 + 6\,\dfrac{\mathfrak{F}_{0,2} \cdot \mathfrak{X}'_{0,2}}{l_2} = 6\,EJ \cdot \beta_2\,; \end{cases}$$

Teil *III*:
$$\begin{cases} 2\,M_2 \cdot l_3 + \quad M_3 \cdot l_3 + 6\,\dfrac{\mathfrak{F}_{0,3} \cdot \mathfrak{X}_{0,3}}{l_3} = 6\,EJ \cdot \alpha_3\,, \\ M_2 \cdot l_3 + 2\,M_3 \cdot l_3 + 6\,\dfrac{\mathfrak{F}_{0,3} \cdot \mathfrak{X}'_{0,3}}{l_3} = 6\,EJ \cdot \beta_3 \end{cases}$$

usw.

Jetzt haben wir die Gleichungen in einer Form, in der wir die Beziehungen 1)—4) verwenden können. Da nämlich $\beta_1 = -\alpha_2$, also $6\,EJ \cdot \beta_1 = -6\,EJ \cdot \alpha_2$ ist, entsprechend $6\,EJ \cdot \beta_2 = -6\,EJ \cdot \alpha_3$ usw., so ergibt sich aus den obigen Gleichungen:

$$\text{(I)} \quad 0 \cdot l_1 + 2\,M_1 \cdot l_1 + 6\,\frac{\mathfrak{F}_{0,1} \cdot \mathfrak{X}'_{0,1}}{l_1} = -\left(2\,M_1 \cdot l_2 + M_2 \cdot l_2 + 6\,\frac{\mathfrak{F}_{0,2} \cdot \mathfrak{X}_{0,2}}{l_2}\right),$$

$$\text{(II)} \; M_1 \cdot l_2 + 2\,M_2 \cdot l_2 + 6\,\frac{\mathfrak{F}_{0,2} \cdot \mathfrak{X}'_{0,2}}{l_2} = -\left(2\,M_2 \cdot l_3 + M_3 \cdot l_3 + 6\,\frac{\mathfrak{F}_{0,3} \cdot \mathfrak{X}_{0,3}}{l_3}\right)$$

usw.

Diese Gleichungen schreiben wir so, daß links die unbekannten und rechts die bekannten Größen stehen. Dann erhalten wir für das ganze System folgende vier Gleichungen:

$$\text{(I)} \qquad 2\,M_1(l_1 + l_2) + M_2 \cdot l_2 = -6\left(\frac{\mathfrak{F}_{0,1} \cdot \mathfrak{X}'_{0,1}}{l_1} + \frac{\mathfrak{F}_{0,2} \cdot \mathfrak{X}_{0,2}}{l_2}\right),$$

$$\text{(II)} \; M_1 \cdot l_2 + 2\,M_2(l_2 + l_3) + M_3 \cdot l_3 = -6\left(\frac{\mathfrak{F}_{0,2} \cdot \mathfrak{X}'_{0,2}}{l_2} + \frac{\mathfrak{F}_{0,3} \cdot \mathfrak{X}_{0,3}}{l_3}\right),$$

$$\text{(III)} \; M_2 \cdot l_3 + 2\,M_3(l_3 + l_4) + M_4 \cdot l_4 = -6\left(\frac{\mathfrak{F}_{0,3} \cdot \mathfrak{X}'_{0,3}}{l_3} + \frac{\mathfrak{F}_{0,4} \cdot \mathfrak{X}_{0,4}}{l_4}\right),$$

$$\text{(IV)} \; M_3 \cdot l_4 + 2\,M_4(l_4 + l_5) \qquad = -6\left(\frac{\mathfrak{F}_{0,4} \cdot \mathfrak{X}'_{0,4}}{l_4} + \frac{\mathfrak{F}_{0,5} \cdot \mathfrak{X}_{0,5}}{l_5}\right).$$

Durch Auflösung dieser vier Gleichungen ergeben sich die vier Unbekannten M_1, M_2, M_3 und M_4. Die Gleichungen sind ja nicht besonders bequem, immerhin haben wir aber doch ein Mittel, um die Unbekannten zu bestimmen. Ein vierfach statisch unbestimmtes System erfordert natürlich etwas Rechenarbeit. Meistens hat man ja auch nur Balken auf drei oder vier Stützen; dann verkleinert sich die Anzahl der Gleichungen auf 1 resp. 2.

Zusammenfassung. Um bei einem kontinuierlichen Träger die Stützenmomente M_1, M_2 usw. zu ermitteln, denken wir uns den

Digitized by Google

Balken aus einzelnen, frei aufliegenden Teilbalken *I*, *II* usw. bestehend und bestimmen deren *„einfache Momentenflächen“* $\mathfrak{F}_{0,1}$, $\mathfrak{F}_{0,2}$ usw. (Fig. 162d). Dann berechnen wir für diese einzelnen Momentenflächen die Ausdrücke: Flächeninhalt mal Schwerpunktsabstand, dividiert durch Spannweite, und setzen sie in die obigen Gleichungen (I) bis (IV) ein. Deren Auflösung gibt die gesuchten Werte M_1, M_2, M_3 und M_4. Wir nennen diese Gleichungen die *„Clapeyronschen Gleichungen“*.

b) Berechnung der Zwischenmomente.

Nachdem die Stützenmomente bestimmt sind, ergeben sich auch die Momente für die Punkte innerhalb der Stützenweite. Wir tragen z. B. für den Teil *III* die Momente M_2 und M_3 auf und verbinden deren Endpunkte durch eine gerade Linie. Dann ist M'_m das Moment an der Stelle m infolge der an den Enden des Balkens vorhandenen Stützmomente M_2 und M_3 (vgl. auch Fig. 161d und e). Ferner sei $M_{0,m}$ (Fig. 162d) das Moment, wenn der Teil als einfacher, durch die Lasten P beanspruchter Balken betrachtet wird. Insgesamt ergibt sich:

$$M_m = M_{0,m} + M'_m .$$

Die Momente M_0 sind positiv, da diese für einen frei aufliegenden Träger zwischen zwei Stützen bestimmt werden. Die Stützenmomente sind verschieden, meistens negativ. Bei der graphischen Darstellung trägt man von einer Nullachse aus die *positiven* Stützenmomente nach *entgegengesetzter* Seite auf wie die (ebenfalls positiven) Momente M_0 und kann dann die Summe direkt abgreifen. Die *negativen* Stützenmomente trägt man aber nach derselben Seite auf wie die Momente M_0 und kann dann also auch die Differenz der beiden Momente direkt abmessen. In dieser Weise wurden die Momente für die einzelnen Querschnitte in Fig. 162e dargestellt, wobei alle Stützenmomente als negativ angenommen wurden. Wo die einfachen Momentenflächen $\mathfrak{F}_0$ überwiegen, ist das Moment positiv, und umgekehrt. Dementsprechend ist auch die Krümmung des Balkens (Fig. 162b): Bei positivem Moment ist die Wölbung nach oben offen (◡), bei negativem Moment ist sie nach unten offen (◠).

c) Berechnung der Auflagerkräfte und Querkräfte.

Zum Schlusse die Berechnung der Auflagerkräfte. Auf jeden Auflagerpunkt wirken die Drücke der beiden zusammenstoßenden

Digitized by Google

Teilbalken. Deren Auflagerkräfte werden mit Hilfe der für den eingespannten Träger abgeleiteten Formeln bestimmt:

$$A = A_0 - \frac{M_A - M_B}{l},$$

$$B = B_0 + \frac{M_A - M_B}{l}.$$

Hier sind A_0 und B_0 die Auflagerdrücke, die der als frei aufliegend betrachtete Träger infolge der Lasten P ausübt, während $\frac{M_A - M_B}{l}$ den durch die Einspannmomente hervorgerufenen Zusatz angibt.

Um nach diesen Formeln beispielsweise den Auflagerdruck der Stütze C_2 (Fig. 162a) zu ermitteln, muß beachtet werden, daß *zwei* eingespannte Träger, nämlich die Balken *II* und *III* von Fig. 162a, auf diesem Stützpunkte gemeinsam aufliegen. Der Träger *III* übt nach den obigen Formeln einen (linken) Auflagerdruck aus:

$$C_2' = A_{0,3} - \frac{M_2 - M_3}{l_3}.$$

(Hierin ist nach Fig. 162a und c: $A_{0,3} = \frac{P_4 \cdot b + P_5 \cdot a}{l_3}$; M_2 und M_3 sind die Stützenmomente des durchlaufenden Trägers an den Stellen *2* und *3*.) Der eingespannte Träger *II* von Fig. 162a übt auf den Punkt C_2 einen Druck aus:

$$C_2'' = B_{0,2} + \frac{M_1 - M_2}{l_2}.$$

($B_{0,2}$ ist der rechte Auflagerdruck von Träger *II*, wenn dieser als frei aufliegend betrachtet wird; also gleich $\frac{P_3 c}{l_2}$.)

Insgesamt ergibt sich hiermit der Auflagerdruck C_2:

$$C_2 = A_{0,3} - \frac{M_2 - M_3}{l_3} + B_{0,2} + \frac{M_1 - M_2}{l_2}.$$

Die *Querkraft* für eine Stelle m (Fig. 162c) läßt sich wie beim eingespannten Balken auf folgende Weise berechnen: Zunächst betrachten wir den Balken *III* als selbständigen frei aufliegenden Träger und bestimmen in der bekannten Weise die für den Querschnitt m infolge der Lasten P entstehende Querkraft $Q_{0,m}$. Dann fügen wir die Wirkung der Einspannmomente M_2 und M_3

Digitized by Google

hinzu. Insgesamt ergibt sich auf diese Weise z. B. für den Schnitt m (Fig. 162c; vgl. auch § 87):

$$Q_m = Q_{0,m} - \frac{M_2 - M_3}{l_3}.$$

[M_2 und M_3 sind in Fig. 162c entgegengesetzt angenommen als in Fig. 160b, daher die Verschiedenheit im Vorzeichen gegenüber Formel (IV) in § 87.]

Mit den obigen Untersuchungen möge die allgemeine Theorie des durchlaufenden Trägers abgeschlossen werden. Bei einer genaueren Berechnung müssen ferner der Einfluß der Querkräfte auf die Formänderungen und somit auch auf die Stützenmomente, die Wirkung von Stützensenkungen und Temperaturänderungen berücksichtigt werden. Außerdem fehlt noch die Untersuchung einer beweglichen Belastung usw. Hinsichtlich dieser Fragen und einer systematischen Behandlung der statisch unbestimmten Systeme überhaupt sei auf Band III des vorliegenden Buches verwiesen.

§ 89.

Spezialfälle: Träger auf drei und auf vier Stützen. Zusammenhang zwischen Gerberschem und durchlaufendem Träger.

In der Praxis kommen am häufigsten die Träger auf drei und vier Stützen vor. Für diese Träger läßt sich die Berechnung der Stützenmomente usw. noch weiter durch Ableitung geschlossener Formeln vereinfachen.

I. Träger auf drei Stützen. (Fig. 163.)

Beim Träger auf sechs Stützen (Fig. 162) hatten wir vier unbekannte Stützenmomente, zu deren Bestimmung die vier Gleichungen (I) bis (IV) aufgestellt wurden (s. § 88). Jetzt, beim Träger auf drei Stützen (Fig. 163), ist nur das *eine* Stützenmoment M_1 zu bestimmen. Die Anzahl der Gleichungen verringert sich ebenfalls auf *eine*, und zwar auf die Gleichung (I), die ja auf Grund der am Stützpunkte *1* stattfindenden Formänderungen aufgestellt war. Wir haben also zur Ermittlung der Unbekannten die Bedingung:

$$\text{(I)} \qquad 2\,M_1(l_1 + l_2) + M_2 \cdot l_2 = -6\left(\frac{\mathfrak{F}_{0,1} \cdot \mathfrak{x}'_{0,1}}{l_1} + \frac{\mathfrak{F}_{0,2} \cdot \mathfrak{x}_{0,2}}{l_2}\right).$$

Digitized by Google

Da außerdem das Moment M_2 gleich Null ist — denn der Balken liegt bei 2 frei auf —, so bleibt die einfache Gleichung übrig:

$$2\,M_1(l_1 + l_2) = -6\left(\frac{\mathfrak{F}_{0,1}\cdot\mathfrak{x}'_{0,1}}{l_1} + \frac{\mathfrak{F}_{0,2}\cdot\mathfrak{x}_{0,2}}{l_2}\right),$$

$$\text{(I)} \qquad M_1 = -\frac{3}{l_1 + l_2}\left(\frac{\mathfrak{F}_{0,1}\cdot\mathfrak{x}'_{0,1}}{l_1} + \frac{\mathfrak{F}_{0,2}\cdot\mathfrak{x}_{0,2}}{l_2}\right).$$

Um also für irgendeine Belastung das Stützenmoment M_1 zu bestimmen, denken wir uns den Träger Fig. 163a an der Stelle *1* durchschnitten und bestimmen für jeden der einzelnen Balken *I* und *II* die einfachen Momentenflächen $\mathfrak{F}_{0,1}$ und $\mathfrak{F}_{0,2}$ und deren Schwerpunktsabstände $\mathfrak{x}'_{0,1}$ und $\mathfrak{x}_{0,2}$ von den Punkten *0* und *2*. Dann ergibt sich aus dem obigen Ausdruck (I) sofort das gesuchte Moment über der Stütze *1*.

Wir wollen nun für einige besonders wichtige Belastungsfälle die Rechnung vollständig durchführen.

a) Zwei feststehende, verteilte Belastungen; ungleiche Felder.

Es ist (Fig. 163a—c):

$$\mathfrak{F}_{0,1} = \frac{2}{3} l_1 \cdot \frac{g_1 l_1^2}{8} = \frac{g_1 l_1^3}{12}, \qquad \mathfrak{F}_{0,2} = \frac{g_2 l_2^3}{12},$$

$$\mathfrak{x}'_{0,1} = \frac{l_1}{2}, \qquad \mathfrak{x}_{0,2} = \frac{l_2}{2}.$$

Folglich wird:

$$\text{Stützenmoment } M_1 = -\frac{3}{l_1 + l_2}\left(\frac{g_1 l_1^3}{12}\cdot\frac{l_1}{2}\cdot\frac{1}{l_1} + \frac{g_2 l_2^3}{12}\cdot\frac{l_2}{2}\cdot\frac{1}{l_2}\right)$$

$$= -\frac{3}{l_1 + l_2}\left(\frac{g_1 l_1^3}{24} + \frac{g_2 l_2^3}{24}\right),$$

$$\text{(Ia)} \qquad M_1 = -\frac{g_1 l_1^3 + g_2 l_2^3}{8(l_1 + l_2)}.$$

Mit Hilfe des Stützenmomentes ergeben sich dann die Auflagerdrücke (s. § 88):

$$A = A_{0,1} - \frac{M_0 - M_1}{l_1}$$

$$= \frac{g_1 l_1}{2} - \frac{0 - M_1}{l_1},$$

$$\text{(IIa)} \qquad A = \frac{g_1 l_1}{2} + \frac{M_1}{l_1}.$$

Digitized by Google

(Da M_1 negativ ist, ist das zweite Glied des obigen Ausdruckes für A stets negativ.)

$$C = A_{0,2} - \frac{M_1 - 0}{l_2} + B_{0,1} + \frac{0 - M_1}{l_1}$$

$$= A_{0,2} - \frac{M_1}{l_2} + B_{0,1} - \frac{M_1}{l_1}$$

$$= \frac{g_2 l_2}{2} - \frac{M_1}{l_2} + \frac{g_1 l_1}{2} - \frac{M_1}{l_1},$$

$$\text{(IIa)} \quad \begin{cases} C = \dfrac{g_1 l_1}{2} + \dfrac{g_2 l_2}{2} - M_1 \left(\dfrac{1}{l_1} + \dfrac{1}{l_2} \right), \\ B = \dfrac{g_2 l_2}{2} + \dfrac{M_1}{l_2}. \end{cases}$$

(Kontrolle: $A + C + B = g_1 l_1 + g_2 l_2$.)

Aus den einfachen Momentenflächen $\mathfrak{F}_{0,1}$ und $\mathfrak{F}_{0,2}$ und dem Stützenmoment M_1 ergibt sich ferner die gesamte Momentenfläche des Trägers (Fig. 163c). Die Stelle des größten positiven Momentes in der Öffnung l_1 berechnet sich nach Fig. 163a:

$$A - g_1 x = 0,$$

$$x = \frac{A}{g_1}$$

$$= \frac{1}{g_1} \left(\frac{g_1 l_1}{2} + \frac{M_1}{l_1} \right),$$

$$x = \frac{l_1}{2} + \frac{M_1}{g_1 \cdot l_1}.$$

Das Maximalmoment selber ergibt sich durch direkte Ausrechnung:

$$M = A \cdot \frac{x}{2}$$

$$= \frac{A \cdot A}{2 g_1},$$

$$\text{(IIIa)} \qquad M = \frac{1}{2 g_1} \left(\frac{g_1 l_1}{2} + \frac{M_1}{l_1} \right)^2.$$

In entsprechender Weise finden wir das größte positive Moment der rechten Öffnung:

$$\text{(IIIb)} \qquad M = \frac{1}{2 g_2} \left(\frac{g_2 l_2}{2} + \frac{M_1}{l_2} \right)^2.$$

In Fig. 163d sind die Momente der einzelnen Stellen von einer horizontalen Linie aus aufgetragen, um die Verteilung der positiven und negativen Momente deutlich zu zeigen.

Digitized by Google

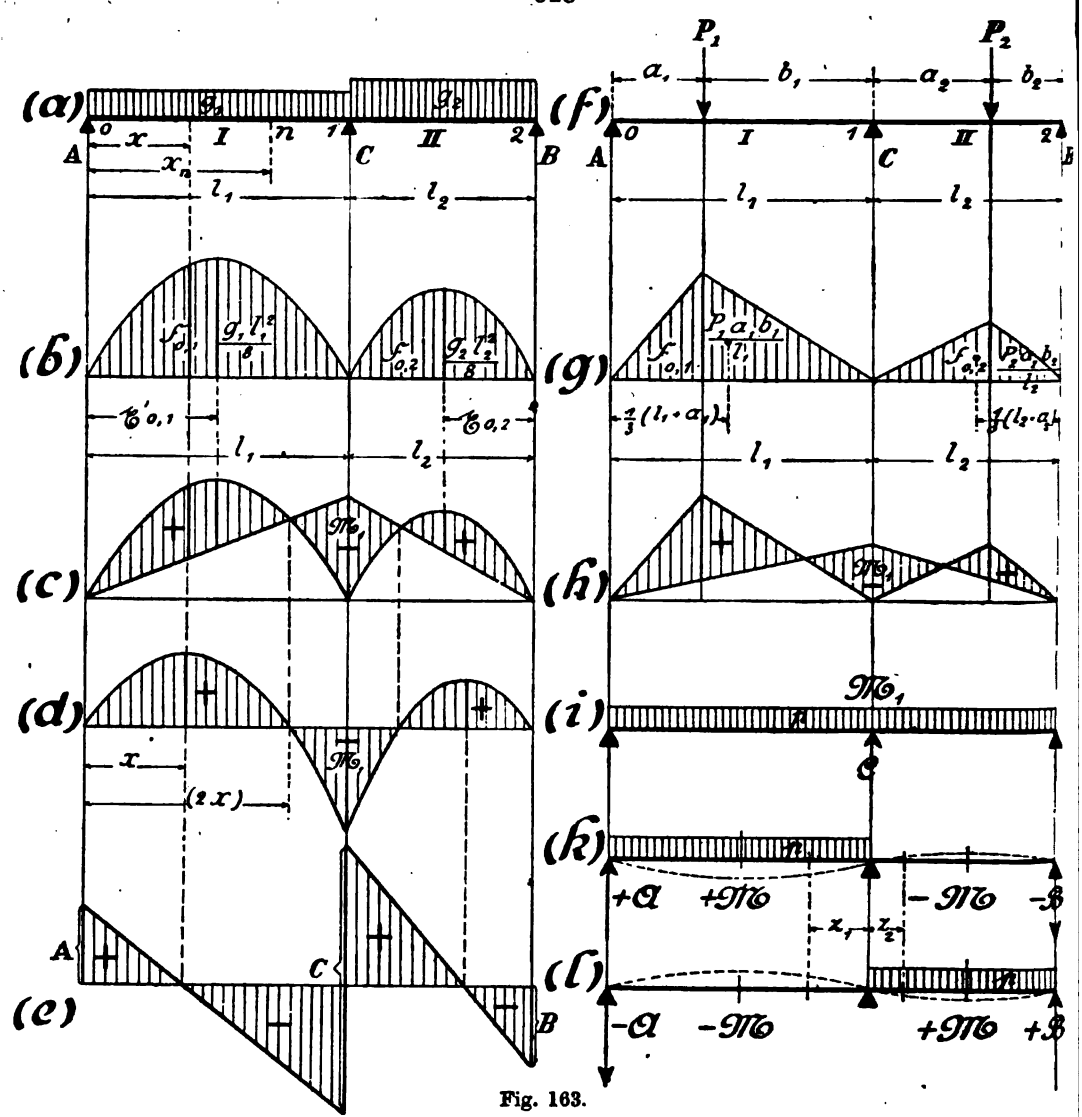


Fig. 163.

Die Querkraft für eine Stelle n ergibt sich durch direkte Ausrechnung:

$$\text{(IV a)} \qquad Q_n = A - g_1 \cdot x_n .$$

In Fig. 163e sind sämtliche Querkräfte dargestellt.

Somit ist der Belastungsfall Fig. 163a vollständig erledigt.

b) Gleichmäßig verteilte Gesamtbelastung g; gleiche Felder.

Für den wichtigen Fall, daß in Fig. 163a die Felder l_1 und l_2 und ferner die Belastungen g_1 und g_2 je einander gleich werden,

Digitized by Google

lassen sich die Gleichungen noch weiter vereinfachen. Setzen wir in die abgeleiteten Formeln

$$l_1 = l_2 = l,$$

ferner

$$g_1 = g_2 = g$$

ein, so wird:

Stützenmoment $M_1 = -\frac{2 g l^3}{8 \cdot 2 l}$,

(Ib) $$M_1 = -\frac{g l^2}{8} = -0{,}125\, g l^2 .$$

Auflagerdrücke $A = B = \frac{g l}{2} + \frac{-g l^2}{8 \cdot l}$

$$= \frac{g l}{2} - \frac{g l}{8},$$

(IIb) $$\begin{cases} A = B = \frac{3}{8} g l, \\ C = \frac{5}{4} g l . \end{cases}$$

Größtes positives Moment $M = \frac{1}{2 g}\left(\frac{g l}{2} - \frac{g l^2}{8 l}\right)^2$

$$= \frac{1}{2 g}\left(\frac{3 g l}{8}\right)^2$$

$$= \frac{9 g^2 l^2}{2 g \cdot 64},$$

(IIIb) $$M = +0{,}0703\, g l^2 .$$

(Die Stelle des größten positiven Momentes ist bestimmt durch $x = \frac{A}{g} = \frac{3}{8} l$.)

Aus diesen Formeln ist folgendes ersichtlich: Das größte Moment am durchlaufenden Balken auf drei Stützen mit gleichen Feldern und gleichmäßiger Belastung ist ebenso groß wie die größten auftretenden Momente, wenn man an Stelle des durchlaufenden Trägers zwei einzelne Balken je von der Spannweite l nehmen würde. Der Auflagerdruck der Mittelstütze ist sogar größer, nämlich $\frac{5}{4} g l$ gegenüber $2 \cdot \frac{1}{2} g l$.

c) Feststehende Einzellasten.

Die Momentenflächen für den Fall, daß die beiden Balken *I* und *II* als selbständige, frei aufliegende Träger betrachtet werden, sind in Fig. 163g gezeichnet. Es ist:

Digitized by Google

$$\mathfrak{F}_{0,1} = \frac{1}{2} l_1 \cdot P_1 \frac{a_1 b_1}{l_1} = \frac{P_1 a_1 b_1}{2}, \qquad \mathfrak{F}_{0,2} = \frac{P_2 a_2 b_2}{2},$$

$$\mathfrak{x}'_{0,1} = \frac{1}{3}(l_1 + a_1), \qquad \mathfrak{x}_{0,2} = \frac{1}{3}(l_2 + b_2).$$

Hiermit ergibt sich aus Formel (I)

$$M_1 = -\frac{3}{l_1 + l_2}\left(\frac{P_1 a_1 b_1}{2} \cdot \frac{l_1 + a_1}{3} \cdot \frac{1}{l_1} + \frac{P_2 a_2 b_2}{2} \cdot \frac{l_2 + b_2}{3} \cdot \frac{1}{l_2}\right).$$

Setzt man in diese Formel für b_1 und a_2 die Werte ein (Fig. 163f):

$$b_1 = l_1 - a_1, \quad a_2 = l_2 - b_2,$$

so folgt nach einer einfachen Umformung das Stützenmoment:

$$\text{(Ic)} \qquad M_1 = -\frac{1}{2(l_1 + l_2)}\left(\frac{P_1 a_1 (l_1^2 - a_1^2)}{l_1} + \frac{P_2 b_2 (l_2^2 - b_2^2)}{l_2}\right).$$

Sobald dann M_1 ausgerechnet ist, ergeben sich die anderen Größen:

$$\text{(IIc)} \qquad \begin{cases} A = \dfrac{P_1 b_1}{l_1} + \dfrac{M_1}{l_1}, \\ C = \dfrac{P_1 a_1}{l_1} + \dfrac{P_2 b_2}{l_2} - M_1\left(\dfrac{1}{l_1} + \dfrac{1}{l_2}\right), \\ B = \dfrac{P_2 a_2}{l_2} + \dfrac{M_1}{l_2}. \end{cases}$$

(M_1 ist eine negative Zahl. Bei A und B ist das letzte Glied also in Wirklichkeit negativ, bei C positiv.)

Die gesamte Momentenfläche ist in Fig. 163h konstruiert. Die größten positiven Momente sind

$$\text{(IIIc)} \qquad \begin{cases} M = +A \cdot a_1 \quad \text{bzw.} \\ \quad\; = +B \cdot b_2. \end{cases}$$

Aufgabe: Man vervollständige die Formeln für den Fall, daß in jeder Öffnung mehrere Lasten vorhanden sind! Ferner entwickle man die Formeln für zwei gleiche Felder mit symmetrisch angeordneten Lasten!

d) Bewegliche verteilte Belastung p.

Bei einer beweglichen Belastung kommt es vor allen Dingen darauf an, die Laststellungen aufzufinden, die das größte Stützenmoment, den größten Auflagerdruck A usw. hervorrufen. Sobald diese Laststellungen ermittelt sind, ist es leicht, mit Hilfe der entwickelten allgemeinen oder speziellen Formeln die gesuchten Größen M_1, A usw. zu berechnen.

Digitized by Google

Die Ermittlung dieser „gefährlichen Laststellungen“ geschieht am übersichtlichsten an Hand von Einflußlinien (s. des Verfassers „Statisch unbestimmte Systeme“). Für einige Fälle lassen sie sich jedoch aus den Formeln (Ic)—(IIIc) ablesen, da diese durch ihre Vorzeichen angeben, welchen Beitrag eine in der linken oder in der rechten Öffnung befindliche Last zu der gesuchten Größe liefert. In anderen Fällen mögen einfach die Resultate mitgeteilt werden.

Das *Stützenmoment* M_1: Aus Formel (Ic) folgt, daß sowohl die Belastung der linken als auch der rechten Öffnung ein negatives Stützenmoment erzeugt. Das größte (negative) Stützenmoment entsteht also bei *Vollbelastung* beider Öffnungen (Fig. 163 i). Jetzt, da diese Laststellung als die für M_1 gefährliche Stellung erkannt ist, kann die Ausrechnung von M_1 mit Hilfe von Formel (Ia) bzw. (Ib) geschehen. Auf diese Weise ist der größte Wert von M_1 infolge der beweglichen Belastung p bestimmt. Positiv kann M_1 überhaupt nicht werden, wie aus Formel (Ic) folgt. Der Balken biegt sich also an der Stelle *1* stets nach unten hohl durch (⌒).

Der ***Auflagerdruck*** C: Dieselbe gefährliche Laststellung Fig. 163 i. Es entsteht stets ein *positiver* Auflagerdruck, d. h. der Träger hat bei keiner Laststellung das Bestreben, sich vom Lager C abzuheben.

Die ***Auflagerdrücke*** A und B: Es treten je nach der Laststellung positive oder negative Auflagerdrücke auf. Fig. 163 k zeigt die Laststellung, die für das größte positive A und das größte negative B maßgebend ist. (Ausrechnung von A und B mittels der Formeln (IIa), indem $g_2 = 0$ eingesetzt wird.) Umgekehrt, bei Belastung der rechten Seite, entstehen der größte positive Wert von B und der größte negative von A. Falls ein solcher Träger mit einer beweglichen Last p keine genügende ständige Last hat, müssen die Lager A und B verankert werden, da sonst je nach der Laststellung ein Aufklappen an den Enden stattfinden würde.

Die *Zwischenmomente* M: Das größte positive Moment eines Querschnittes der linken Seite und gleichzeitig das größte negative Moment eines Querschnittes der rechten Öffnung entstehen bei Belastung nach Fig. 163 k (s. die Durchbiegung des Balkens). Die Ermittlung der Momente und insbesondere die Bestimmung des Maximalmomentes geschieht durch direkte Ausrechnung oder durch Aufzeichnen der Momentenfläche für die drei Belastungs-

Digitized by Google

fälle Fig. 163i—l. Umgekehrt erzeugt die Belastung der rechten Öffnung das größte positive M und das größte negative M. Falls beide Öffnungen gleich groß sind, ist das größte positive Moment des Balkens

$$M = 0{,}095\, g\, l^2\,,$$

und zwar tritt dieses im Abstande

$$x = 0{,}4\, l$$

vom Ende auf. Das größte negative Moment des Balkens ist stets das Stützenmoment, und zwar ist dieses

$$M_1 = -0{,}125\, g\, l^2\,.$$

Zusatz: Für die Querschnitte innerhalb $z_1 = \dfrac{l_1^2}{3\,l_1 + 2\,l_2}$ und $z_2 = \dfrac{l_2^2}{2\,l_1 + 3\,l_2}$ ist *streckenweise* Belastung der einzelnen Öffnungen maßgebend. Für diese Querschnitte nehme man einfach M_1 als maßgebendes Moment. (Die positiven Momente sind hier sehr klein.)

e) Bewegliche Einzellasten.

Man nehme die bewegliche Lastengruppe in verschiedenen Stellungen an, berechne jedesmal nach Formel (Ic) das Stützenmoment und nach den Formeln (IIIc) das größte positive Moment. Auf diese Weise bestimmt man für jede Balkenstelle das größte Moment. Gleichzeitig ermittelt man die Auflagerdrücke. Der Fall c) gibt einen Anhalt für die gefährlichen Laststellungen. Bei einfachen Belastungen (Laufkatzen) geht das Verfahren durchaus schnell genug.

II. Träger auf vier Stützen.

Beim Träger auf vier Stützen sind zwei Stützenmomente unbekannt, M_1 und M_2 (Fig. 164a). Zu deren Berechnung stehen die beiden Gleichungen zur Verfügung (§ 88):

$$2\,M_1(l_1 + l_2) + M_2\, l_2 = -6\left(\frac{\mathfrak{F}_{0,1}\cdot \mathfrak{x}'_{0,1}}{l_1} + \frac{\mathfrak{F}_{0,2}\cdot \mathfrak{x}_{0,2}}{l_2}\right),$$

$$M_1\cdot l_2 + 2\,M_2(l_2 + l_3) = -6\left(\frac{\mathfrak{F}_{0,2}\cdot \mathfrak{x}'_{0,2}}{l_2} + \frac{\mathfrak{F}_{0,3}\cdot \mathfrak{x}_{0,3}}{l_3}\right).$$

Die rechten Seiten der obigen Gleichungen wollen wir zur Abkürzung mit N_1 und N_2 bezeichnen. Löst man die beiden Glei-

Digitized by Google

chungen nach den beiden Unbekannten M_1 und M_2 auf, so ergibt sich:

$$(1)\quad \begin{cases} M_1 = \dfrac{N_1 \cdot 2(l_2 + l_3) - N_2 \cdot l_2}{4(l_1 + l_2)(l_2 + l_3) - l_2^2}\,, \\[2ex] M_2 = \dfrac{N_2 \cdot 2(l_1 + l_2) - N_1 \cdot l_2}{4(l_1 + l_2)(l_2 + l_3) - l_2^2}\,. \end{cases}$$

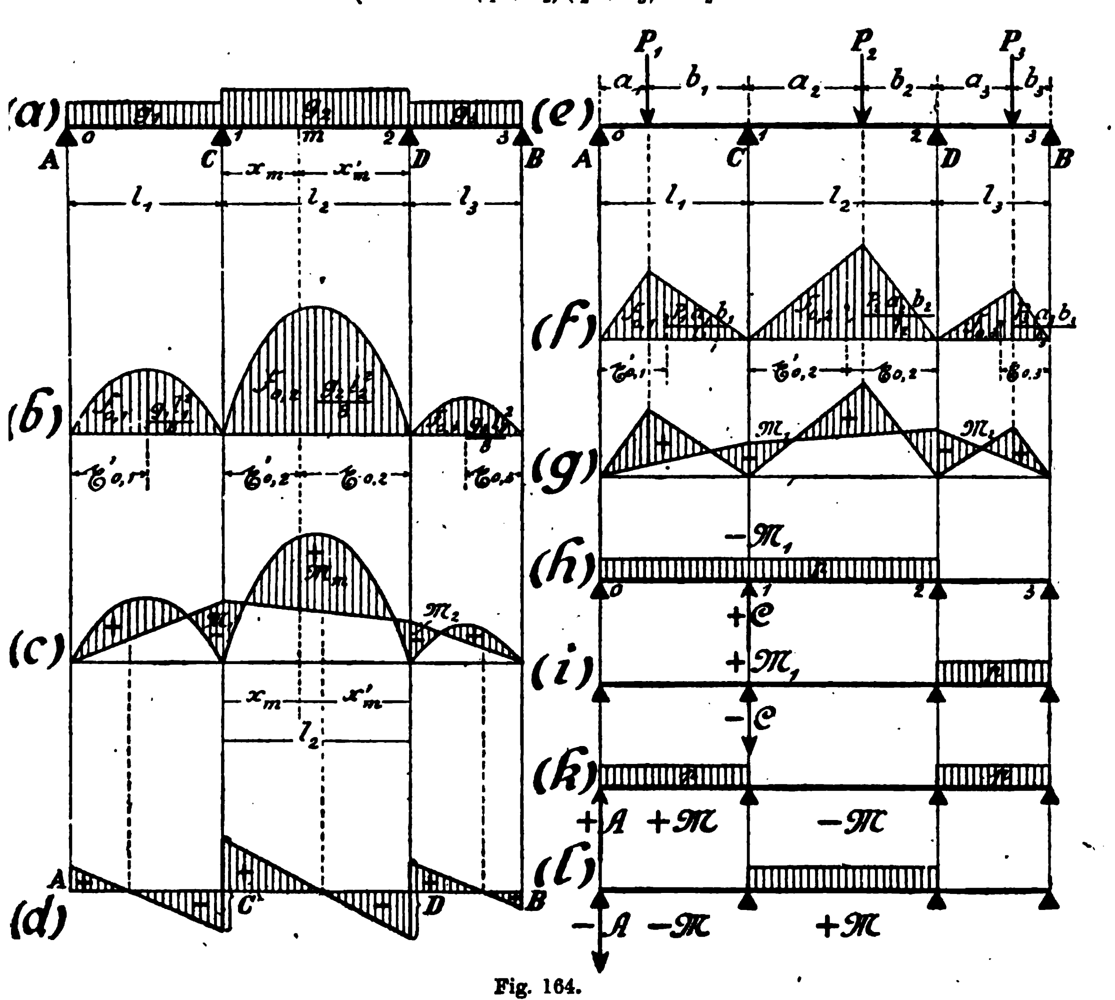


Fig. 164.

In diesen Gleichungen bedeuten also:

$$N_1 = -6\left(\frac{\mathfrak{F}_{0,1} \cdot \mathfrak{x}'_{0,1}}{l_1} + \frac{\mathfrak{F}_{0,2} \cdot \mathfrak{x}_{0,2}}{l_2}\right),$$

$$N_2 = -6\left(\frac{\mathfrak{F}_{0,2} \cdot \mathfrak{x}'_{0,2}}{l_2} + \frac{\mathfrak{F}_{0,3} \cdot \mathfrak{x}_{0,3}}{l_3}\right).$$

Digitized by Google

Für einige wichtige Fälle möge nun die Rechnung durchgeführt werden.

a) Drei ungleiche Felder mit fester, verteilter Belastung.

Es ist (Fig. 164a und b):

$$\mathfrak{F}_{0,1} = \frac{g_1 l_1^3}{12}; \qquad \mathfrak{F}_{0,2} = \frac{g_2 l_2^3}{12}; \qquad \mathfrak{F}_{0,3} = \frac{g_3 l_3^3}{12},$$

$$\mathfrak{x}'_{0,1} = \frac{l_1}{2}; \quad \mathfrak{x}_{0,2} = \mathfrak{x}'_{0,2} = \frac{l_2}{2}; \qquad \mathfrak{x}_{0,3} = \frac{l_3}{2}.$$

Hiermit wird

$$N_1 = -\frac{1}{4}(g_1 l_1^3 + g_2 l_2^3),$$

$$N_2 = -\frac{1}{4}(g_2 l_2^3 + g_3 l_3^3).$$

Diese Werte in die Gleichungen eingesetzt, ergibt:

$$(1\text{a}) \qquad \begin{cases} M_1 = \dfrac{-2(g_1 l_1^3 + g_2 l_2^3)(l_2 + l_3) + (g_2 l_2^3 + g_3 l_3^3)\, l_2}{4[4(l_1 + l_2)(l_2 + l_3) - l_2^2]}, \\[2ex] M_2 = \dfrac{-2(g_2 l_2^3 + g_3 l_3^3)(l_1 + l_2) + (g_1 l_1^3 + g_2 l_2^3)\, l_2}{4[4(l_1 + l_2)(l_2 + l_3) - l_2^2]}. \end{cases}$$

Sobald dann M_1 und M_2 ausgerechnet sind, finden wir die Auflagerdrücke:

$$(2\text{a}) \qquad \begin{cases} A = \dfrac{g_1 l_1}{2} + \dfrac{M_1}{l_1}, \\[2ex] C = \left(\dfrac{g_1 l_1}{2} - \dfrac{M_1}{l_1}\right) + \left(\dfrac{g_2 l_2}{2} - \dfrac{M_1 - M_2}{l_2}\right) \\[2ex] \quad = \dfrac{g_1 l_1}{2} + \dfrac{g_2 l_2}{2} - M_1\left(\dfrac{1}{l_1} + \dfrac{1}{l_2}\right) + \dfrac{M_2}{l_2} \end{cases}$$

usw.

Die Zwischenmomente sind (nach § 88)

$$(3\text{a}) \qquad M_m = \frac{1}{2} g_2 x_m \cdot x'_m + \frac{M_1 \cdot x'_m}{l_2} + \frac{M_2 \cdot x_m}{l_2}.$$

In den Endöffnungen ergeben sich die Momente auch durch direkte Ausrechnung, nachdem A und C bestimmt sind. Die gesamte Momentenfläche zeigt Fig. 164c, die gesamte Querkraftfläche Fig. 164d. Das größte positive Moment in der ersten Außenöffnung ist

$$M = \frac{A^2}{2 g_1}.$$

Digitized by Google

In der Mittelöffnung wird die Lage des größten positiven Momentes aus der Bedingung bestimmt, daß an dieser Stelle die Querkraft aus dem positiven in den negativen Teil übergeht.

b) Gleichmäßig verteilte Gesamtlast; gleiche Felder.

Falls

$$l_1 = l_2 = l_3 = l,$$
$$g_1 = g_2 = g_3 = g$$

wird, nehmen die Formeln folgende einfache Gestalt an:

$$(1\,\mathrm{b}) \qquad M_1 = M_2 = \frac{g\,l^2}{10} = 0{,}1\,g\,l^2;$$

$$(2\,\mathrm{b}) \qquad \begin{cases} A = B = \dfrac{2}{5}\,g\,l, \\ C = D = \dfrac{11}{10}\,g\,l. \end{cases}$$

Die größten positiven Momente sind:

$$(3\,\mathrm{b}) \qquad \begin{cases} \text{in den Endöffnungen} & M = 0{,}08\,g\,l^2, \\ \text{„ der Mittelöffnung} & M = 0{,}025\,g\,l^2. \end{cases}$$

(Die ersteren treten in den Abständen $0{,}4\,l$ von den Endlagern auf.) Maßgebend sind die Stützenmomente.

c) Feststehende Einzellasten.

Nach Fig. 164e und f sind:

$$\mathfrak{F}_{0,1} = \frac{P_1\,a_1\,b_1}{2}; \qquad \mathfrak{F}_{0,2} = \frac{P_2\,a_2\,b_2}{2}; \qquad \mathfrak{F}_{0,3} = \frac{P_3\,a_3\,b_3}{2},$$

$$\mathfrak{x}'_{0,1} = \frac{1}{3}(l_1 + a_1); \quad \mathfrak{x}_{0,2} = \frac{1}{3}(l_2 + b_2), \quad \mathfrak{x}'_{0,2} = \frac{1}{3}(l_2 + a_2); \quad \mathfrak{x}_{0,3} = \frac{1}{3}(l_3 + b_3).$$

Hiermit werden die Werte

$$N_1 = -\left[\frac{P_1\,a_1(l_1^2 - a_1^2)}{l_1} + \frac{P_2\,b_2(l_2^2 - b_2^2)}{l_2}\right],$$

$$N_2 = -\left[\frac{P_2\,a_2(l_2^2 - a_2^2)}{l_2} + \frac{P_3\,b_3(l_3^2 - b_3^2)}{l_3}\right].$$

Wenn man diese Werte in die Formeln (1) einsetzt, ergeben sich recht umständliche Ausdrücke. Deshalb ist es besser, N_1 und N_2 sofort zahlenmäßig auszurechnen und dann in die Formel (1) einzusetzen.

Digitized by Google

Sobald die Stützenmomente M_1 und M_2 bestimmt sind, ergeben sich in bekannter Weise die Stützendrücke und die übrigen Momente (Fig. 164g).

d) Bewegliche verteilte Belastung p.

In Fig. 164 (h—l) sind die gefährlichen Laststellungen gezeichnet und jedesmal angegeben, für welche Untersuchung die betreffende Stellung maßgebend ist. Die Stützenmomente können sowohl positiv als auch negativ sein; d. h., je nach der Laststellung biegt sich der Balken über den Stützpunkten nach oben (◡) oder nach unten (◠) hohl. Für die Querschnitte der Mittelöffnung, die nahe den Mittelstützen liegen, ist außerdem eine teilweise Belastung einer Öffnung maßgebend. Doch braucht darauf nicht eingegangen zu werden, da man diesen Querschnitten einfach die Stützenmomente, als die größeren, zugrunde legt. Auf Grund der gefährlichen Laststellungen werden dann nach Belastungsfall *a)* die einzelnen Werte M_1 usw. ausgerechnet. Für den besonderen Fall, daß

$$l_1 = l_2 = l_3 = l$$

ist, lassen sich zur Bestimmung der Größtwerte folgende Formeln aufstellen:

$$M_1 = -0{,}1167\,p\,l^2,$$
$$= +0{,}0167\,p\,l^2.$$

Größte positive Momente

in den Endfeldern: $M = +0{,}100\,p\,l^2$,
im mittleren Felde: $M' = +0{,}075\,p\,l^2$.

e) Bewegliche Einzellasten.

Es gilt das gleiche wie für den Träger auf drei Stützen.

III. Der Zusammenhang zwischen Gerberschem Träger und durchlaufendem Träger.

Aus der Momentenfläche eines durchlaufenden Trägers ist ersichtlich, daß die Momente an einzelnen Stellen gleich Null sind. An diesen Punkten treten also nur Querkräfte auf. Wenn man demnach den Balken an diesen Stellen durchschneiden und die einzelnen Teile durch Gelenke verbinden würde, so würde hierdurch gar keine Änderung hinsichtlich Momente, Auflagerkräfte usw. hervorgerufen werden. Denn eine Querkraft kann auch durch

Digitized by Google

ein Gelenk aufgenommen werden, und ein Biegungswiderstand ist ja an diesen Stellen nicht erforderlich.

Betrachten wir nun einen Träger mit Gelenken (Fig. 165a). Hier sind durch die Konstruktion die Stellen vorgeschrieben, an denen das Moment gleich Null ist; nämlich die Gelenkpunkte. Der *Gerber*sche Träger kann also als ein durchlaufender Balken aufgefaßt werden, bei dem eine Anzahl Stellen, an denen das Moment gleich Null ist, von vornherein festgelegt ist.

Aus dieser Betrachtung ergibt sich folgende Konstruktion der Momentenfläche eines *Gerber*schen Trägers. Zunächst zeichnen wir für die Spannweiten l_1, l_2 usw. die einfachen Momentenflächen

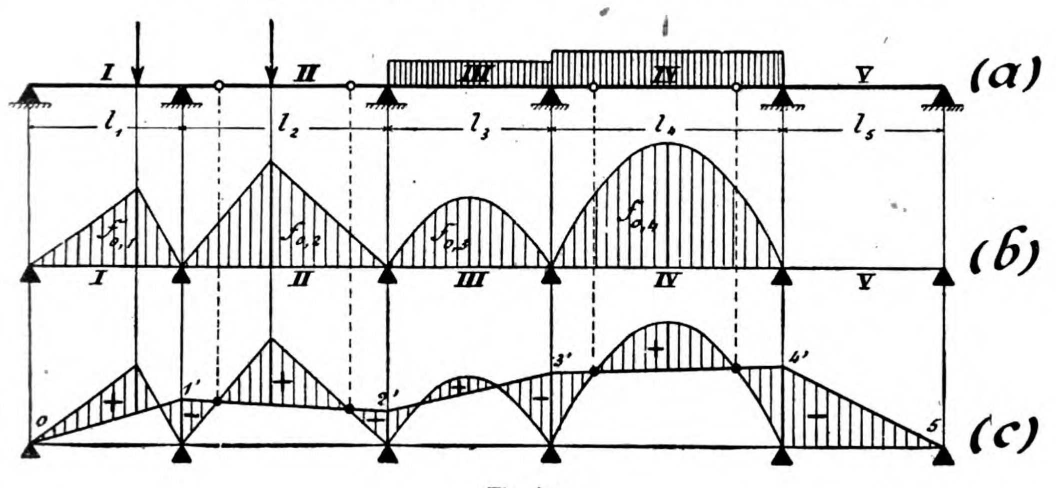


Fig. 165.

(Fig. 165b). Dann loten wir die Gelenkpunkte hinunter und legen den „Stützenlinienzug" *0 1′ 2′ . . 5*, durch den die Stützenmomente bestimmt werden, so, daß zu den Gelenkpunkten die Momente Null entstehen. Auf diese Weise ist die gesamte Momentenfläche bestimmt (Fig. 165c). Zur bequemeren Übersicht kann man dann die Momente auch noch von einer Horizontalen aus abtragen.

Hat ein durchlaufender Träger n Stützen, so treten $(n - 2)$ unbekannte Stützenmomente auf, zu deren Berechnung ebensoviel *Clapeyron*sche Gleichungen angeschrieben werden müssen. Will man diesen Träger statisch bestimmt machen, so müssen $(n - 2)$ Gelenke eingelegt werden. Hierdurch werden $(n - 2)$ Nullpunkte der Momentenfläche festgelegt, und diese reichen zum Aufzeichnen des gesamten Stützenlinienzuges aus. Auf diese Weise kann man statisch unbestimmte Konstruktionen in statisch bestimmte verwandeln.

Digitized by Google

16. Vortrag:

Biegung durch exzentrischen Zug oder Druck.

Bisher haben wir in der Festigkeitslehre nur die beiden Fälle der Beanspruchung untersucht: 1. Die Kräfte wirken in Richtung der Stabachse und zwar so, daß ihre Resultierende in der Stabachse liegt (reine Normalfestigkeit); 2. die Kräfte wirken rechtwinklig zur Stabachse (Biegung). Jetzt wollen wir den Fall betrachten, daß die Kräfte in Richtung der Stabachse wirken, aber so, daß die Resultierende der Kräfte seitlich von der Stabachse liegt. Wir werden sehen, daß dieser Belastungsfall die beiden obigen in sich enthält. Wir nennen ihn „exzentrische Zug- resp. Druckbelastung", weil die Resultierende außerhalb des Mittelpunktes liegt. Er ist besonders wichtig für die Berechnung von Stützen, Pfeilern, Fundamenten usw.

§ 90.

Spannungen bei zug- und druckfestem Material.

In Fig. 166a ist ein derartig belasteter Körper gezeichnet. Die Kraft P (die auch die Resultierende mehrerer Kräfte darstellen kann) liegt seitlich vom Schwerpunkte. Wir wollen uns die Aufgabe stellen, die Spannungen in einem Schnitte α—α zu ermitteln. Hierbei sei vorausgesetzt, daß die Konstruktion sowohl Zug als auch Druck aufnehmen kann (z. B. eiserne Säulen); später werden wir den Fall behandeln, daß das Material nur gegen Druck widerstandsfähig ist (Mauerwerk).

I. Elementare Methode.

Infolge der Last P wird der Körper nach der rechten Seite hin abgebogen. Um den Teil I im Gleichgewicht zu halten, müssen auf ihn vom Teile II aus innere Kräfte ausgeübt werden. Ein Teil von diesen wird als Zugkräfte, der andere als Druckkräfte wirken. In Fig. 166b und d ist angenommen, daß in den Flächenstreifen f_1—f_5 Zugkräfte, und in den Streifen f_6, f_7, f_8 Druckkräfte übertragen werden. Ferner bedeuten im Querschnitt Fig. 166d: S den Schwerpunkt der Fläche, K den senkrecht unter der Last P liegenden Punkt, und n—n die Linie, in der die Spannungen aus dem positiven in den negativen Teil übergehen (Nullinie). Wir führen die ganze Untersuchung nur für den Fall durch, daß die Kraft P auf der Symmetrieachse x—x liegt.

Digitized by Google

Die Spannungen, d. h. die Kräfte *pro Flächeneinheit*, der einzelnen Flächenstreifen nennen wir σ_1, σ_2 usw. Hinsichtlich dieser Spannungen machen wir folgende Annahme: Die in einem Streifen auftretende Spannung sei proportional dem Abstande z dieses Streifens von der Nullinie n—n. Graphisch drückt sich diese Annahme in der Weise aus: Wenn wir die Spannungen von

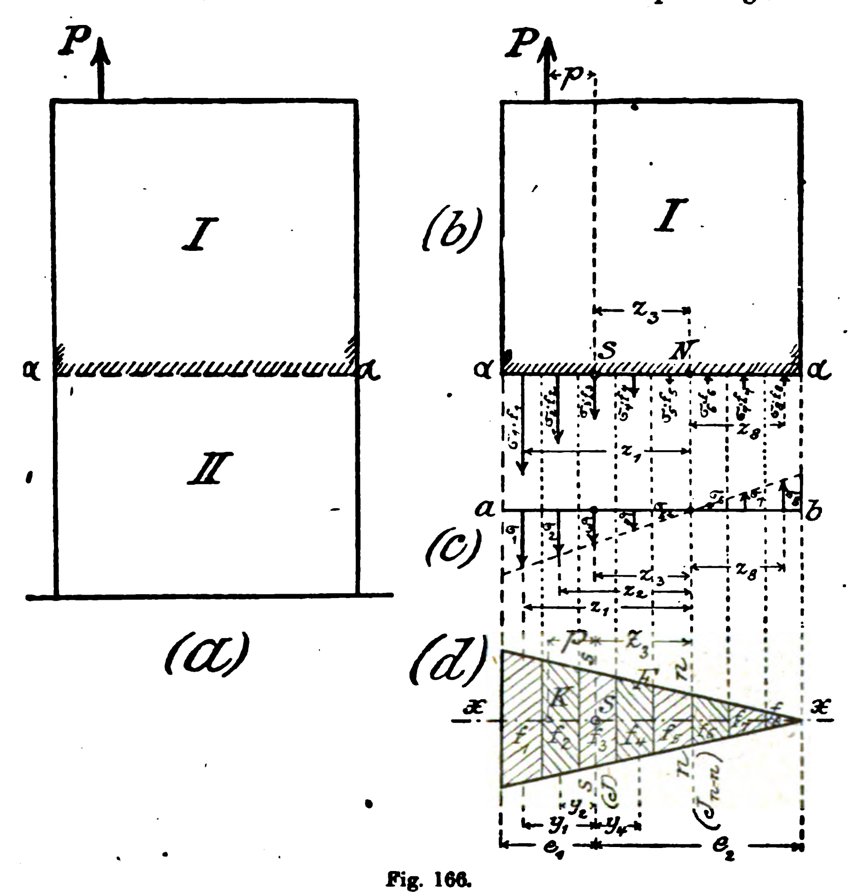


Fig. 166.

einer Geraden aus (Fig. 166 c) als Strecken aufgetragen denken, und zwar nach der einen Seite die positiven und nach der anderen die negativen, so liegen die Endpunkte dieser Strecken auf einer *geraden* Linie. Man beachte aber, daß diese Annahme sich nur auf die Spannungen bezieht. Die gesamten, in den einzelnen Streifen übertragenen Kräfte ergeben sich durch Multiplikation mit den betreffenden Flächeninhalten. Da letztere für die einzelnen Streifen verschieden groß sind, so werden die Ge-

Digitized by Google

samtspannkräfte bei einer graphischen Darstellung natürlich nicht mehr auf einer Geraden liegen (Fig. 166b).

a) Die Spannung im Schwerpunkte.

Zunächst wollen wir die Spannung σ_3 in dem Streifen bestimmen, in dem der Schwerpunkt S liegt. Aus dem Gleichgewicht des Teiles I folgt ($R_y = 0$):

$$+P - \sigma_1 f_1 - \sigma_2 f_2 - \ldots - \sigma_5 f_5 + \sigma_6 f_6 + \ldots + \sigma_8 f_8 = 0$$

$$- \sigma_1 f_1 - \sigma_2 f_2 - \ldots - \sigma_5 f_5 + \sigma_6 f_6 + \ldots + \sigma_8 f_8 = -P\,.$$

Um nun hieraus σ_3 zu finden, drücken wir alle übrigen Spannungen durch σ_3 aus. Es ist nach Fig. 166c:

$$\sigma_1 : \sigma_3 = z_1 : z_3\,; \quad \text{hieraus} \quad \sigma_1 = \frac{\sigma_3}{z_3} \cdot z_1\,,$$

$$\sigma_2 : \sigma_3 = z_2 : z_3\,; \quad \text{„} \quad \sigma_2 = \frac{\sigma_3}{z_3} \cdot z_2\,,$$

usw.

(Unter z_1, z_2 usw. sind die Abstände der einzelnen Streifen von der spannungslosen Linie n—n verstanden.) Dann erhalten wir

$$-\frac{\sigma_3}{z_3} \cdot z_1 f_1 - \frac{\sigma_3}{z_3} \cdot z_2 f_2 - \frac{\sigma_3}{z_3} \cdot z_3 f_3 - \ldots + \frac{\sigma_3}{z_3} \cdot z_6 f_6 + \ldots + \frac{\sigma_3}{z_3} \cdot z_8 f_8 = -P\,,$$

$$-\frac{\sigma_3}{z_3} \cdot (+f_1 z_1 + f_2 z_2 + \ldots - f_6 z_6 - \ldots - f_8 z_8) = -P\,.$$

Der Ausdruck in der Klammer ist die Summe der Produkte: Flächenstreifen $\times$ Abstand von der Linie n—n. Statt dessen nehmen wir: gesamte Fläche $F \times$ Abstand z_s des Schwerpunktes von der Linie n—n. Hinsichtlich des Vorzeichens für dieses Produkt $F \cdot z_s$ sehen wir: Der Schwerpunkt S liegt auf derselben Seite wie die Streifen f_1 bis f_5. Da nun letztere in der obigen Klammer das positive Vorzeichen haben, so muß auch das Produkt $F \cdot z_s$ mit positivem Vorzeichen genommen werden. Wir erhalten also:

$$(+f_1 z_1 + f_2 z_2 + \ldots - f_6 z_6 - f_7 z_7 - f_8 z_8) = +F \cdot z_3\,.$$

Hiermit geht die obige Gleichung über in:

$$-\frac{\sigma_3}{z_3} \cdot F \cdot z_3 = -P\,,$$

$$-\sigma_3 F = -P\,,$$

$$\text{(I)} \qquad \sigma_3 = +\frac{P}{F}\,.$$

Durch diese Gleichung ist die Spannung in demjenigen Flächenstreifen, der den Schwerpunkt enthält, bestimmt. Das

Digitized by Google

Pluszeichen bedeutet, daß die von vornherein gemachte Annahme, daß σ_3 eine Zugspannung sei, richtig ist. Die Gleichung (I) enthält folgende wichtige Aussage: *Bei exzentrischer Zug- oder Druckbelastung ist die Spannung im Schwerpunkte* (d. h. in dem den Schwerpunkt enthaltenden Flächenstreifen) *genau so groß, als wenn die Last P zentrisch angreifen würde, nämlich gleich* $\frac{P}{F}$. Wenn die Last P als Zugkraft wirkt, ist auch die Spannung im Schwerpunkt eine Zugspannung; entsprechend bei P als Druckkraft.

b) Abstand der Nullinie vom Schwerpunkte.

Nun wollen wir den Abstand z_3 bestimmen, den die Nullinie $n—n$ vom Schwerpunkte S hat. Hierzu dient die Gleichung $\Sigma M = 0$. Als Bezugspunkt werde Punkt N (Fig. 166b) genommen. Dann wird:

$$P(p + z_3) = \sigma_1 f_1 \cdot z_1 + \sigma_2 f_2 \cdot z_2 + \sigma_3 f_3 \cdot z_3 + \sigma_4 f_4 \cdot z_4 + \ldots + \sigma_8 f_8 \cdot z_8 .$$

Nun drücken wir noch sämtliche anderen Spannungen durch die bereits bekannte Spannung σ_3 aus und erhalten

$$+\frac{\sigma_3}{z_3} z_1 f_1 \cdot z_1 + \frac{\sigma_3}{z_3} z_2 f_2 \cdot z_2 + \frac{\sigma_3}{z_3} z_3 f_3 \cdot z_3 + \ldots = +P \cdot p + P \cdot z_3$$

$$+\frac{\sigma_3}{z_3} (f_1 z_1^2 + f_2 z_2^2 + f_3 z_3^2 + \ldots) = +P \cdot p + P \cdot z_3 .$$

In der Klammer steht die Summe der Produkte: Flächenstreifen $\times$ Quadrat des Abstandes von der Linie $n—n$. Diese Summe nennen wir nach dem Früheren „das Trägheitsmoment des Querschnittes in bezug auf die Linie $n—n$“ und bezeichnen es mit J_{n-n}. Setzen wir ferner für σ_3 seinen bereits ermittelten Wert ein, so geht die obige Gleichung über in:

$$+\frac{P}{F \cdot z_3} J_{n-n} = +P \cdot p + P \cdot z_3$$

$$+P \cdot J_{n-n} = +P \cdot p \cdot F \cdot z_3 + P \cdot F \cdot z_3^2$$

$$+J_{n-n} = +p \cdot F \cdot z_3 + F \cdot z_3^2$$

$$+p \cdot F \cdot z_3 = +J_{n-n} - F \cdot z_3^2 .$$

Bezeichnen wir das Trägheitsmoment des Querschnittes in bezug auf seine Schwerachse $s—s$ mit J (Fig. 166d), so besteht zwischen den Trägheitsmomenten J und J_{n-n} die Beziehung (§ 50):

$$J_{n-n} = J + F \cdot z_3^2$$

oder

$$J = J_{n-n} - F \cdot z_3^2 .$$

Digitized by Google

Setzen wir diesen Ausdruck in die vorige Gleichung ein, so wird

$$+p \cdot F \cdot z_3 = +J ,$$

$$\text{(II)} \qquad z_3 = +\frac{J}{F \cdot p} .$$

Hiermit ist der Abstand z_3 bestimmt. Da in dieser Formel die Kraft P überhaupt nicht vorkommt, so folgt: *Der Abstand zwischen Schwerpunkt und Nullinie ist unabhängig von der Größe der Belastung P.* Er ist natürlich abhängig von der Lage der Last P, d. h. von ihrem Abstande p bis zum Schwerpunkt. Ferner sehen wir: *Die Nullinie n—n liegt auf der entgegengesetzten Seite des Schwerpunktes wie die Last P.* (Wir haben nämlich in dieser Weise die Lage der Nullinie von vornherein angenommen, und die Rechnung hat, da für z_3 ein positiver Ausdruck herausgekommen ist, diese Annahme als richtig bestätigt.)

c) Die Spannung in einem beliebigen Flächenstreifen.

Nun können wir auch die Spannung in irgendeinem anderen Flächenstreifen berechnen. Wir erhalten z. B. $\sigma_1 = \frac{\sigma_3}{z_3} \cdot z_1$ usw. Für σ_3 und z_3 wollen wir die bereits ermittelten Werte einsetzen. Ferner setzen wir für z_1 nach Fig. 166d: $z_1 = y_1 + z_3$ (y_1 = Abstand des Flächenstreifens bis zum Schwerpunkt). Dann wird

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_3}{z_3}(y_1 + z_3) = \frac{\sigma_3}{z_3} \cdot y_1 + \sigma_3$$

$$= \frac{\frac{P}{F}}{\frac{J}{F \cdot p}} \cdot y_1 + \sigma_3 ,$$

$$\sigma_1 = \frac{P \cdot p}{J} \cdot y_1 + \sigma_3 .$$

Das Produkt $P \cdot p$ ist das statische Moment der Last P in bezug auf Schwerpunkt S; wir nennen es „das Biegungsmoment M". Die Spannung im Schwerpunkt wollen wir von jetzt ab mit σ_0 bezeichnen. Dann erhalten wir also für irgendeinen Flächenstreifen die Spannung:

$$\sigma = \sigma_0 \pm \frac{M}{J} \cdot y ,$$

$$\text{(III)} \qquad \sigma = \frac{P}{F} \pm \frac{M}{J} \cdot y .$$

Digitized by Google

Das Pluszeichen gilt für diejenigen Streifen, die auf derselben Seite vom Schwerpunkt liegen wie die Last P; das Minuszeichen für die anderen. Aus der obigen Formel ergibt sich ein sehr einfaches Schema für die Berechnung: *Wir bestimmen zunächst diejenige Spannung* $\sigma_0 = \frac{P}{F}$, *die in dem betreffenden Streifen auftreten würde, wenn die Kraft P als reine Normalbeanspruchung wirken würde, und vergrößern resp. verkleinern diese Spannung um den Betrag, den ein Biegungsmoment* $P \cdot p$ *in der betreffenden Schicht hervorrufen würde.* (Für die Streifen, die auf derselben Seite vom Schwerpunkt liegen wie die Last P, wird die Spannung σ_0 vergrößert; für die anderen Streifen wird sie verkleinert. Für letztere Streifen kann infolge der Verkleinerung die Spannung σ das entgegengesetzte Vorzeichen annehmen wie σ_0.)

Die größten Spannungen entstehen in den äußersten Fasern:

$$\text{(IIIa)} \qquad \begin{cases} \sigma_1 = \pm\left(\sigma_0 + \frac{M}{W_1}\right), \\ \sigma_2 = \pm\left(\sigma_0 - \frac{M}{W_2}\right). \end{cases}$$

Hierin sind W_1 und W_2 die Widerstandsmomente des Querschnittes; in Fig. 166d also gleich $\frac{J}{e_1}$ resp. $\frac{J}{e_2}$. Das Pluszeichen vor den Klammern gilt, wenn die Last als Zugkraft, und das Minuszeichen ist zu nehmen, wenn P als Druckkraft wirkt. Ist $e_1 = e_2$, so sind die Spannungen der äußersten Fasern

$$\text{(IIIb)} \qquad \begin{cases} \sigma_1 = \pm\left(\sigma_0 + \frac{M}{W}\right). \\ \sigma_2 = \pm\left(\sigma_0 - \frac{M}{W}\right). \end{cases}$$

Wiederholung: Ist ein Körper durch eine exzentrische Zug- oder Druckkraft beansprucht, so ist die Spannung im Schwerpunkte genau so groß, als wenn die betreffende Last P zentrisch (d. h. über dem Schwerpunkte) wirken würde:

$$\text{(I)} \qquad \sigma_0 = \frac{P}{F}.$$

(Für den Schwerpunkt macht es also gar nichts aus, ob die Last P direkt über ihm oder seitlich steht.) Für irgendeine andere Faser ergibt sich die Spannung, indem man den Querschnitt außerdem noch auf Biegung berechnet (und zwar für ein Biegungsmoment $P \cdot p$) und dann beide Spannungen vereint. Insbesondere ergibt sich für die äußersten Fasern:

$$\text{(III)} \qquad \sigma_{1,2} = \left(\frac{P}{F} \pm \frac{P \cdot p}{W_{1,2}}\right).$$

[W_1 und W_2 sind natürlich in bezug auf die Schwerachse s—s zu nehmen.]

Digitized by Google

II. Mittels der „Kernpunkte“.

Die Spannungen σ_1 und σ_2 (auf die es ja hauptsächlich ankommt) lassen sich noch etwas einfacher darstellen. Unsere Ausgangsformel lautete, z. B. für die Schicht *1* in Fig. 168b:

$$\sigma_1 = +\left(\frac{P}{F} + \frac{P \cdot p}{W_1}\right).$$

Diese Formel können wir auch für Laststellungen rechts von S benutzen, nur müssen wir dann den Abstand p als *negativ* einführen (damit aus der obigen Summe eine Differenz wird). Wir wollen nun die Formel noch etwas umformen:

$$\text{(IV)} \qquad \sigma_1 = \frac{+P}{W_1}\left(\frac{W_1}{F} + p\right).$$

Hiernach können wir für jede Laststellung die Spannung σ_1 sehr einfach berechnen. Wir brauchen nur den Abstand p einzusetzen, und zwar nach dem Obigen für alle Laststellungen „diesseits“ vom Schwerpunkt (d. h. auf derselben Seite vom Schwerpunkt wie der betrachtete Streifen *1*) mit positivem und für alle Laststellungen „jenseits“ vom Schwerpunkte mit negativem Vorzeichen, um sofort die Spannung σ_1 zu erhalten. Wird $p = 0$, so geht die Formel (IV) natürlich in die Formel (I) über. Selbstverständlich gilt die Formel (IV) auch, wenn P als Druckkraft wirkt; nur muß dann vor die Klammer an Stelle des Plus- ein Minuszeichen gesetzt werden.

Zunächst interessiert uns die Frage: Gibt es eine Laststellung, bei der die Spannung σ_1 in der Schicht *1* gleich Null wird? Die Antwort darauf ist aus der obigen Formel abzulesen: Wenn der Abstand p gleich $-\frac{W_1}{F}$ ist, d. h., wenn die Last um eine Strecke $\frac{W_1}{F}$ *jenseits* vom Schwerpunkte steht, wird

$$\sigma_1 = \frac{+P}{W_1}\left(\frac{W_1}{F} - \frac{W_1}{F}\right) = 0\,.$$

(Der Quotient $\frac{W_1}{F}$ bedeutet eine Strecke, denn er ist entstanden aus $\text{cm}^3 : \text{cm}^2$.) Diese Stellung ist in Fig. 168c besonders gezeichnet. Es wurde die Länge $k_1 = \frac{W_1}{F}$ ausgerechnet, nach der dem Streifen *1 entgegengesetzten* Seite von S aus abgetragen und hierdurch der Punkt K_1 bestimmt. Dieses ist dann die Stelle, über der sich die Last befinden muß, damit in der Schicht *1* die

Digitized by Google

Spannung $\sigma_1 = 0$ entsteht. Wir wollen die Strecke k_1 den zu dem Streifen *1* gehörigen „*Kernradius*" (Kernabstand) und den Punkt K_1 den „*Kernpunkt*" nennen.

Zweitens interessiert uns die Frage: Für welche Laststellungen ist die Spannung σ_1 positiv (Zugspannung) und für welche Laststellungen ist sie negativ (Druckspannung)? Hierzu sehen wir aus der obigen Formel (IV): Nur wenn p negativ und größer als $\frac{W_1}{F}$ ist, wird die Spannung σ_1 negativ. In allen anderen Fällen ergibt die Formel einen *positiven* Wert. Benutzen wir für den Bruch

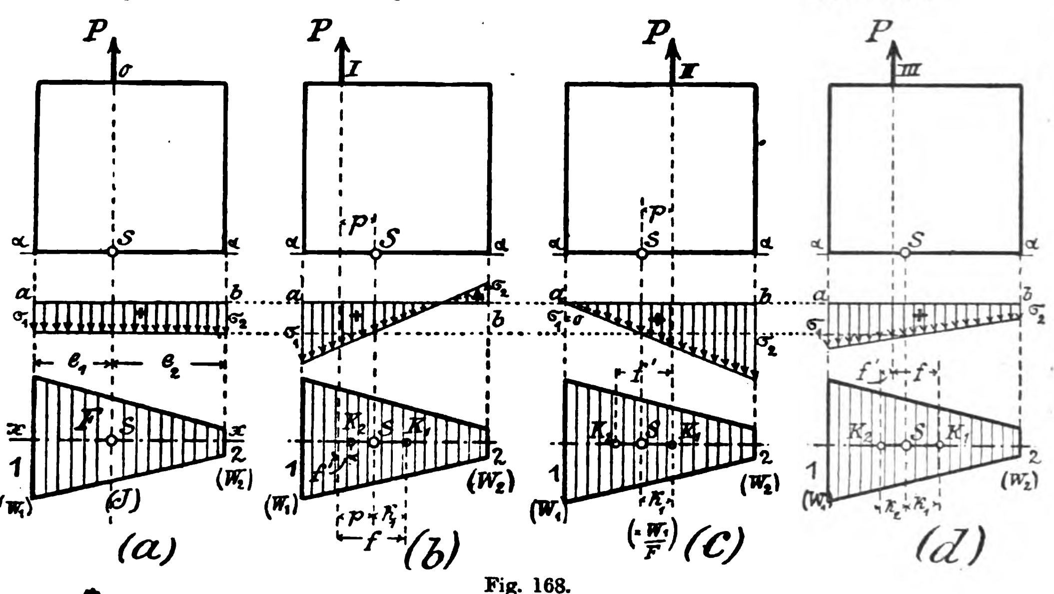


Fig. 168.

$\frac{W_1}{F}$ die vorhin eingeführte Abkürzung k_1, so lautet die Aussage: Wenn die Last P um eine Strecke, die größer als k_1 ist, jenseits von S steht, wird σ_1 negativ; bei allen anderen Laststellungen ist σ_1 positiv. Wäre die Last P eine *Druck*kraft, so müßte natürlich überall an Stelle von „positiv" „negativ" stehen, und umgekehrt. Allgemein haben wir, wenn wir eine *Zug*last als positiv und eine *Druck*last als negativ einführen, folgende Regel: ***Die Spannung in einem äußersten Flächenstreifen hat das gleiche Vorzeichen wie die Last bei allen Laststellungen zwischen dem Streifen und seinem Kernpunkte; sie hat das entgegengesetzte Vorzeichen bei allen Laststellungen jenseits des Kernpunktes.*** Der Kernpunkt selber bildet die Grenze.

Digitized by Google

Drittens wollen wir jetzt die bei den verschiedenen Laststellungen entstehende Spannung σ_1 auch der Größe nach bestimmen. Zu diesem Zwecke führen wir in unsere Formel (IV) die Abkürzung k_1 ein und erhalten:

$$\sigma_1 = \frac{P}{W_1}\left(\frac{W_1}{F} + p\right) = \frac{P}{W_1}\left(k_1 + p\right).$$

(Die Formel ist ohne Vorzeichen geschrieben, damit sie sowohl für Zug-, als auch für Druckbelastung gültig ist. Die Vorzeichen für die beiden Belastungsarten sind durch die obige Regel bereits bestimmt; jetzt kommt es nur noch auf die Größe der Spannung an.)

Nun ist nach Fig. 168b: $k_1 + p = f$, so daß σ_1 sich ausdrücken läßt:

$$\text{(V)} \qquad \sigma_1 = \frac{P \cdot f}{W_1}.$$

In Worten: *Die Spannung in einem äußersten Flächenstreifen ist gleich dem Produkt aus der Last P mal deren Abstand bis zum Kernpunkte des Streifens, dividiert durch das zu dem Streifen gehörige Widerstandsmoment.* Hierdurch ist die Größe der Spannung σ_1 für alle Laststellungen auf die einfachste Weise bestimmt. Wir brauchen nur das Produkt aus der Last mal dem Abstande bis zum Kernpunkte zu bilden und finden die Spannung. Von der Formel für die Berechnung von σ_1 bei einfacher Biegungsbeanspruchung unterscheidet sich die obige Formel (V) nur dadurch, daß wir nicht das statische Moment der Last in bezug auf den Schwerpunkt, sondern in bezug auf den Kernpunkt nehmen müssen. Man nennt das Produkt $P \cdot f$ das „*Kernmoment*" (entsprechend dem „Biegungsmoment"). Somit haben wir durch die beiden letzten Untersuchungen sowohl das Vorzeichen als auch die Größe der äußersten Spannung durch einfache Regeln bestimmt.

Dasselbe, was wir für die Spannung in dem äußersten Streifen *1* soeben abgeleitet haben, gilt natürlich entsprechend für die Spannung σ_2 in der Schicht *2* (Fig. 168d). Wir werden zunächst

$$k_2 = \frac{W_2}{F}$$

ausrechnen, tragen diesen Kernradius auf der der Schicht *2 entgegengesetzten* Seite von *S* aus ab, bestimmen hierdurch den Kernpunkt K_2 und haben nun für irgendeine Laststellung die Spannung σ_2:

$$\text{(Va)} \qquad \sigma_2 = \frac{P \cdot f'}{W_2}.$$

Digitized by Google

Wiederholung: Um die größten Spannungen σ_1 und σ_2 zu finden, werden zunächst die Hilfswerte (Kernradien)

$$k_1 = \frac{W_1}{F} \quad \text{und} \quad k_2 = \frac{W_2}{F}$$

ausgerechnet und vom Schwerpunkte S aus entgegengesetzt den Schichten 1 und 2 aufgetragen. (Punkte K_1 und K_2.) Steht dann irgendwo eine Last P, so ergibt sich $\sigma_1 (\sigma_2)$, indem man von P das Moment nimmt in bezug auf $K_1 (K_2)$ und durch das Widerstandsmoment $W_1 (W_2)$ dividiert:

$$\text{(V)} \qquad \sigma_1 = \frac{P \cdot f}{W_1}; \quad \sigma_2 = \frac{P \cdot f'}{W_2}.$$

III. Einfluß verschiedener Laststellungen.

Mit Hilfe der Kernpunkte wollen wir nun noch weiter untersuchen, wie σ_1 und σ_2 sich je nach der Stellung der Last P ändern. Und zwar durch Aufzeichnung der Einflußlinien für σ_1, σ_2.

Steht die Last über dem Kernpunkte K_1 (Fig. 169a), so ist $\sigma_1 = 0$. Steht die Last über dem Schwerpunkte (Fig. 169a), so ist $\sigma_1 = \frac{P}{F}$, und zwar $+\frac{P}{F}$ bei Zuglast, $-\frac{P}{F}$ bei Drucklast. Somit sind bereits zwei Stellungen untersucht. Für die übrigen Stellungen ersehen wir aus der Gleichung (V) folgendes: Die Spannung σ_1 ist direkt proportional dem Abstande f der Last vom Kernpunkte (Fig. 169b). Wenn sich der Abstand f verdoppelt, verdreifacht usw., so verdoppelt, verdreifacht usw. sich auch die Spannung σ_1. Wenn wir also für die verschiedenen Werte von f die dazugehörigen Spannungen σ_1 als Ordinaten η auftragen, so liegen die Endpunkte dieser Strecken auf einer geraden Linie. Denn nur eine gerade Linie hat die Eigenschaft, daß die Ordinaten η in demselben Verhältnis wachsen wie die Abstände f. Somit haben wir das Resultat: Wenn wir die in der Schicht *1* bei den verschiedenen Laststellungen entstehenden Werte der Spannung σ_1 *jedesmal unter der betreffenden Laststellung* auftragen, so liegen die Endpunkte dieser Ordinaten auf einer geraden Linie. Diese wird zweckmäßig bestimmt durch ihre Ordinaten bei K_1 und S. Die Linie $A_1 K_1 B_1$ in Fig. 169b ist also die Einflußlinie für die Spannung σ_1. Man sieht, daß der größte negative (d. h. mit der Kraft P gleichlautende) Wert von σ_1 dann entsteht, wenn der Körper zwischen der Schicht *1* und dem Kernpunkte K_1 belastet ist, und daß der größte positive Wert von σ_1 dann entsteht, wenn die Lasten sich nur jenseits von K_1 befinden.

Digitized by Google

In Fig. 169c und d sind entsprechend die Einflußlinien für σ_1 und σ_2 gezeichnet. P ist als *Druck*kraft angenommen. Im allgemeinen wird man diese Einflußlinien weniger dazu benutzen, um die Werte von σ_1 und σ_2 direkt abzugreifen (für diesen Fall würde man zweckmäßig zunächst $P = 1{,}0$ t nehmen), als vielmehr dazu, um über die ungünstigsten Laststellungen Aufschluß zu erhalten. Es genügt hierbei, die Gestalt der Einflußlinie zu betrachten. So ergeben sich aus Fig. 169c und d folgende Sätze über den Einfluß der Laststellung auf die Maximalspannungen σ_1 und σ_2:

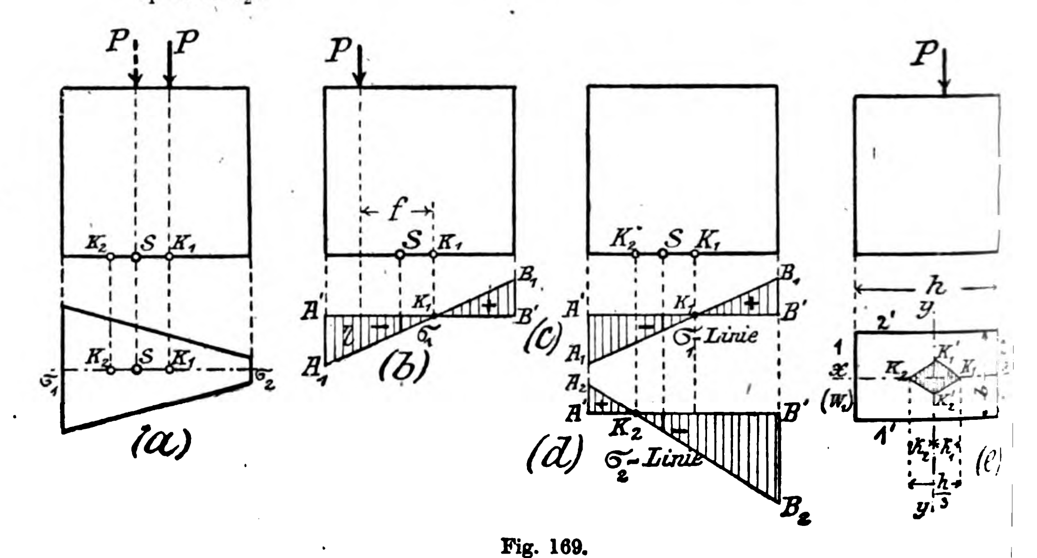


Fig. 169.

1. Steht die Belastung P *innerhalb* der Kernpunkte, so haben σ_1 und σ_2 dasselbe Vorzeichen, und zwar dasjenige der Last P. Steht die Belastung *außerhalb* der Kernpunkte, so haben σ_1 und σ_2 verschiedene Vorzeichen. Kann das Material nur Druck aufnehmen, so muß bei Belastung außerhalb der Kernpunkte die Berechnung nach § 91 erfolgen.

2. Solange sich die Last innerhalb der Kernpunkte befindet, werden beide Spannungen, σ_1 und σ_2, um so größer, je größer die Last ist.

3. Sind mehrere Lasten vorhanden, so müssen die Strecken links und rechts von $K_1 (K_2)$ abwechselnd nach Möglichkeit belastet werden, um die beiden Grenzwerte von $\sigma_1 (\sigma_2)$ zu erhalten.

Digitized by Google

Beispiel. Für den rechteckigen Querschnitt (Fig. 169e) ergeben sich für die Kernradien folgende Werte: Es ist

$$W_1 = W_2 = \frac{1}{6} b h^2,$$

$$F = b h,$$

$$k_1 = k_2 = \frac{\frac{1}{6} b h^2}{b h} = \frac{1}{6} h.$$

Die Entfernung der beiden Kernpunkte voneinander ist also gleich $2 \cdot \frac{1}{6} h = \frac{1}{3} h$. Hiermit haben wir für die Berechnung von Mauerkonstruktionen die bekannte Regel abgeleitet, daß die Last „innerhalb des mittleren Drittels" bleiben muß, damit in dem Querschnitte keine Zugspannungen auftreten.

In der gleichen Weise wie für die Richtung $x—x$ kann man die Untersuchung für eine auf der Richtung $y—y$ bewegliche Last durchführen. Man erhält dann die Kernpunkte K_1' und K_2', die zur Bestimmung der Spannungen in den Schichten $1'$ und $2'$ dienen. Wenn man sämtliche möglichen Richtungen berücksichtigt, so erhält man schließlich die in Fig. 169e schraffierte „Kernfigur". Wir wollen hier nicht nachweisen, daß sie gerade die in Fig. 169e gezeichnete Gestalt haben muß. Es sei nur auf ihre Bedeutung hingewiesen: Solange sich die Last P *innerhalb* der Kernfigur befindet, haben sämtliche Spannungen des Querschnittes das gleiche Vorzeichen.

§ 91.

Spannungen bei nur druckfestem Material.

Wir haben gesehen, daß, sobald die Last P außerhalb des Kerns steht, die Spannungen σ_1 und σ_2 verschiedene Vorzeichen haben; die eine Zug, die andere Druck. Es gibt nun aber Fälle, in denen Zugkräfte einfach nicht entstehen können; z. B. dann, wenn ein Körper lose auf seiner Unterstützungsfläche aufsitzt. Und es fragt sich, welche Kraftverteilung in einem solchen Falle zustande kommt.

In Fig. 167a ist dieser Fall (ohne Zugfestigkeit) gezeichnet. Da der Körper auf seiner Unterlage lose aufsitzen soll, können in der Fläche $\alpha—\alpha$ nur Druckspannungen auftreten. Diese werden sich angenähert so verteilen, wie in Fig. 167b an-

Digitized by Google

gedeutet ist. Auf der linken Seite wird sich der Körper in seine Unterlage etwas einpressen, während rechts vom Punkte N eine kleine Fuge entsteht. Der ganze Körper führt also eine kleine Drehbewegung um den Punkt N aus.

Die Berechnung der in dem Schnitte α—α auftretenden Spannungen wird dadurch erschwert, daß man von vornherein gar nicht weiß, wie weit die Berührungsfuge klaffen wird. Die

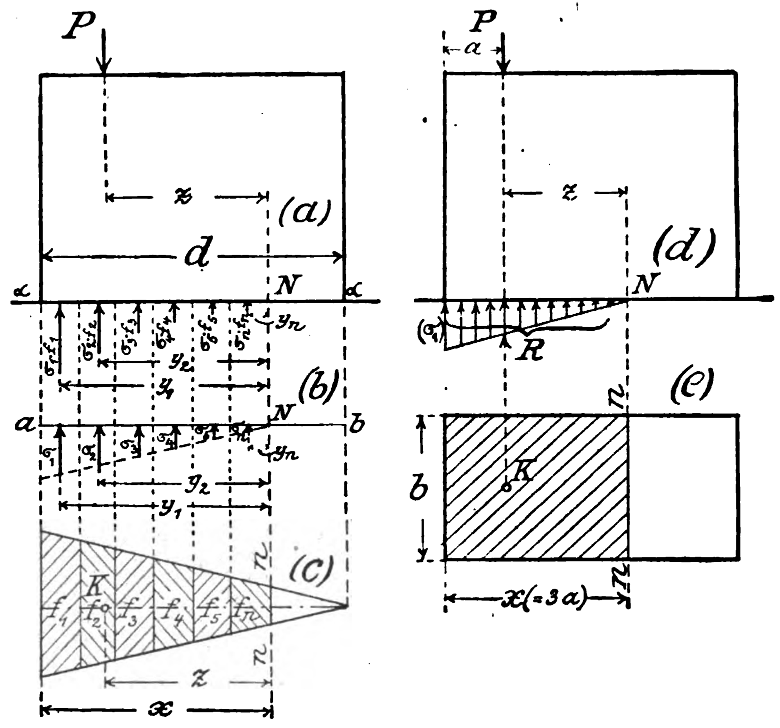


Fig. 167.

Lage des Punktes N, d. h. die Grenze, bis zu der die Fläche sich an der Spannungsübertragung beteiligt, ist zunächst vollkommen unbekannt. Sie wird sich natürlich auch je nach der Belastung ändern, so daß man gar nicht, wie sonst bei allen Untersuchungen, mit einer bestimmten, feststehenden Querschnittsfläche rechnen kann. Wenn wir aber die Annahme machen, daß die Spannungen gleichmäßig vom Punkt N aus anwachsen, kommen wir durch Anwendung der Gleichgewichtsbedingungen $R_y = 0$ und $\Sigma M = 0$ trotzdem zu einer Lösung. Zunächst haben wir die beiden Gleichungen (Fig. 167):

Digitized by Google

$$1)\quad \sigma_1 f_1 + \sigma_2 f_2 + \ldots + \sigma_n f_n = P\,,$$

$$2)\quad \sigma_1 f_1 \cdot y_1 + \sigma_2 f_2 \cdot y_2 + \ldots + \sigma_n f_n \cdot y_n = P \cdot z\,.$$

In diesen Gleichungen sind unbekannt die Spannungen σ_1 usw. und die Lage des Punktes N (von dem aus die Abstände gerechnet sind). Nun drücken wir alle anderen Spannungen durch eine Spannung, z. B. durch σ_1 aus, und erhalten:

$$1)\quad \frac{\sigma_1}{y_1} y_1 f_1 + \frac{\sigma_1}{y_1} y_2 f_2 + \ldots + \frac{\sigma_1}{y_1} y_n f_n = P\,,$$

$$2)\quad \frac{\sigma_1}{y_1} y_1 f_1 \cdot y_1 + \frac{\sigma_1}{y_1} y_2 f_2 \cdot y_2 + \ldots + \frac{\sigma_1}{y_1} y_n f_n \cdot y_n = P \cdot z\,.$$

$$1)\quad \frac{\sigma_1}{y_1}(f_1 \cdot y_1 + f_2 \cdot y_2 + \ldots + f_n \cdot y_n) = P\,,$$

$$2)\quad \frac{\sigma_1}{y_1}(f_1 \cdot y_1^2 + f_2 \cdot y_2^2 + \ldots + f_n \cdot y_n^2) = P \cdot z\,.$$

Wenn man Gleichung 2) durch Gleichung 1) dividiert, so erhält man

$$z = \frac{f_1 \cdot y_1^2 + f_2 \cdot y_2^2 + \ldots + f_n \cdot y_n^2}{f_1 \cdot y_1 + f_2 \cdot y_2 + \ldots + f_n \cdot y_n}\,.$$

Der Zähler stellt die Summe dar aus den Produkten: Flächenstreifen $\times$ Quadrat des Abstandes von der Linie n—n; d. i. das Trägheitsmoment der in Fig. 167c schraffierten Fläche in bezug auf die Linie n—n. Der Nenner stellt das statische Moment dieser Fläche in bezug auf die Linie n—n dar. Das erstere sei mit J_n, das zweite mit S_n bezeichnet. Wir erhalten dann folgende Gleichung zur Bestimmung der

Lage der Nullinie: (I) $z = \dfrac{J_n}{S_n}\,.$

Sobald dann z bestimmt ist, ergeben sich nach Gleichung 1) die

Spannungen: (II) $\begin{cases} \sigma_1 = \dfrac{P}{S_n} \cdot y_1\,; & \text{entsprechend} \\ \sigma_2 = \dfrac{P}{S_n} \cdot y_2\,; & \text{usw.} \end{cases}$

Beispiel. Ein Körper mit rechteckigem Querschnitt ist durch eine Last in einer Entfernung a von dem Rande belastet. Wie groß sind die Pressungen in der Unterstützungsfläche? (Fig. 167d und e.)

Zunächst müssen wir die Lage des Punktes N bestimmen. Das Trägheitsmoment der in Fig. 167e schraffierten Fläche in bezug auf die Linie n—n ist:

$$J_n = \frac{1}{12} b\,x^3 + b\,x \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{1}{3} b\,x^3\,.$$

Digitized by Google

Das statische Moment ist:

$$S_n = b\,x \cdot \frac{x}{2} = \frac{1}{2}\,b\,x^2 .$$

Folglich wird

$$z = \frac{J_n}{S_n} = \frac{\frac{1}{3}\,b\,x^3}{\frac{1}{2}\,b\,x^2} = \frac{2}{3}\,x .$$

Nun setzen wir noch nach Fig. 167d

$$z = x - a$$

ein und erhalten

$$x - a = \frac{2}{3}\,x ,$$

$$\text{(III)} \qquad \boldsymbol{x = 3\,a} ;$$

d. h. *beim rechteckigen Querschnitt liegt die Nullinie in einer Entfernung $x = 3\,a$ vom Rande entfernt. Die größte Spannung ist:*

$$\sigma_1 = \frac{P}{\frac{1}{2}\,b\,x^2} \cdot x = \frac{P}{\frac{1}{2}\,b\,x} ,$$

$$\text{(IV)} \qquad \boldsymbol{\sigma_1 = \frac{2\,P}{3\,a \cdot b}} .$$

Zusatz 1. Diese beiden Resultate (III) und (IV) hätte man auch direkt aus Fig. 167d ablesen können. Weil alle Flächenstreifen dieselbe Breite b haben, so ist die Resultierende der von den einzelnen Flächenstreifen ausgeübten Kräfte ($\sigma_1 f_1$, $\sigma_2 f_2$ usw.) gleich $\frac{1}{2}\,x \cdot \sigma_1 \cdot b$ und liegt in der Entfernung $\frac{1}{3}\,x$ vom Ende. Da nun diese Resultierende der äußeren Kraft P das Gleichgewicht halten muß, so muß sie in derselben Geraden liegen und ebenso groß sein, wie diese. Wir haben also:

$$\text{(III)} \qquad \frac{1}{3}\,x = a ; \qquad x = 3\,a ,$$

$$\text{(IV)} \qquad \frac{1}{2}\,x \cdot \sigma_1 \cdot b = P ; \qquad \sigma_1 = 2\,\frac{P}{x \cdot b} = 2\,\frac{P}{3\,a \cdot b} .$$

Man beachte aber, daß diese einfache Lösung nur dadurch möglich war, daß die einzelnen, gleich breiten Flächenstreifen denselben Inhalt hatten. In jedem anderen Falle ergeben die Kräfte $\sigma_1 f_1$, $\sigma_2 f_2$ usw. bei der graphischen Darstellung kein Dreieck, sondern irgendeine andere Figur, so daß die Resultierende R nicht angegeben werden kann. Die Bestimmung von z und σ ist in solchen Fällen dann meistens recht umständlich. Schon beim Kreis- oder Kreisringquerschnitt ist der Ausdruck für das Trägheitsmoment und das statische Moment für die Linie n—n ziem-

Digitized by Google

lich kompliziert. Man kann sich dann durch Probieren helfen: Man nimmt für z einen Wert an, zeichnet $n—n$ ein, rechnet S_n und J_n aus (indem man jeden Streifen mit seinem Abstande, resp. dem Quadrat des Abstandes multipliziert), dividiert $J_n : S_n$ und sieht nach, ob der hiermit erhaltene Wert mit dem zuerst angenommenen übereinstimmt. Wenn dieses nicht der Fall ist, muß ein neuer Wert z angenommen werden. Glücklicherweise hat man ja meistens mit rechteckigen Querschnitten zu tun.

Zusammenfassung.

In diesem Paragraphen haben wir den Fall betrachtet, daß das betreffende Material nur Druck aufnehmen kann. Ein solcher Fall liegt immer dann vor, wenn ein Körper glatt (ohne Verankerungen) auf einer Unterlage aufsitzt. Außerdem wird dieser Fall meistens bei Mauer-, Stein- und Betonkonstruktionen zugrunde gelegt, weil diese Materialien und insbesondere der verbindende Mörtel in der Tat nur sehr geringe Zugfestigkeit haben. Die Last P kann natürlich nur eine Drucklast sein.

Wenn nun eine solche Konstruktion zu berechnen ist, muß man zunächst feststellen, ob die Last P innerhalb oder außerhalb der Kernpunkte liegt. Liegt die Last 1) **innerhalb** der Kernpunkte, so geschieht die Berechnung nach den in § 90 aufgestellten Regeln, am besten mittels der Kernpunkte. [Denn in diesem Falle haben σ_1 und σ_2 das gleiche Vorzeichen, und zwar beide Druck, da P eine Drucklast ist. Der ganze Querschnitt kommt also zum Tragen, und der Mangel der Zugfestigkeit tritt überhaupt nicht in Erscheinung.] Liegt aber die Last 2) **außerhalb** der Kernpunkte, so muß die Berechnung **nach § 91 durchgeführt werden: Zunächst muß ermittelt werden, welcher Teil des Querschnittes überhaupt zum Tragen kommt; aus der Gleichung**

$$\text{(I)} \qquad z = \frac{J_n}{S_n}.$$

Dann ergibt sich die Spannung:

$$\text{(II)} \qquad \sigma = \frac{P}{S_n} \cdot y.$$

Für den meistens vorliegenden Spezialfall: Rechteckiger Querschnitt, konnten J_n und S_n leicht ausgerechnet werden, und es ergab sich für die größte Spannung:

$$\textbf{(IV)} \qquad \sigma = \frac{2P}{3ab}.$$

Diese Formel muß also bei Mauerwerk usw. immer angewendet werden, wenn die Last außerhalb des mittleren Drittels steht. (Denn beim rechteckigen Querschnitt schließen die Kernpunkte das mittlere Drittel ein, wie in § 90, Schluß nachgewiesen.)

§ 92.

Beispiele zu § 90 und § 91.

Erste Aufgabe (zu § 91).

Bei dem in Fig. 170a und b dargestellten Brückenpfeiler sind die Spannungen in der Auflagerfläche $\overline{AD}$ zu bestimmen!

Digitized by Google

Die Resultierende R aller an dem Pfeiler angreifenden Kräfte wurde bereits früher (§ 10) ermittelt. Es ergab sich $R = 37{,}6$ t, und zwar gilt dieser Wert für 1,00 m Tiefe des Pfeilers. Der Abstand a ergibt sich aus der früheren Berechnung zu 1,03 m. Bei der Zerlegung der Kraft R in eine vertikale Seitenkraft R_y und eine horizontale Seitenkraft R_x erhalten wir: $R_y = 34$ t, $R_x = 15$ t. Die horizontale Kraft R_x erzeugt in dem Querschnitte horizontal verlaufende Schubspannungen. Diese lassen sich auf theoretischem Wege, namentlich bei einem Mauerwerkskörper,

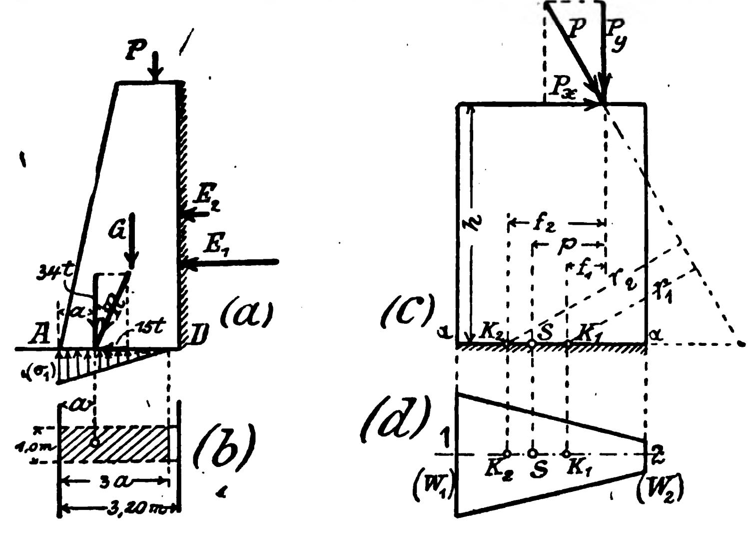


Fig. 170.

nur sehr unvollkommen untersuchen. Man weiß nur, daß sie im Verhältnis zu den Normalspannungen von untergeordneter Bedeutung sind. Namentlich sind sie an den Stellen, an denen die Normalspannungen ihre Größtwerte annehmen, gleich Null oder wenigstens sehr klein. Aus diesem Grunde werden sie bei derartigen Aufgaben, wie ja gewöhnlich, vernachlässigt.

Die Berechnung der Normalspannungen σ geschieht nun nach den durchgenommenen Regeln: Da die Last den Querschnitt außerhalb des Kerns (mittleren Drittels) schneidet, tritt nur ein Teil der Fläche in Wirksamkeit. Die größte Spannung entsteht an der Vorderkante und ist

$$\sigma_1 = -2 \cdot \frac{34000}{3 \cdot 103 \cdot 100} = -2{,}2 \text{ kg/qcm};$$

Digitized by Google

also eine ziemlich geringe Beanspruchung des Baugrundes. Man nennt σ_1 eine *Kantenpressung*; die andere Kantenpressung, σ_2, ist in diesem Falle gleich Null. Wenn die Kantenpressung σ_1 zu groß wird, drückt sich der Pfeiler beim Punkte A in die Unterlage ein und das Bauwerk kippt um. Außer durch Umkippen kann eine Zerstörung auch dadurch eintreten, daß der Erddruck den Pfeiler vor sich herschiebt. Um hiergegen Sicherheit zu haben, muß darauf geachtet werden, daß die Abweichung der Resultierenden R von der Vertikalrichtung kleiner ist als der Reibungswinkel zwischen Mauerwerk und Erde.

Aufgabe: Man beweise, daß bei einem Rechteck die Kantenpressung σ_1 infolge einer über einem Kernpunkte stehenden Last gerade doppelt so groß ist, als wenn die Last über dem Schwerpunkte stehen würde.

Zweite Aufgabe (zu § 90).

Auf einen Körper, der sowohl Zug als auch Druck aufnehmen kann, wirkt eine schräge exzentrische Last P. Gesucht sind die größten Spannungen im Schnitte α—α (Fig. 170c und d).

Wir zerlegen P in eine horizontale und vertikale Seitenkraft. Die erstere, P_x, beansprucht den Körper auf reine Biegung. Wir finden die durch sie hervorgerufenen Beanspruchungen, indem wir das Moment in bezug auf den Schwerpunkt S bilden und durch die Widerstandsmomente dividieren:

$$\sigma_{1(x)} = +\frac{P_x \cdot h}{W_1}, \qquad \sigma_{2(x)} = -\frac{P_x \cdot h}{W_2}.$$

Die zweite, P_y, beansprucht den Körper auf exzentrische Normalfestigkeit. Die Spannungen in den äußersten Schichten infolge dieser Kraft P_y sind also:

$$\sigma_{1(y)} = -\left(\frac{P_y}{F} - \frac{P_y \cdot p}{W_1}\right); \qquad \sigma_{2(y)} = -\left(\frac{P_y}{F} + \frac{P_y \cdot p}{W_2}\right).$$

Insgesamt erhalten wir also

$$\sigma_1 = -\frac{P_y}{F} + \frac{P_x \cdot h + P_y \cdot p}{W_1}; \qquad \sigma_2 = -\frac{P_y}{F} - \frac{P_x \cdot h + P_y \cdot p}{W_2}.$$

Etwas anders gestaltet sich die Berechnung, wenn wir die Kernpunkte K_1 und K_2 einführen. Dann wird

$$\sigma_1 = \frac{+P_x \cdot h + P_y \cdot f_1}{W_1}; \qquad \sigma_2 = \frac{-P_x \cdot h - P_y \cdot f_2}{W_2}.$$

Digitized by Google

Das Moment $P_x \cdot h$ ist in bezug auf den Schwerpunkt genommen. Wir können aber auch das Moment der Kraft P_x in bezug auf die Kernpunkte K_1 oder K_2 in die obigen Gleichungen einsetzen, da dieses ja auch $P_x \cdot h$ ist. Dann haben wir also sowohl von P_x als auch von P_y das Moment in bezug auf die Kernpunkte genommen. Da nun die Summe der Momente zweier Seitenkräfte stets gleich ist dem Moment der ursprünglichen Kraft, so können wir die obigen Ausdrücke auch schreiben:

$$\sigma_1 = + \frac{P \cdot r_1}{W_1}; \qquad \sigma_2 = - \frac{P \cdot r_2}{W_2}.$$

Hierin sind also $P \cdot r_1$ und $P \cdot r_2$ die statischen Momente der Kraft P in bezug auf die Kernpunkte K_1 und K_2. Die Vorzeichen ergeben sich nach den früher aufgestellten Regeln oder sind auch aus der voraussichtlichen Abbiegung direkt ablesbar.

Wie im vorigen Beispiele, werden auch jetzt die durch P_x hervorgerufenen Schubkräfte vernachlässigt.

Zusammenfassung. Wenn ein Körper durch eine schräg zur Stabachse wirkende Kraft beansprucht wird, so finden wir die größten Spannungen σ_1 und σ_2, indem wir die Momente dieser Kraft in bezug auf die Kernpunkte K_1 und K_2 bilden und durch die Widerstandsmomente W_1 und W_2 dividieren. Statt der Kraft P selber können wir auch deren Seitenkräfte einführen.

---

17. Vortrag:

Die Biegungsspannungen bei unsymmetrischen Querschnittsformen und bei schräger Belastung.

Als Abschluß der Biegungslehre mögen in diesem Vortrage noch einige allgemeine Untersuchungen über die Normalspannungen σ und über Trägheitsmomente aufgeführt werden, die namentlich bei der Berechnung unregelmäßiger Querschnitte gebraucht werden.

§ 93.

Ist die Biegungsformel $\sigma = \frac{M}{J} y$ auf alle Querschnittsformen anwendbar? Besondere Bedingungen.

Sämtliche bisherigen Untersuchungen in der Biegungslehre bezogen sich auf den Fall, daß die Ebene, in der die äußeren Kräfte enthalten sind, eine Symmetrieebene des Balkens darstellt.

Digitized by Google

Insbesondere ist auch die Grundformel der Biegungsfestigkeit, $\sigma = \frac{M}{J} y$, *nur für diesen Fall abgeleitet!* (§ 36, 37, 38.) Denn ihrer Ableitung liegt die Voraussetzung zugrunde, daß die Nullinie und die anderen, die Spannungen σ_1, σ_2 usw. enthaltenden Querschnittsstreifen horizontal (d. h. rechtwinklig zu den äußeren Kräften) verlaufen. Es ist aber klar, daß diese Voraussetzung ohne weitere Begründung nur bei symmetrischen Querschnitten gemacht werden darf.

Ob die Grundformel eventuell auch auf unsymmetrische Querschnitte anwendbar ist, hängt augenscheinlich davon ab, ob bei derartigen Querschnitten die Nullinie ebenfalls horizontal verläuft oder nicht. Im ersteren Falle würde die in § 38 durchgeführte Ableitung der Biegungsgleichung wörtlich dieselbe bleiben. Im zweiten Falle dagegen würde eine andere Betrachtung Platz greifen, da dann die Abstände y der einzelnen Flächenstreifen von der Nullinie in einer anderen Richtung (schräg) auftreten.

Wir wollen nun einen solchen unsymmetrischen Querschnitt hinsichtlich der Richtung der Nullinie untersuchen (Fig. 171a). Die Ebene, in der die Lasten P wirken, gehe wieder durch den Schwerpunkt des Querschnittes. Die Frage lautet: Verläuft jetzt die Nullinie ebenfalls rechtwinklig zur Lastenebene oder hat sie eine schräge Richtung?

Die Untersuchung werden wir so durchführen, daß wir zunächst eine horizontale Nullinie annehmen und auf Grund dieser Annahme die Spannungen ausrechnen. Dann wird sich eine Bedingung ergeben, die erfüllt sein muß, falls die Voraussetzung für die Spannungsberechnung — horizontale Nullinie — richtig war.

Wenn in Fig. 171a die Nullinie horizontal verläuft, ergeben sich für die Streifen f_1, f_2 usw. der Querschnittsfläche die Normalspannungen:

$$\text{in } f_1: \quad \sigma_1 = \frac{M}{J} y_1 ,$$

$$\text{in } f_2: \quad \sigma_2 = \frac{M}{J} y_2$$

usw.

(M ist das Moment des Balkens für den betrachteten Querschnitt.) Da diese Spannungen teils Zug, teils Druck sind, müssen den Abständen y_1, y_2 usw. entgegengesetzte Vorzeichen beigelegt werden.

Digitized by Google

je nachdem sie oberhalb oder unterhalb der Nullinie liegen. Insgesamt wirken in den Flächenstreifen die Normalkräfte:

$$\text{in } f_1: \quad \sigma_1 \cdot f_1 = \frac{M}{J} y_1 \cdot f_1 ,$$

$$\text{in } f_2: \quad \sigma_2 \cdot f_2 = \frac{M}{J} y_2 \cdot f_2$$

usw.

In der Ansichtzeichnung (Fig. 171a) der Querschnittsfläche treten also diese Kräfte $\sigma_1 f_1$, $\sigma_2 f_2$ usw. teils als Zugkräfte, teils als Druckkräfte heraus. Die Lage einer jeden Kraft ist in der Mitte des betreffenden Streifens, so, wie in Fig. 171a durch Punkte angedeutet ist. Der Unterschied gegenüber dem symmetrischen Balken (vgl. z. B. Fig. 78d) ist der, daß jetzt die Kräfte nicht auf einer Geraden, sondern unregelmäßig liegen.

Wir haben also in Fig. 171a eine Gruppe von parallelen Kräften, die aber nicht in einer Ebene liegen. Wenngleich nun unsere bisherigen Untersuchungen in der Mechanik sich nur auf Kräfte in einer Ebene bezogen, so wird man doch für die Kräfte von Fig. 171a folgendes leicht einsehen: Da sämtliche äußeren Kräfte des Balkens innerhalb der Ebene y—y liegen und also in bezug auf die Achse y—y die statischen Momente Null ergeben, so muß auch die Summe der statischen Momente der inneren Kräfte in bezug auf die Achse y—y gleich Null sein. (Erweiterung der Gleichgewichtsbedingungen auf Kräfte im Raum.) Es muß also sein:

$$\sigma_1 f_1 \cdot x_1 + \sigma_2 f_2 \cdot x_2 + \ldots = 0 ,$$

und zwar sind die Abstände x_1, x_2 usw. in diesem Ausdrucke mit entgegengesetzten Vorzeichen einzuführen, je nachdem sie rechts oder links von der Linie y—y liegen. Setzen wir nun für $\sigma_1 f_1$ usw. die Werte ein, so wird:

$$\frac{M}{J} y_1 f_1 \cdot x_1 + \frac{M}{J} y_2 f_2 \cdot x_2 + \ldots = 0 ,$$

$$\frac{M}{J} (f_1 \cdot x_1 \cdot y_1 + f_2 \cdot x_2 \cdot y_2 + \ldots = 0 .$$

Da der erste Faktor, $\frac{M}{J}$, dieses Produktes nicht gleich Null ist, so muß der zweite Faktor gleich Null werden, damit das gesamte Produkt zu Null wird. Falls also unsere bisherige Rechnung, die

Digitized by Google

sich ja auf der willkürlichen Annahme einer horizontalen Nulllinie in Fig. 171a aufbaut, richtig ist, muß die Gleichung bestehen:

$$\text{(I)} \qquad \boxed{f_1 \cdot x_1 \cdot y_1 + f_2 \cdot x_2 \cdot y_2 + \ldots = 0.}$$

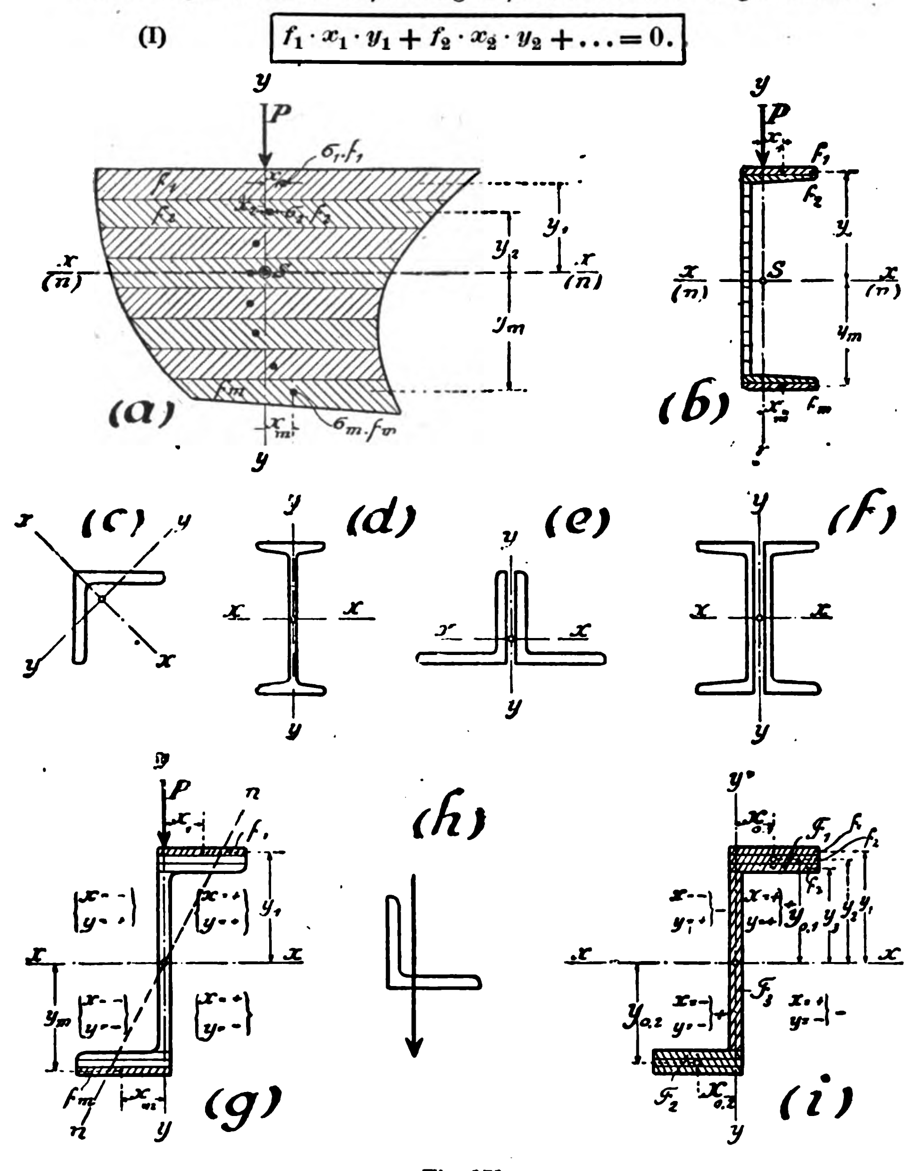


Fig. 171.

Diese Gleichung stellt demnach die gesuchte Bedingung dar, um zu erkennen, ob die Grundlage der bisherigen Berechnung erfüllt ist; d. h. ob bei dem betrachteten Querschnitte die

Digitized by Google

Nullinie tatsächlich rechtwinklig zur Ebene der Kräfte sein wird.

Wiederholung: Um bei einem unsymmetrischen Querschnitt zu erkennen, ob man ihn ebenfalls nach der einfachen Biegungsformel $\sigma = (M : J) y$ berechnen darf, braucht man nur zu untersuchen, ob bei ihm die Nullinie ebenfalls (wie beim symmetrischen Querschnitt) rechtwinklig zur Kraftebene verlaufen wird. Letztere Untersuchung aber geschieht folgendermaßen:

Wir zerlegen den Querschnitt in lauter Streifen f_1, f_2 usw. rechtwinklig zur Kraftebene und multiplizieren jeden Streifen mit seinen beiden Abständen von der Kraftebene $y—y$ und der dazu rechtwinkligen Schwerachse $x—x$. Ergibt dann die Summe dieser Produkte den Wert Null, so ist die angenommene x-Achse tatsächlich die Nullinie; d. h. dann steht letztere rechtwinklig zur Kraftebene. Ist aber die Summe $f_1 \cdot x_1 \cdot y_1 + \ldots$ nicht gleich Null, so kann $x—x$ nicht die Nullinie sein; d. h. letztere wird vielmehr irgendwie schräg verlaufen (hierüber s. § 95). Beim Ausrechnen der Produkte $f_1 \cdot x_1 \cdot y_1$ usw. ist noch zu beachten, daß die Abstände x mit verschiedenen Vorzeichen einzuführen sind, je nachdem sie rechts oder links von der Linie $y—y$ liegen; und die Abstände y sind mit verschiedenen Vorzeichen einzuführen, je nachdem sie oberhalb oder unterhalb $x—x$ liegen.

Zusatz: Diese Summe

$$J_{x,y} = \pm f_1 \cdot x_1 \cdot y_1 \pm f_2 \cdot x_2 \cdot y_2 \pm \cdots$$

nennt man das „*Zentrifugalmoment* $J_{x,y}$" des Querschnittes in bezug auf die beiden Achsen $x—x$ und $y—y$. Mit dieser Bezeichnung lautet unsere aufgefundene Bedingung:

Nur dann ist die rechtwinklig zur Lastenebene $y—y$ stehende Schwerachse $x—x$ die Nullinie des Querschnittes, wenn das in bezug auf die beiden Achsen $x—x$ und $y—y$ genommene Zentrifugalmoment den Wert Null hat. Nur in diesem Falle darf also zur Berechnung der Normalspannungen die Grundformel $\sigma = \frac{M}{J} \cdot y$ angewendet werden.

Zwei solche rechtwinklig zueinander stehende Achsen, für die das Zentrifugalmoment gleich Null ist, nennt man **„Hauptachsen"**.

§ 93a.

Beispiele zu § 93.

Erste Aufgabe.

Ein [-*Eisen ist durch vertikale Kräfte belastet. Steht die Nullinie rechtwinklig zur Ebene der äußeren Kräfte?* (Fig. 171 b.)

Digitized by Google

Zeichnen wir die Achse $x—x$ rechtwinklig zur Achse $y—y$ der äußeren Kräfte und zerlegen den Querschnitt in lauter Streifen parallel der x-Achse, so ergibt sich folgendes: Bei je zwei entsprechend gelegenen Streifen, z. B. dem obersten und dem untersten, sind die Abstände x gleich groß und auch mit gleichem Vorzeichen versehen (da sie auf derselben Seite der y-Achse liegen). Die Abstände y dagegen sind zwar gleich groß, haben aber entgegengesetzte Vorzeichen (da sie zu verschiedenen Seiten der x-Achse liegen). Bildet man also die Produkte: Flächenstreifen $\times$ Abstand $x \times$ Abstand y, so haben diese Produkte bei den beiden Streifen entgegengesetzte Vorzeichen. Die Summe dieser beiden Produkte ist also gleich Null. In derselben Weise ergeben aber auch der zweitoberste und der zweitunterste Streifen bei der Summierung ihrer Produkte $f \cdot x \cdot y$ den Wert Null usw. Insgesamt folgt daraus, daß für den ganzen Querschnitt das Zentrifugalmoment

$$J_{x,y} = \pm f_1 \cdot x_1 \cdot y_1 \pm f_2 \cdot x_2 \cdot y_2 \pm \cdots$$

den Wert Null hat. Somit ist bewiesen, daß bei Belastung innerhalb der Ebene $y—y$ die Nullinie rechtwinklig zur Lastenebene steht. Daraus folgt dann weiter, daß bei vertikaler Belastung eines [-Eisen die einfache Biegungsformel $\sigma = \frac{M}{J} \cdot y$ zur Berechnung der Normalspannungen gültig ist.

Zusatz: In entsprechender Weise ersieht man allgemein: Hat ein Querschnitt irgendeine durch den Schwerpunkt gehende Symmetrieachse (um die man also die eine Querschnittshälfte auf die andere hinaufklappen kann), so bildet diese Achse mit der zu ihr rechtwinkligen Schwerachse ein *Hauptachsen*kreuz. In Fig. 171c bis f sind noch einige Querschnitte mit ihren Hauptachsen gezeichnet. Wirkt die Belastung in der einen Hauptachse, so ist die andere die Nullinie.

Bemerkung: Herr Professor v. Bach (Stuttgart) hat im Jahre 1910 eine Reihe von Versuchen mit [-Eisen angestellt, um die Übereinstimmung der Theorie mit der Wirklichkeit zu prüfen. Diese Versuche haben die Theorie **nicht** bestätigt. Die Spannungen haben sich vielmehr bedeutend größer ergeben, als sie nach der Rechnung sein müßten.

Wenn man den Ursachen dieser Nichtübereinstimmung nachgeht, so muß man zunächst beachten, daß die Ableitungen im vorigen Paragraphen an und für sich richtig sein müssen, da sie rein mathematischer Natur sind. Wohl aber ruht ja unsere gesamte Biegungslehre auf einer Annahme (Naviersche Hypothese, § 38)! Wenn diese bei [-eisenförmigen Querschnitten nicht zutrifft, dann kann natürlich auch der § 93 nicht stimmen. Außerdem kommt noch hinzu, daß bei derartigen Querschnitten

Digitized by Google

der Verlauf der Schubspannungen ein sehr unregelmäßiger sein wird und ihre Wirkung z. Z. noch nicht klargestellt ist.

Für den wissenschaftlich arbeitenden Ingenieur, der auch die **Grundlagen** seines Faches versteht, haben solche Erscheinungen also weder etwas Unerwartetes noch viel weniger Entmutigendes. Sie werden ihn eben zur Vorsicht ermahnen. Nach den bisher vorliegenden Versuchen muß man auf recht erhebliche Unterschiede zwischen den wirklich entstehenden und den theoretisch berechneten Spannungen gefaßt sein. Erstere können im Durchschnitt vielleicht 50% größer sein als die letzteren. (Vgl. die Mitteilung der Versuche in der „Zeitschrift des Vereins Deutscher Ingenieure", 1910.)

Zweite Aufgabe.

Ein Z-Eisen ist durch vertikale Kräfte belastet. Wird die Nulllinie rechtwinklig zur Ebene der Kräfte stehen?

Wir legen rechtwinklig zur y-Ebene die Achse x—x und teilen den Querschnitt in Streifen. Betrachten wir dann wieder gemeinsam den obersten und den untersten Streifen. Die Vorzeichen für die Abstände x und y nehmen wir beispielsweise so, wie in Fig. 171g eingeschrieben. Beim ersten Streifen sind dann beide Abstände positiv. Folglich ist auch das betreffende Produkt $f \cdot x \cdot y$ positiv. Beim untersten Streifen sind dagegen x und y negativ. Das entsprechende Produkt $f \cdot x \cdot y$ ist also auch bei diesem Streifen positiv [denn $(-) \cdot (-)$ ist bekanntlich positiv]. Der oberste und der unterste Streifen ergeben somit bei der Summation ihrer Produkte $f \cdot x \cdot y$ nicht den Wert Null, sondern einen bestimmten Wert. Ebenso hat die Summe der Produkte $f \cdot x \cdot y$ des zweitobersten und des zweituntersten Streifens einen bestimmten Wert; usw. (Nur das den Steg bildende Rechteck bildet den Beitrag Null.) Wenn man also sämtliche Produkte $f \cdot x \cdot y$ bildet, ergibt sich nicht der Wert Null. Das heißt: Beim Z-Eisen ist das Zentrifugalmoment $J_{x,y}$ in bezug auf die beiden Achsen x—x und y—y nicht gleich Null, sondern hat einen bestimmten Wert. Daraus folgt aber: *Bei Belastung innerhalb der Ebene y—y ist die Achse x—x nicht die Nulllinie des Querschnittes.* Es wäre demnach vollständig falsch, in Fig. 171g die Spannungen nach der einfachen Biegungsformel $\sigma = \frac{M}{J} \cdot y$ berechnen zu wollen.

Die zu der Belastungsebene y—y gehörige Nullinie liegt vielmehr schräg (Fig. 171g). Ihre Lage muß besonders berechnet werden (§ 95). Ebenso liegt z. B. bei einem ⊀-Eisen, das nach Fig. 171h belastet ist, die Nullinie schräg, so daß die Spannungen nach einer anderen Methode ermittelt werden müssen.

Digitized by Google

§ 94.

Praktische Methode zur Ausrechnung des Zentrifugalmomentes.

Bei den Untersuchungen in den beiden letzten Paragraphen haben wir die Summe

$$\pm f_1 x_1 y_1 \pm f_2 x_2 y_2 \pm f_3 x_3 y_3 \pm \cdots$$

nicht direkt zahlenmäßig ausgerechnet. Es genügte vielmehr für unsere Aufgabe (Untersuchung der Lage der Nullinie), zu entscheiden, ob die obige Summe den Wert Null hat oder nicht. Letztere Entscheidung ließ sich aber bereits durch die Betrachtung der Vorzeichen der Abstände x und y treffen, ohne daß wir die einzelnen Produkte $f \cdot x \cdot y$ direkt auszurechnen brauchten.

Nun kommen aber auch Aufgaben vor, bei denen man die Summe (Zentrifugalmoment)

$$J_{x,y} = \pm f_1 x_1 y_1 \pm f_2 x_2 y_2 \pm \cdots$$

wirklich zahlenmäßig ausrechnen muß. Zum Beispiel werden wir im folgenden Paragraphen auf Formeln stoßen, in denen man den genauen Wert von $J_{x,y}$ haben muß. Als Vorübung wollen wir deshalb folgende Aufgabe behandeln: Gegeben sei ein Querschnitt und auf diesem ein Achsenkreuz x, y. Wie kann man nun das Zentrifugalmoment $J_{x,y}$ dieses Querschnittes am bequemsten zahlenmäßig bestimmen?

Die ursprüngliche, aus der Ableitung folgende Methode zur Bestimmung von $J_{x,y}$ war folgende: Wir zerlegen die Querschnittsfläche in lauter (unendlich dünne) Streifen parallel der einen Achse, messen von jedem Streifen die Abstände x und y, bilden die Produkte $f \cdot x \cdot y$ und summieren dieselben. Diese Arbeit kann man dadurch vereinfachen, daß man die Streifen möglichst zu *Rechtecken* zusammenfaßt, deren Seiten parallel den Achsen x—x und y—y laufen.

In Fig. 171i kann man beispielsweise, statt die Streifen f_1, f_2 und f_3 einzeln mit ihren entsprechenden Abständen x und y zu multiplizieren, das gesamte Rechteck F_1 nehmen und mit seinen Schwerpunktsabständen $x_{0,1}$ und $y_{0,1}$ multiplizieren. Denn es ist zunächst (Fig. 171i):

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_{0,1},$$

und ferner nach dem Satze vom Schwerpunkt (§ 48):

$$f_1 \cdot y_1 + f_2 \cdot y_2 + f_3 \cdot y_3 = F_1 \cdot y_{0,1},$$

Digitized by Google

so daß sich tatsächlich ergibt:

$$f_1 x_1 y_1 + f_2 x_2 y_2 + f_3 x_3 y_3 = x_{0,1}(f_1 y_1 + f_2 y_2 + f_3 y_3) = F_1 \cdot x_{0,1} \cdot y_{0,1}.$$

Ebenso kann man statt der unteren Streifen das Rechteck F_2 mit seinen Schwerpunktsabständen $x_{0,2}$ und $y_{0,2}$ einführen. Für die mittleren Streifen ergibt sich die Summe der Produkte $f \cdot x \cdot y$ gleich Null, da das betreffende Rechteck F_3 die Schwerpunktsabstände Null hat. Insgesamt haben wir also zur praktischen Bestimmung des Zentrifugalmomentes $J_{x,y}$ eines Querschnittes die Regel: Man zerlege den Querschnitt in *Rechtecke*, deren Seiten parallel der x- und der y-Achse laufen, und multipliziere jedes Rechteck mit den Abständen seines Schwerpunktes von den Achsen. Die Summe der hierdurch entstehenden Produkte ergibt das Zentrifugalmoment. Man übersehe aber hierbei nicht, daß entgegengesetzt gelegene Abstände mit entgegengesetzten Vorzeichen zu nehmen sind. Es empfiehlt sich beim Rechnen, die gewählten Vorzeichen deutlich in die Skizze einzuschreiben (Fig. 171i). Man erkennt dann auch, daß die Beiträge zweier anstoßender Felder des Achsenkreuzes zum Zentrifugalmoment stets entgegengesetzte Vorzeichen haben, während die Beiträge zweier kreuzweis gelegener Felder sich stets summieren.

§ 95.

Berechnung der Spannungen σ bei beliebiger schräger Belastung.

In den letzten Paragraphen haben wir die Fälle herausgesucht, bei denen auch bei unsymmetrischer Querschnittsform die Grundformel $\sigma = \frac{M}{J} y$ gültig ist. Nun wollen wir den allgemeinen Fall betrachten, daß die Nullinie nicht rechtwinklig zur Ebene der äußeren Kräfte steht und also die einfache Biegungsformel $\sigma = \frac{M}{J} y$ nicht angewendet werden darf. Bei dieser Aufgabe können zwei Möglichkeiten unterschieden werden.

I. Die Hauptachsen des Querschnittes sind bekannt und bequem gelegen.

Dieser Fall ist in Fig. 172a gezeichnet. Die Hauptachsen des I-Eisen sind die Achsen x—x und y—y, denn für diese beiden Achsen ist das Zentrifugalmoment $J_{x,y}$ gleich Null. Wirkt die Kraft in einer der beiden Achsen, so ist die andere Achse die Nullinie. Nun wirke aber die Kraft P schräg, so daß die Null-

Digitized by Google

linie nicht rechtwinklig zur Lastenebene anzunehmen ist. Wie groß sind die Spannungen?

Wir zerlegen die Last P in die beiden Seitenkräfte $P_x = P\cos\alpha$ und $P_y = P\sin\alpha$, rechtwinklig zur x- und zur y-Achse (Fig. 172a). Dann haben wir zwei Kräfte, die in Richtung der Hauptachsen wirken und können also für jede die Grundformel $\sigma = \frac{M}{J}\cdot y$ anwenden.

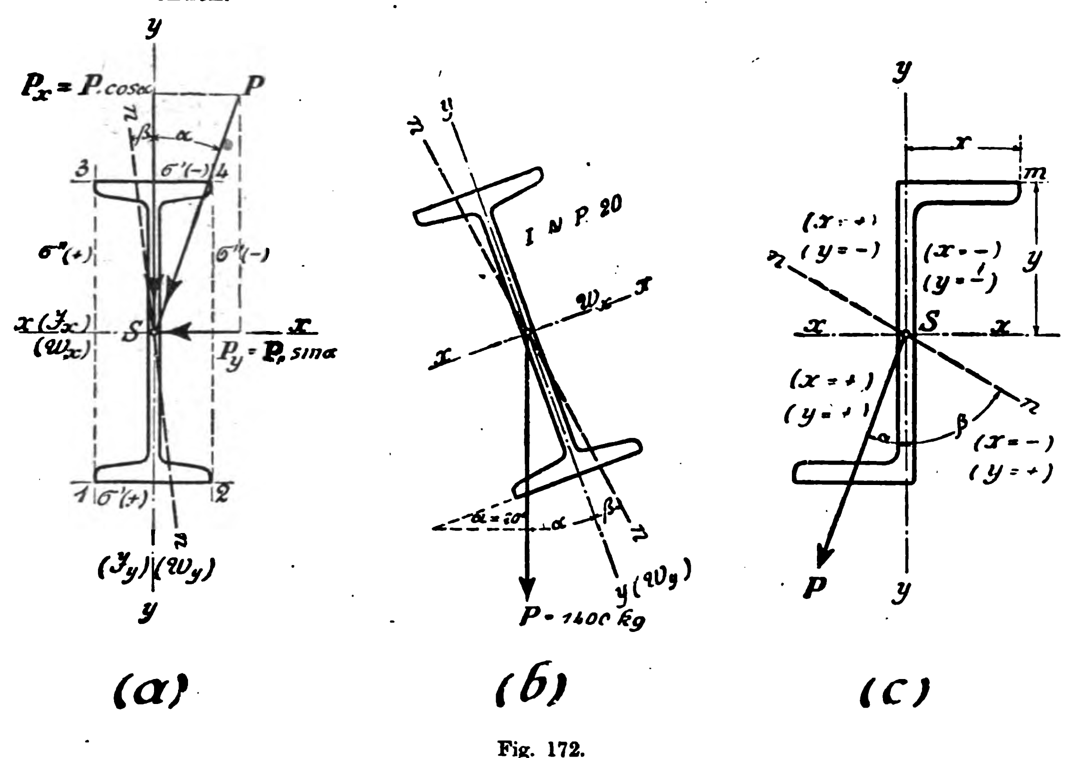


Fig. 172.

Das durch die Kraft P_x an der betreffenden Stelle des Balkens hervorgerufene Moment werde M_x genannt. (Dieses wirkt also rechtwinklig zur x-Achse.) Das Widerstandsmoment des Balkens in bezug auf die x-Achse heiße W_x. Dann entstehen also durch diese Kraft die größten Spannungen:

$$\sigma' = \pm\frac{M_x}{W_x}.$$

In Fig. 172a treten bei der daselbst angenommenen Richtung von P, falls es sich um einen einfachen Balken auf zwei Stützen handelt, in der oberen Faser der größte Druck σ' und in der unteren Faser

Digitized by Google

der größte Zug σ' auf (Fig. 172a). Hiermit ist die Seitenkraft $P = P\cos\alpha$ erledigt.

Nun betrachten wir P_y. Diese Kraft erzeuge das Biegungsmoment M_y, rechtwinklig zur y-Achse. Das Widerstandsmoment des Querschnittes in bezug auf die Achse y—y sei W_y. Dann betragen die größten zu der Kraft $P\sin\alpha$ gehörigen Spannungen:

$$\sigma'' = \pm \frac{M_y}{W_y},$$

und zwar treten diese in der äußersten linken und rechten Faser auf.

Nun wirken in Wirklichkeit P_x und P_y gemeinsam. Um also die wirkliche Spannung in einem Punkte des Querschnittes zu erhalten, müssen wir die beiden, durch $P\cos\alpha$ und $P\sin\alpha$ hervorgerufenen Spannungen summieren (natürlich mit Berücksichtigung der Vorzeichen). Insbesondere ergeben sich für die Stellen, an denen sich die obersten und untersten Fasern mit den äußersten linken und rechten Fasern schneiden, folgende Werte für die Normalspannungen (Fig. 172a):

$$\text{(I)} \qquad \left\{ \begin{array}{ll} \text{Punkt } 1: & \sigma_1 = + \dfrac{M_x}{W_x} + \dfrac{M_y}{W_y}, \\[2ex] \text{Punkt } 2: & \sigma_2 = + \dfrac{M_x}{W_x} - \dfrac{M_y}{W_y}, \\[2ex] \text{Punkt } 3: & \sigma_3 = - \dfrac{M_x}{W_x} + \dfrac{M_y}{W_y}, \\[2ex] \text{Punkt } 4: & \sigma_4 = - \dfrac{M_x}{W_x} - \dfrac{M_y}{W_y}. \end{array} \right.$$

Die Werte M_x und M_y in den obigen Ausdrücken heißen die „*Seitenmomente*". Sie sind nach dem Früheren die Momentensummen des Balkens an dem betrachteten Querschnitte infolge der Seitenkräfte $P\cos\alpha$ und $P\sin\alpha$. Statt aber die letzteren Kräfte wirklich auszurechnen und dann die Momente M_x und M_y zu bilden, wird es meistens einfacher sein, zunächst das Moment M der betrachteten Stelle infolge der wirklich vorhandenen Belastung P zu bilden. Dann ergibt sich nämlich:

$$\text{(II)} \qquad \left\{ \begin{array}{l} M_x = M\cos\alpha, \\ M_y = M\sin\alpha. \end{array} \right.$$

Denn es ist augenscheinlich gleichgültig, ob man sofort die Seitenkräfte von P nimmt und deren Momente bestimmt, oder zunächst das Moment von P bildet und dann nachträglich mit $\cos\alpha$ und $\sin\alpha$ multipliziert.

Digitized by Google

Ferner ersieht man aus den Ausdrücken (I), daß nur die beiden Punkte 1 und 4 untersucht zu werden brauchen. An den Ecken 2 und 3 heben sich nämlich die Wirkungen der beiden Seitenkräfte zum Teil gegenseitig auf, da die eine Zug, die andere Druck hervorruft. Wir erhalten also für den betrachteten Querschnitt die *größten* durch die Belastung P hervorgerufenen Spannungen (Zug und Druck):

$$\text{(III)} \qquad \begin{cases} \underset{+}{\sigma} = +\left(\dfrac{M\cos\alpha}{W_x} + \dfrac{M\sin\alpha}{W_y}\right), \\ \underset{-}{\sigma} = -\left(\dfrac{M\cos\alpha}{W_x} + \dfrac{M\sin\alpha}{W_y}\right). \end{cases}$$

Will man außerdem die Lage der Nullinie bestimmen, so dient hierzu die Gleichung

$$\text{(IV)} \qquad \operatorname{ctg}\beta = \frac{J_x}{J_y} \cdot \operatorname{tg}\alpha\,.$$

Hierin sind J_x bzw. J_y die Trägheitsmomente des Querschnittes in bezug auf die beiden Hauptachsen desselben, und zwar ist das ***kleinere*** Trägheitsmoment stets in den ***Nenner*** des Bruches von Formel (IV) zu setzen. Der Winkel α ist der spitze Winkel zwischen der Lastenebene und derjenigen Hauptachse, zu der das ***kleinere*** Trägheitsmoment gehört. Der Winkel β ergibt sich dann als der Winkel, den die Nullinie mit der Achse des kleineren Trägheitsmomentes bildet (α und β liegen stets zu verschiedenen Seiten derselben Hauptachse; beides sind Winkel zwischen 0^0 und 90^0).

Die Ableitung der Formel (IV) können wir auslassen, da die Untersuchung nicht so wichtig ist. Die größten Spannungen treten natürlich in den Punkten auf, die am weitesten von der Nullinie entfernt sind. (Um diese Punkte zu bestimmen, kann man bei unübersichtlichen Querschnittsformen die Nullinie einzeichnen.)

In § 96, II wird gezeigt werden, wie man für jeden beliebigen Querschnitt die Lage der Hauptachsen auffinden kann. Der soeben beschriebene Weg zur Bestimmung der Spannungen führt also stets zum Ziele! Allerdings ist die Berechnung bei unregelmäßigen Querschnitten recht langwierig.

Beispiel. Ein I-N.-P. 20 hat eine Spannweite $l = 160$ cm und ist unter einem Winkel von $\alpha = 20^0$ gegen die Horizontalrichtung gelagert. (Die Lagerung geschehe in den Schwerpunkten der Endflächen des Trägers.) Die Belastung besteht in einer vertikalen Einzellast von $P = 1400$ kg in Mitte Spannweite. Die größten Spannungen sind zu bestimmen! (Fig. 172b.)

Digitized by Google

Der Winkel der Last mit der y-Achse beträgt $\alpha = 20°$. Das größte Moment ist

$$M = \frac{Pl}{4} = \frac{1400 \cdot 160}{4} = 56000 \text{ cmkg},$$

folglich sind die „Seitenmomente“

$$M' = 56000 \cdot \cos 20° = 56000 \cdot 0{,}940 = 52640 \text{ cmkg},$$
$$M'' = 56000 \cdot \sin 20° = 56000 \cdot 0{,}342 \doteq 19150 \quad „$$

Die Widerstandsmomente ergeben sich aus den Profiltabellen:

$W_x = 214$ cm³ (in bezug auf die Achse x—x),
$W_y = 25{,}9$ „ („ „ „ „ „ y—y).

Somit berechnen sich die größten Spannungen des Balkens:

$$\sigma = \pm\left(\frac{52640}{214} + \frac{19150}{25{,}9}\right)$$
$$= \pm(246 + 739)$$
$$= \pm 985 \text{ kg/qcm}.$$

(Die Lage der Nullinie ergibt sich, mit $J_x = 2139$ cm⁴, $J_y = 117$ cm⁴, zu:

$$\operatorname{ctg}\beta = \frac{2139}{117} \operatorname{tg} 20° = 18{,}3 \cdot 0{,}364 = 6{,}66\,;$$
$$\beta = 8° 30'.)$$

II. Die Hauptachsen des Querschnittes sind unbekannt oder unbequem gelegen.

Die folgenden Formeln gelten für jede beliebige Querschnittsform und für irgendeine Lage der Ebene der äußeren Kräfte. Sie werden zweckmäßig dann angewendet, wenn sich die Hauptachsen des betreffenden Querschnittes nur schwer aufsuchen lassen, oder aber jene so ungünstig liegen, daß sich die Trägheitsmomente und Abstände nur unbequem berechnen lassen.

Da derartige Fälle nicht allzuoft vorkommen, möge es genügen, einen praktischen Rechnungsgang ohne genauere Beweisführung zu erläutern (nach *Müller-Breslau*): Wir legen durch den Schwerpunkt des Querschnittes (Fig. 172c) ein beliebiges rechtwinkliges Achsenkreuz y—y und x—x und berechnen das Trägheitsmoment J_x in bezug auf die x-Achse, das Trägheitsmoment J_y in bezug auf die y-Achse und das Zentrifugalmoment $J_{x,y}$ in bezug auf die beiden Achsen. (Das Achsenkreuz wählt man natürlich so, daß diese Ausrechnungen möglichst bequem werden.) Die Vorzeichen für die Abstände x und y wollen wir so nehmen, daß in den beiden Feldern des Achsenkreuzes, durch die die Lastenebene

Digitized by Google

hindurchgeht, je x und y das gleiche Vorzeichen haben (Fig. 172c). Beträgt dann der (spitze) Winkel zwischen der Lastenebene und der y-Achse $\alpha°$, so ergibt sich zunächst der Winkel β zwischen der Nullinie und der y-Achse:

$$\text{(V)} \quad \begin{cases} \operatorname{ctg}\beta = \dfrac{J_x \cdot \operatorname{tg}\alpha - J_{x,y}}{J_{x,y} \cdot \operatorname{tg}\alpha - J_y}, \\ \text{bzw.} \quad = \dfrac{J_x - J_{x,y} \cdot \operatorname{ctg}\alpha}{J_{x,y} - J_y \cdot \operatorname{ctg}\alpha}. \end{cases}$$

Solange α zwischen 0° und 90° liegt, ist es gleichgültig, welche dieser beiden Formeln man benutzt. Ist aber $\alpha = 0°$, so wird die zweite Formel unbrauchbar, da $\operatorname{ctg}\alpha = \infty$ ist. Dann liefert die erste Formel, da $\operatorname{tg}0° = 0$ ist, den Wert

$$\text{(Va)} \qquad \operatorname{ctg}\beta = \frac{J_{x,y}}{J_y} \quad (\text{falls } \alpha = 0°).$$

Ist aber $\alpha = 90°$, so wird die erste Formel unbrauchbar, und die zweite liefert:

$$\text{(Vb)} \qquad \operatorname{ctg}\beta = \frac{J_x}{J_{x,y}} \quad (\text{falls } \alpha = 90°).$$

(Es ist bekanntlich $\operatorname{tg}0° = 0$, $\operatorname{tg}90° = \infty$; $\operatorname{ctg}0° = \infty$, $\operatorname{ctg}90° = 0$.) Ergibt sich aus den obigen Formeln für $\operatorname{ctg}\beta$ ein positiver Wert, so liegt die Nullinie in denselben Feldern des Achsenkreuzes, durch die die Lastenebene geht. Ist aber $\operatorname{ctg}\beta$ negativ, so ist β in den Feldern aufzutragen, in denen x und y mit entgegengesetzten Vorzeichen auftreten. Immer aber ist β als spitzer Winkel von der y-Achse aus zu zählen.

Mit Hilfe des berechneten Wertes β ergibt sich dann die Spannung in irgendeinem Punkte m des Querschnittes, der von der y- bzw. x-Achse den Abstand x bzw. y hat:

$$\text{(VI)} \quad \begin{cases} \sigma = M \cos\alpha \dfrac{y - x \cdot \operatorname{ctg}\beta}{J_x - J_{x,y} \cdot \operatorname{ctg}\beta} \\ \text{bzw.} \quad = M \sin\alpha \dfrac{x - y \cdot \operatorname{tg}\beta}{J_y - J_{x,y} \cdot \operatorname{tg}\beta}. \end{cases}$$

In diesen Formeln ist M das Biegungsmoment des Balkens an dem betrachteten Querschnitte infolge der Lasten P. Für die Abstände x und y des betreffenden Punktes sind natürlich positive oder negative Zahlen einzusetzen, je nach dem Felde, in dem der Punkt liegt.

Falls $\alpha = 0°$ ist, wird die zweite Formel unbenutzbar und die erste liefert:

$$\text{(VIa)} \qquad \sigma = M \frac{y - x \cdot \operatorname{ctg}\beta}{J_x - J_{x,y} \cdot \operatorname{ctg}\beta} \quad (\text{falls } \alpha = 0°).$$

Digitized by Google

Für $\alpha = 90°$ ist die zweite Formel anzuwenden:

$$\text{(VIb)} \qquad \sigma = M \frac{x - y \operatorname{tg} \beta}{J_y - J_{x,y} \cdot \operatorname{tg} \beta} \quad (\text{falls } \alpha = 90°).$$

Für α zwischen 0° und 90° sind beide Formeln (VI) verwendbar.

Um die größte Spannung des Querschnittes zu erhalten, setzt man die Abstände x und y desjenigen Punktes ein, der am weitesten von der Nullinie entfernt ist. Die Durchbiegung eines solchen Trägers geschieht stets rechtwinklig zur Nullinie. Auf Grund der zu erwartenden Durchbiegung entscheidet man auch am einfachsten, auf welcher Seite Zug und Druck auftreten werden.

Zum Schlusse sei darauf aufmerksam gemacht, daß die obige Bestimmung der Nullinie und der Spannungen natürlich nicht mehr gilt, wenn der Balken sich nicht frei, d. h. rechtwinklig zur Nullinie, durchbiegen kann. Liegt z. B. ein nach Fig. 171h belastetes Winkeleisen unmittelbar neben einer Mauer, durch die es in vertikaler Richtung geführt wird, so kann die Nullinie nur die horizontale Lage haben. Dann gilt für die Spannungsberechnung auch das Trägheitsmoment bzw. das Widerstandsmoment in bezug auf die horizontale Achse.

§ 96.

Entwicklung von Trägheitsmomenten. Aufsuchung der Hauptachsen und Hauptträgheitsmomente eines Querschnittes.

I. Entwicklung von Trägheits- und Zentrifugalmomenten für ein beliebiges Achsenkreuz, falls die entsprechenden Werte für ein anderes Achsenkreuz x, y bereits bekannt sind.

Bei der Ermittlung der Spannungen für unsymmetrische Querschnitte und für schräge Belastungen kam es vor allen Dingen auf eine schnelle Berechnung der Trägheitsmomente an. Es möge nun gezeigt werden, wie man die Trägheitsmomente eines Querschnittes für verschiedene Schwerachsen auseinander entwickeln, und namentlich, wie man stets die Hauptachsen finden kann.

In Fig. 173a soll das Trägheitsmoment J_u in bezug auf die Achse u—u ermittelt werden.

Nach der gewöhnlichen Regel würden wir die Querschnittsfläche in lauter Streifen parallel der Achse u—u zerlegen und die Summe der Produkte: Flächenstreifen $\times$ Quadrat des Abstandes bilden. Statt dessen wollen wir uns jetzt die einzelnen Streifen noch weiter in kleine Vierecke („Flächenelemente") zerlegt denken und diese mit dem Quadrate ihrer Abstände multiplizieren. Augen-

Digitized by Google

scheinlich muß dann die Endsumme dieselbe sein wie vorhin. Diese Flächenelemente mögen Δf_1, Δf_2 usw. heißen (Fig. 173a). Ihre Abstände von der u-Achse seien v_1, v_2 usw. Dann können wir also J_u in der Form schreiben:

$$\text{(I)} \qquad J_u = \Delta f_1 \cdot v_1^2 + \Delta f_2 \cdot v_2^2 + \ldots$$

Ziehen wir nun durch den Schwerpunkt die beiden rechtwinklig zueinander stehenden Achsen x—x und y—y und bezeichnen den

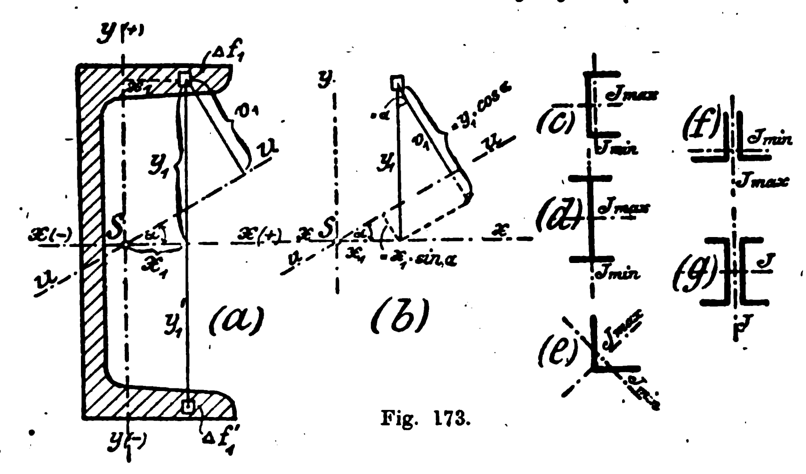


Fig. 173.

Winkel, den die u-Achse mit der x-Achse bildet, mit α, so ist (Fig. 173b):

$$v_1 = y_1 \cos\alpha - x_1 \sin\alpha\,,$$

entsprechend

$$v_2 = y_2 \cos\alpha - x_2 \sin\alpha$$

usw.

Diese Werte in Gleichung (I) eingesetzt, ergibt

$$\text{(Ia)} \qquad J_u = \Delta f_1 (y_1 \cos\alpha - x_1 \sin\alpha)^2 + \Delta f_2 (y_2 \cos\alpha - x_2 \sin\alpha)^2 + \ldots,$$

$$J_u = \Delta f_1 (y_1^2 \cos^2\alpha - 2\,x_1 y_1 \sin\alpha \cos\alpha + x_1^2 \sin^2\alpha) + \Delta f_2 (y_2^2 \cos^2\alpha - 2\,x_2 y_2 \sin\alpha \cos\alpha + x_2^2 \sin^2\alpha) + \ldots$$

Nun fassen wir die Glieder mit $\cos^2\alpha$, mit $\sin\alpha \cos\alpha$ und mit $\sin^2\alpha$ zusammen und erhalten:

$$J_u = (\Delta f_1 y_1^2 \cos^2\alpha + \Delta f_2 y_2^2 \cos^2\alpha + \ldots) - (\Delta f_1 x_1 y_1\, 2 \sin\alpha \cos\alpha + \Delta f_2 x_2 y_2\, 2 \sin\alpha \cos\alpha + \ldots) + (\Delta f_1 x_1^2 \sin^2\alpha + \Delta f_2 x_2^2 \sin^2\alpha + \ldots)\,.$$

Digitized by Google

Da $2 \sin\alpha \cos\alpha = \sin 2\alpha$ ist, so ergibt sich schließlich

$$\text{Ib)} \quad J_u = \cos^2\alpha (\Delta f_1 \cdot y_1^2 + \Delta f_2 \cdot y_2^2 + \ldots) + \sin^2\alpha (\Delta f_1 \cdot x_1^2 + \Delta f_2 \cdot x_2^2 + \ldots) - \sin 2\alpha (\Delta f_1 x_1 y_1 + \Delta f_2 \cdot x_2 \cdot y_2 + \ldots) .$$

Der Ausdruck auf der rechten Seite läßt sich nun folgendermaßen darstellen: In der ersten Klammer steht die Summe der Produkte aller Flächenelemente mal den Quadraten ihrer Abstände von der x-Achse. Dieses ist aber das Trägheitsmoment J_x des Querschnittes in bezug auf die x-Achse, indem statt der einzelnen zur x-Achse parallelen Flächenstreifen deren Flächenelemente eingesetzt sind. Entsprechend stellt die zweite Klammer das Trägheitsmoment J_y in bezug auf die y-Achse dar. Und die letzte Klammer ist nichts anderes als das Zentrifugalmoment $J_{x,y}$ des Querschnittes in bezug auf das Achsenkreuz x, y. Insgesamt ergibt sich also aus Gleichung (Ib):

$$\text{(II)} \quad J_u = J_x \cdot \cos^2\alpha + J_y \cdot \sin^2\alpha - J_{x,y} \cdot \sin 2\alpha .$$

Liegt nun, wie in Fig. 173a, der besondere Fall vor, daß die beiden Achsen x und y Hauptachsen des Querschnittes sind (d. h., daß $J_{x,y} = 0$ ist), so ergibt sich für J_u der noch einfachere Ausdruck:

$$\text{(IIa)} \quad J_u = J_x \cdot \cos^2\alpha + J_y \cdot \sin^2\alpha .$$

Wenn wir also bei einem Querschnitte für *zwei* rechtwinklig zueinander stehende Achsen die Trägheitsmomente und das Zentrifugalmoment (letzteres eventuell gleich Null) kennen, so können wir mit Hilfe der Formeln (II) bzw. (IIa) für jede andere Achse das Trägheitsmoment hinschreiben.

In entsprechender Weise wie Formel (II) läßt sich leicht folgender Satz ableiten: Sind bei einem Querschnitte die Werte J_x, J_y und $J_{x,y}$ für ein rechtwinkliges Achsenkreuz x, y bekannt, so ergibt sich das *Zentrifugalmoment* $J_{u,v}$ für ein Achsenkreuz u, v, dessen u-Achse mit der x-Achse einen Winkel α bildet:

$$\text{(III)} \quad J_{u,v} = \frac{1}{2} (J_x - J_y) \sin 2\alpha + J_{x,y} \cdot \cos 2\alpha .$$

(Man leite diese Formel selber ab!) Waren die x- und die y-Achse Hauptachsen, so ist das Zentrifugalmoment des neuen Achsenkreuzes:

$$\text{(IIIa)} \quad J_{u,v} = \frac{1}{2} (J_x - J_y) \sin 2\alpha .$$

Digitized by Google

II. Aufsuchung der Hauptachsen des Querschnittes mittels der Werte J_x, J_y und $J_{x,y}$ eines beliebigen rechtwinkligen Achsenkreuzes x, y.

Mit Hilfe von Formel (III) läßt sich folgende Frage beantworten: Welchen Winkel α muß das neue Achsenkreuz u, v gegen das gegebene Achsenkreuz x, y bilden, damit das Zentrifugalmoment $J_{u,v}$ des neuen Achsenkreuzes gleich Null wird? Indem man in Formel (III) $J_{u,v}$ gleich Null setzt, ergibt sich:

$$\sin 2\alpha \cdot \frac{1}{2}(J_x - J_y) = -\cos 2\alpha \cdot J_{x,y},$$

$$\text{(IV)} \qquad \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{-2 J_{x,y}}{J_x - J_y},$$

woraus sich der Winkel α berechnen läßt. Wenn wir also das Achsenkreuz u, v so einzeichnen, daß es gegenüber dem ursprünglichen um den soeben berechneten Winkel α gedreht erscheint, so sind u und v *Hauptachsen*. Auf diese Weise kann man die Lage der Hauptachsen eines jeden Querschnittes bestimmen, indem man zunächst für ein beliebiges rechtwinkliges Achsenkreuz die Werte J_x, J_y und $J_{x,y}$ ausrechnet. Die Trägheitsmomente für die Hauptachsen ergeben sich dann aus den Werten J_x, J_y und $J_{x,y}$ mittels der Formeln (II). Man nennt die in bezug auf die Hauptachsen genommenen Trägheitsmomente die **„Hauptträgheitsmomente“** des Querschnittes (J_I und J_{II}).

Jede Symmetrieachse und die zu ihr rechtwinklig durch den Schwerpunkt gezogene Achse bilden ein Hauptachsenkreuz. Da Gleichung (IV) stets auflösbar ist, hat jeder Querschnitt mindestens *ein* Hauptachsenkreuz. Der Kreis z. B. hat aber natürlich unendlich viele.

III. Die Trägheitsmomente für die Hauptachsen sind das größte und das kleinste aller Trägheitsmomente für die Schwerachsen eines Querschnittes.

Wir wollen annehmen, daß durch den Schwerpunkt eines Querschnittes die Hauptachsen gezogen und für diese die Trägheitsmomente J_I und J_{II} berechnet seien. Legen wir dann durch den Schwerpunkt noch irgendeine andere Achse u und berechnen auch für diese das Trägheitsmoment J_u, so läßt sich folgendes zeigen: Das Trägheitsmoment J_u ist stets kleiner als das größere und größer als das kleinere der beiden Hauptträgheitsmomente. Nach Formel (IIa) ist nämlich zunächst:

$$J_u = J_I \cos^2\alpha + J_{II} \sin^2\alpha .$$

Digitized by Google

Ist nun z. B. J_{II} kleiner als J_I, so schreiben wir

$$J_u = J_I \cos^2\alpha + J_{II}(1 - \cos^2\alpha)$$
$$= J_{II} + (J_I - J_{II}) \cos^2\alpha \, .$$

Da $J_I - J_{II}$ positiv ist — denn J_{II} sollte das kleinere der beiden Hauptträgheitsmomente sein — und ferner $\cos^2\alpha$ stets positiv ist, so folgt, daß J_u *größer* als J_{II} ist.

In entsprechender Weise läßt sich zeigen, indem man den Ausdruck für J_u in der Form schreibt:

$$J_u = J_I(1 - \sin^2\alpha) + J_{II} \sin^2\alpha$$
$$= J_I - (J_I - J_{II}) \sin^2\alpha \, ,$$

daß J_u *kleiner* als J_I ist. Der Wert von J_u liegt also zwischen den Werten von J_I und J_{II}. Somit ist der Satz bewiesen:

Die Hauptträgheitsmomente stellen das größte und das kleinste von allen Trägheitsmomenten dar, die zu Schwerpunktsachsen gehören.

Die eine Hauptachse hat also das größte, die andere das kleinste Trägheitsmoment. In vielen Fällen erkennt man auch sofort, zu welcher Achse das größte und zu welcher das kleinste Trägheitsmoment gehört. In Fig. 173c—f sind mehrere Querschnitte gezeichnet und die Trägheitsmomente J_{max} und J_{min} zu den betreffenden Hauptachsen hinzugeschrieben.

Digitized by Google

Abschnitt V.
Die Knickfestigkeit.

Es gibt wohl nur wenige Gebiete der Elastizitätstheorie, auf denen in den letzten Jahren so intensiv gearbeitet ist, wie in der Lehre von der Knickfestigkeit. Die Veranlassung hierzu waren zahlreiche Bauunfälle mit zum Teil recht verhängnisvollen Folgen, bei denen sich als die Ursache des Einsturzes die mangelnde Festigkeit von auf Knicken beanspruchten Konstruktionsteilen nachweisen ließ (Quebecbrücke in Amerika, Gasbehälter in Hamburg u. a.).

Diese intensive Bearbeitung der Knickungslehre hat natürlich manche neue Untersuchung zutage gefördert. Noch wichtiger erscheint es mir aber, daß hierdurch eine alte Erkenntnis bestätigt wurde, die eigentlich selbstverständlich ist, die aber trotzdem von vielen Ingenieuren immer noch nicht beherzigt wird. Nämlich: daß eine Rechenmethode nie mechanisch benutzt werden darf, sondern daß man stets der Bedingungen, unter denen die betreffende Formel abgeleitet wurde und für die sie natürlich auch nur Gültigkeit haben kann, eingedenk bleiben muß.

Gegen diesen Grundsatz ist bei der Behandlung von Knickungsaufgaben in der Praxis vielfach verstoßen. Man wendete gewisse Rechenmethoden, die unter ganz bestimmten Voraussetzungen abgeleitet waren, auch auf solche Fälle an, für die sie gemäß ihrer Ableitung nicht passen konnten, bzw. nicht ausreichten. Die Folge davon war, daß die betreffenden Konstruktionsteile in Wirklichkeit durchaus nicht die Sicherheit besaßen, die man auf Grund der (falsch angewendeten) Theorie annahm, und infolgedessen unter Hinzukommen anderer ungünstiger Umstände zusammenbrachen.

Dieses ist also die Ursache, weshalb man sich in den letzten Jahren so eingehend mit der Knickfestigkeit befaßt hat. Manche bereits früher durchgeführte Untersuchung ist in ihrer Wichtigkeit hervorgehoben und manches Neue ist hinzugekommen. Ein Ingenieur, der an den Arbeiten der letzten Jahre achtlos vorübergeht und auch jetzt noch nach altem Schema alle die verschiedenen Knickungsaufgaben mit einer Formel abzutun gedenkt, handelt einfach fahrlässig.

Digitized by Google

18. Vortrag:

Die Knickformeln und die Berechnung der Stützen.

§ 97.

Der Vorgang des Ausknickens bei zentrisch belasteten Stäben. Die „Knicklast".

Um die Vorgänge bei der Knickbeanspruchung und namentlich die sog. „*Knicklast*" zu verstehen, wollen wir uns einen Versuch ausgeführt denken.

I. Anordnung des Versuches.

In Fig 174a ist ein vertikaler Stab gezeichnet, der unten gelenkig gelagert und oben vertikal geführt ist. Die Belastung geschehe durch eine ebenfalls vertikale Kraft P. Der Stab sei vollständig gerade und aus absolut gleichmäßigem Material; die Last P wirke genau in Richtung der Stabachse (d. h. in der Verbindungslinie der Schwerpunkte der einzelnen Querschnitte).

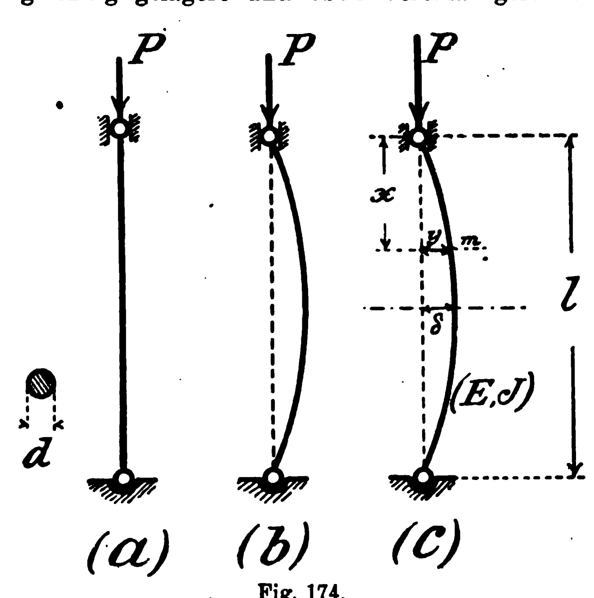


Fig. 174.

Augenscheinlich liegt hier ein Fall reiner Druckbeanspruchung vor. Trotzdem ist die Aufgabe nicht einfach mit der Formel $\sigma = P : F$ erledigt, sondern wegen der Möglichkeit des Ausknickens muß eine besondere Untersuchung erfolgen.

Die Zahlenangaben für Fig. 174 seien:

Material: Flußeisen mit Elastizitätsmodul $E = 2150000$ kg/qcm; Durchmesser $d = 2{,}5$ cm; Länge $l = 90{,}0$ cm.

Die Last P nehme vom Werte Null an allmählich zu.

Digitized by Google

II. Ergebnisse des Versuches.

Erstes Stadium: Belastung unter der Knicklast.

Solange die Last gering ist, z. B. $P = 2000$ kg, zeigt sich an dem Stabe als einzige Formänderung die Zusammendrückung, die er nach dem Hookeschen Gesetze erleiden muß. Eine seitliche Ausbiegung findet in diesem Stadium noch nicht statt. Ja, noch mehr: Wenn man den Stab absichtlich etwas ausbiegt und dann losläßt (Fig. 174b), so schnellt er von selber in die gerade Stellung Fig. 174a zurück und kommt in dieser zur Ruhe. Bekanntlich nennt man eine solche Gleichgewichtslage, in die ein Körper von selber zurückkehrt, falls er absichtlich etwas daraus entfernt wurde, eine „stabile“ Lage. (Beispiel: Das Gleichgewicht eines auf seiner Basis ruhenden Kegels; u. a.). Wir sehen also bei unserem Knickversuch: Bei der angenommenen Belastung von $P = 2000$ kg ist für diesen Stab die ursprüngliche gerade Stellung eine stabile Gleichgewichtslage.

Zweites Stadium: Belastung über der Knicklast.

Nun möge die Last wachsen, z. B. auf $P = 5000$ kg. Bei dieser Belastung zeigt sich eine grundsätzliche Änderung des Gleichgewichtszustandes: Der Stab verläßt seine ursprüngliche gerade Gleichgewichtslage und nimmt eine gebogene Stellung an. Er knickt aus.

Man beachte wohl, daß dieses Ausknicken auch dann stattfindet, wenn der Stab vollständig gerade war und die Last nach Möglichkeit genau zentrisch wirkte. Eigentlich hätte er also gar keine Veranlassung, auszuknicken. Trotzdem tut er es aber. Die Sache liegt genau so wie bei einem auf die Spitze gestellten Kegel: Theoretisch könnte er in dieser Stellung im Gleichgewichte bleiben; praktisch läßt sich aber die Stellung als Gleichgewichtslage nicht aufrechterhalten. Bekanntlich nennt man eine solche Gleichgewichtslage, die ein Körper nur vorübergehend einnimmt und bei der geringsten Veranlassung von selber verläßt, „labil“. Wir sehen also: Bei $P = 5000$ kg ist für diesen Stab die gerade Stellung eine labile Gleichgewichtslage.

3. Zusammenfassung.

Zusammenfassend haben wir also bei unserem Knickversuch gesehen: Ein auf zentrischen Druck beanspruchter gerader Stab erfährt bei zunehmender Last eine grundsätzliche Änderung hinsichtlich des Charakters seines Gleichgewichtszustandes: Bei ge-

Digitized by Google

ringer Belastung hat seine ursprüngliche gerade Stellung einen stabilen Charakter, bei größerer Belastung dagegen einen ausgeprägt labilen Charakter. Und zwar tritt diese Änderung auch bei sorgfältigster ursprünglicher Zentrierung von Last und Stab ein.

Diejenige Last, bei der die ursprünglich stabile gerade Gleichgewichtslage einen **labilen Charakter annimmt, nennen wir** die **Knicklast P_K.**

Die Ermittlung dieser Knicklast P_K ist natürlich von größter Wichtigkeit für die Praxis. Ist ein Stab nahe an der Knicklast beansprucht, so kann er selbst bei sorgfältigster Zentrierung nicht mehr gehalten werden. Vielmehr wird er bei der geringsten — stets vorliegenden — Veranlassung ausknicken.

§ 98.

Bestimmung der Knicklast nach *Euler* und *v. Tetmajer*.

Bei der rechnerischen Bestimmung der Knicklast wird sich ein Unterschied ergeben, je nachdem es sich um einen sehr schlanken oder einen gedrungenen Stab handelt.

I. Knicklast schlanker Stäbe: *Euler*sche Formel.

Die korrekte Bestimmung der Knicklast erfordert sehr schwierige mathematische Ableitungen. Wir wollen uns deshalb darauf beschränken, den Gedankengang und das Resultat dieser Rechnungen anzugeben.

Die ganze Untersuchung wird auf die Frage hinauslaufen: Wie groß ergeben sich die Ausbiegungen y an den einzelnen Stellen eines Stabes, auf den eine gegebene Kraft P zentrisch einwirkt? Die Lösung dieser Aufgabe geschieht auf folgende Weise:

1. Mathematisches Resultat.

Wenn ein Stab unter einer Last P ausbiegt, so ergibt sich infolge dieser Ausbiegung für jede Stelle des Stabes ein Biegungsmoment (Fig. 174c). Beispielsweise ist für die Stelle m des Stabes Fig. 174c dieses Moment:

$$M = \text{Last} \times \text{Hebelarm} = P \cdot y\,.$$

Nun wissen wir aus der Lehre von den Durchbiegungen (14. Vortrag): Wenn wir für einen Stab die Momente angeben können, so können wir daraus an jeder Stelle die Drehungswinkel der

Digitized by Google

einzelnen Elemente gegeneinander berechnen und aus den Winkeln schließlich auch die Einsenkungen. (In § 62 u. f. haben wir ja auf diese Weise die Drehungswinkel usw. berechnet.) Im Falle der Fig. 174c wird die Ausrechnung dieser Drehungswinkel usw. allerdings dadurch erschwert, daß in dem Ausdrucke für die Momente M die Abstände y selber noch unbekannt sind. Immerhin gelingt es, auch für diesen Belastungsfall eine Formel aufzustellen, nach der man die Ausbiegungen y aus der Last P berechnen kann. Und zwar ergeben sich je nach der Größe der Last P ganz verschiedene Werte für die Ausbiegungen y.

Bezeichnet nämlich:

l = Stablänge, J = Trägheitsmoment, E = Elastizitätsmodul,

so ergibt die Rechnung folgende Fälle:

a) Ist die Last P zwischen den Werten 0 bis zu dem besonderen Werte $P = \pi^2 \frac{EJ}{l^2}$, so kommt für die Ausbiegungen der Wert „Null" heraus.

b) Hat P den besonderen Wert $P = \pi^2 \frac{EJ}{l^2}$, so kommen für die Ausbiegungen y verschiedene Werte heraus; nämlich sowohl der Wert „Null" als irgendein anderer Wert.

c) Wenn P über den soeben erwähnten besonderen Wert hinausgeht, so ergeben sich hinsichtlich der Ausbiegungen y wiederum andere Werte, auf die wir aber nicht einzugehen brauchen.

Dieses sind also die mathematischen Resultate, zu denen die eingangs erwähnte Aufgabe führt.

2. *Physikalische Deutung der Resultate.*

a) Wenn sich die Ausbiegungen y gleich Null ergeben, so bedeutet dieses augenscheinlich, daß der Stab **gerade** bleibt. Die Rechnung zeigt uns also, daß, solange die zentrische Last

$$P \textit{ kleiner als } \pi^2 \frac{EJ}{l^2}$$

ist, **überhaupt kein Ausknicken stattfindet.**

b) Wenn die Ausbiegungen sowohl Null als auch endlich sein können, so bedeutet dieses, daß der Stab entweder gerade bleiben oder auch ausknicken kann. Der Wert

$$\text{(I)} \qquad P = \pi^2 \frac{EJ}{l^2}$$

ist also die Grenze, an der das Verhalten des Stabes unbestimmt wird. Nun zeigt aber eine noch weitergehende Untersuchung,

Digitized by Google

daß die gerade Stellung des Stabes (mit den Werten $y = 0$) eine labile Gleichgewichtslage darstellt. Wir haben somit die Größe der Last P gefunden, an der das ursprünglich stabile Gleichgewicht des geraden Stabes einen labilen Charakter annimmt; d. h. der obige Wert der Last P bedeutet die Knicklast.

c) Der Fall, daß

$$P > \pi^2 \frac{EJ}{l^2},$$

kommt für die Praxis nicht in Betracht, da ja schon vorher ein Ausknicken stattgefunden hat.

Somit haben wir aus der Betrachtung der Durchbiegungen y diejenige Last gefunden, bei der selbst bei sorgfältigster Zentrierung ein Ausknicken des Stabes zu erwarten ist. Bei Erreichung dieser Grenze kann der Stab theoretisch zwar noch in der geraden Stellung verbleiben; praktisch wird er es aber nicht mehr tun, sondern er knickt aus.

Die Formel (I) heißt die *Euler*sche Knickformel.

II. Knicklast gedrungener Stäbe: *Tetmajer*sche Formel.

1. Einschränkung zur *Euler*schen Formel.

Die Eulersche Knickformel ist wiederholt hinsichtlich ihrer Übereinstimmung mit der Praxis geprüft. Hierbei ergibt sich, daß die Formel für schlanke Stäbe sehr gut übereinstimmt; dagegen für gedrungene Stäbe nicht. Dies hat folgenden Grund:

Ein Stab von dem Querschnitte F und dem Trägheitsmoment J werde bis zur Knicklast belastet. Es werde also gerade $P = \pi^2 \frac{EJ}{l^2}$. Die Druckspannuug, die der Stab in diesem Zustande erfährt — die sog. „Knickspannung" —, ist dann:

$$\sigma = \frac{P}{F} = \pi^2 \frac{EJ}{l^2 \cdot F},$$

oder, anders geschrieben,

$$\text{(II)} \qquad \sigma = \pi^2 E \cdot \frac{J/F}{l^2}.$$

Falls nun diese Spannung σ bereits oberhalb der Proportionalitätsgrenze liegt, müssen wir erwarten, daß unsere ganze bisherige Untersuchung unzutreffend ist. Denn die bisherige Untersuchung der Knickfestigkeit knüpfte an die Berechnung der Abbiegungen y an. Durchbiegungen oder

Digitized by Google

überhaupt elastische Formänderungen kann man aber nur dann berechnen, wenn das betreffende Material unterhalb der Proportionalitätsgrenze beansprucht ist. Folglich wird auch unsere ganze bisherige Untersuchung nur dann richtig sein, wenn die Spannungen, die dabei auftreten, unterhalb der Proportionalitätsgrenze bleiben.

Auf Grund der Formel (II) können wir direkt angeben, bis zu welcher Grenze höchstens die bisherige Untersuchung richtig sein kann. Nehmen wir für den betreffenden Stab (Eisen) an:

Proportionalitätsgrenze $\sigma = 2400$ kg/qcm,

Elastizitätsmodul $E = 2\,150\,000$ „ .

Mit Einsetzung dieser Werte lautet dann die Formel (II):

$$2400 = 3{,}14^2 \cdot 2\,150\,000 \, \frac{J/F}{l^2},$$

$$\frac{J/F}{l^2} = \frac{2400}{3{,}14^2 \cdot 2\,150\,000} = \frac{1}{8840},$$

$$\text{(IIa)} \qquad \frac{\sqrt{J/F}}{l} = \sqrt{\frac{1}{8840}} = \frac{1}{94}.$$

Wenn also bei dem betreffenden Stab (mit der Länge l, dem Querschnitt F und dem Trägheitsmoment J) der Wert $(\sqrt{J:F}:l)$ gerade gleich 1/94 ist, so ist die Spannung, die bei der Knicklast auftritt, gerade an der Proportionalitätsgrenze. Dann kann man also erwarten, daß die bisherige Untersuchung zutreffend sein wird Ist aber der Wert $(\sqrt{J/F}:l)$ größer als 1/94, so ist die zu der Knicklast gehörige Spannung σ oberhalb der Proportionalitätsgrenze [denn σ wächst wie $(J:F):l^2$, s. Formel (II)]. Dann können wir also nicht verlangen, daß die ganze Ableitung (mit den Abbiegungen y usw.) noch mit der Wirklichkeit übereinstimmen soll.

Hiermit ist eine Grenze gefunden, bis zu der die Eulerschen Untersuchungen noch gültig sein können. Man sieht, daß, je größer l ist im Verhältnis zu $(J:F)$, desto kleiner der Bruch $(\sqrt{J:F}:l)$ ist. Die Eulersche Knickuntersuchung wird also hauptsächlich bei schlanken Stäben (mit großem l) zutreffen. Bei gedrungenen Stäben (mit kleinem l) kann der Bruch $(\sqrt{J:F}:l)$ leicht größer werden als 1 : 94, so daß hier die Eulersche Formel ungültig wird.

2. Andere Schreibweise der Gleichung (IIa).

Wegen des Folgenden wollen wir für die Gleichung (IIa) noch eine etwas andere Schreibweise einführen. Wir nennen nämlich

Digitized by Google

die Quadratwurzel aus dem Quotienten $J:F$ den Trägheitsradius i; also

$$\sqrt{J:F} = \text{„Trägheitsradius"}\ i.$$

[J hat die Bezeichnung cm^4, F hat die Bezeichnung cm^2. Folglich erscheint der Quotient $J:F$ als $cm^4 : cm^2 = cm^2$. Die Wurzel hieraus erscheint also als eine Länge (cm). Der Name „Radius" für diesen Quotienten $i = \sqrt{J:F}$ stammt von einer anderen Untersuchung — über Trägheitsmomente im allgemeinen —, bei der ebenfalls der Wert $\sqrt{J:F}$ vorkommt.]

Mit dieser Hilfsbezeichnung lautet die Gleichung (IIa):

$$\text{(IIb)} \qquad \frac{i}{l} = \frac{1}{94}.$$

In Worten: Damit die bei der Knicklast auftretende Spannung σ höchstens gleich der Proportionalitätsgrenze (2400 kg/qcm) wird, darf das Verhältnis von Trägheitsradius i zu Stablänge l höchstens gleich $1:94$ sein. Ist bei einem Stabe das Verhältnis $i:l$ größer als $1:94$, so ist die Spannung über der Proportionalitätsgrenze. Dann ist nicht zu erwarten, daß die Eulersche Knickuntersuchung noch zutreffen wird.

8. Die *Tetmajer*sche Formel.

v. Tetmajer hat zahlreiche Versuche angestellt, um praktisch zu sehen, an welcher Stelle die Gültigkeit der Eulerschen Formel aufhört. Er hat gefunden, daß die Eulersche Formel ihre Gültigkeit bereits dann verliert, wenn bei dem betreffenden Stabe (aus Flußeisen) das Verhältnis

$$\frac{i}{l} = \frac{1}{105}$$

wird. Dieser Wert ist also kleiner als der vorhin errechnete Wert $i:l = 1:94$; d. h. nach den Versuchen verliert die Eulersche Knickbetrachtung bereits bei noch recht schlanken Stäben (mit großem l) ihre Gültigkeit, wo sie sie eigentlich noch haben müßte. Wahrscheinlich kommt dieser Unterschied zwischen Beobachtung und Rechnung dadurch, daß bei den Tetmajerschen Versuchen die Belastung nicht immer genau zentrisch wirkte.

Augenblicklich sieht man die Tetmajerschen Versuche als die beste Grenzbestimmung für die Eulersche Formel an. Man kehrt den Bruch $i:l = 1:105$ gewöhnlich um und schreibt also:

Die Grenze für die Zulässigkeit der Eulerschen Knickformel ist

$$\text{(III)} \qquad l:i = 105.$$

Ist der Stab schlanker; d. h. ist l größer, und somit auch $(l:i) > 105$, so ist natürlich die Eulersche Formel erst recht zu

Digitized by Google

benutzen. Ist aber der Stab gedrungener, also $l:i < 105$, so ist die Eulersche Formel unzulässig.

Für diesen Fall, daß die Eulersche Betrachtung versagt, gibt nun Tetmajer eine andere Formel an. Er verzichtet darauf, den Knickungsvorgang mathematisch zu analysieren, sondern stützt sich statt dessen auf eine Reihe eingehend durchgeführter Versuche. Seine Regel lautet: Wenn ein (gedrungener) Stab aus Flußeisen, dessen Länge l und dessen Trägheitsradius $i\,(=\sqrt{J:F})$ ist, durch eine zentrische Kraft auf Knicken beansprucht wird, so beträgt die Spannung, bei der erfahrungsgemäß das Ausknicken eintritt:

$$\text{(IV)} \qquad \text{Knickspannung } \sigma_K = \left(3{,}10 - 0{,}0114\,\frac{l}{i}\right) \text{t/qcm.}$$

Die Knickkraft ergibt sich hiernach durch Multiplikation mit der Querschnittsfläche:

$$\text{(V)} \qquad \text{Knicklast } P_K = F\left(3{,}10 - 0{,}0114\,\frac{l}{i}\right) \text{(in Tonnen).}$$

Die Formeln (V) und (IV) entsprechen also den Eulerschen Formeln (I) und (II), da, wo letztere nicht mehr gelten.

III. Zusammenfassung und Schlußbetrachtung.

In diesem Paragraphen handelte es sich um die rechnerische Bestimmung der (zentrischen) Knickkraft.

1. Die Untersuchung der Abbiegungen y führte zu dem Resultat, daß, solange die Last unter einem gewissen Werte bleibt, ein Ausknicken nicht stattfindet (da die Ausbiegungen y sich gleich Null ergeben). Von einem gewissen Werte an kann aber ein Ausknicken stattfinden; und es wird auch stattfinden, da die gerade Stellung nur noch einen labilen Charakter hat. Dieser bestimmte Wert ist nach *Euler*:

$$\text{(1)} \qquad \boxed{P_{K(E)} = \pi^2 \frac{EJ}{l^2}.}$$

Die bei dieser Knickkraft im Stabe auftretende Spannung, die sog. „*Knickspannung*“, ist (mit der Schreibweise $\sqrt{J:F} = i$):

$$\text{(2)} \qquad \sigma_{K(E)} = \pi^2 E \frac{J/F}{l^2} = \pi^2 E \left(\frac{i}{l}\right)^2.$$

2. Die Betrachtung dieser Spannung führte nun zu der Erkenntnis, daß die ganze Eulersche Untersuchung nicht mehr zutreffen wird, sobald σ_K bereits jenseits der Proportionalitätsgrenze

Digitized by Google

liegt. Experimentell ist diese Frage weiter durch v. Tetmajer verfolgt. Als Kennzeichen ergab sich aus diesen Versuchen (etwas abweichend von der theoretisch gefolgerten Grenze): *Sobald* (beim Flußeisen) *das Verhältnis*

$$\frac{l}{i} < 105 \qquad (3)$$

ist, gilt die Eulersche Formel nicht mehr.

3) Für den letzteren Fall gibt nun *Tetmajer* aus seinen Versuchen eine andere Formel: Die Knickspannung, bei der ein Ausknicken zu erwarten ist, ist nach Tetmajer (bei Flußeisen):

$$\sigma_{K(T)} = \left(3{,}10 - 0{,}0114\,\frac{l}{i}\right) \text{(in t/qcm)}; \qquad (4)$$

die Knickkraft selber also:

$$\boxed{P_{K(T)} = F\left(3{,}10 - 0{,}0114\,\frac{l}{i}\right).} \qquad (5)$$

4) Hinsichtlich der Richtung des Ausknickens sei noch folgendes zugefügt: Im allgemeinen wird der Stab natürlich um die Achse knicken, die das kleinste Trägheitsmoment hat. Folglich ist auch in die obigen Formeln das kleinste Trägheitsmoment einzusetzen. (S. Beispiele § 98b.) Es kommen aber auch Fälle vor, wo der Stab infolge besonderer Führungen (seitliche Abstützungen) nur um eine andere Achse knicken kann. Dann ist das Trägheitsmoment dieser vorgeschriebenen Achse einzusetzen.

Schlußbemerkung: Es muß hervorgehoben werden, daß in Norddeutschland die Tetmajersche Formel z. Z. sehr wenig benutzt wird. Man rechnet fast allgemein nur mit der Eulerschen Formel. Dies kommt wohl daher, weil die amtlichen preußischen Vorschriften sowohl für Brücken als für Hochbauten nur einen Nachweis nach Euler verlangen, gleichgültig, ob es sich um einen schlanken oder einen gedrungenen Stab handelt. Die Tetmajerschen und andere Versuche weisen aber unzweifelhaft nach, daß der ausführende Ingeniuer sich mit einer derartigen generellen Behandlung der Knickungsfrage nicht begnügen darf.

§ 98a.

Weitere Erläuterungen zu den Knickformeln.

Einige Punkte der bisher durchgenommenen Knickungstheorie müssen noch besonders hervorgehoben, bzw. ergänzt werden.

Digitized by Google

I. Einfluß einer Exzentrizität.

Der bisher zugrunde gelegte Fall war der, daß die knickende Kraft zentrisch wirken sollte. Dieser Fall ist aber in der Praxis sehr selten. Meistens wird die Kraft nicht genau in der Stabachse wirken, oder letztere ist selber nicht genau gerade, so daß ein gewisser exzentrischer Kraftangriff entsteht. Die Wirkung einer solchen, nie zu vermeidenden Exzentrizität auf das Knickverhalten des Stabes wollen wir nun untersuchen.

Wenn auf einen Stab eine Kraft exzentrisch aufgebracht wird, wird er natürlich sofort etwas nach der Seite der Kraft abbiegen. Der bei zentrischem Druck anfänglich bestehende Zustand der geraden Stabachse kommt also bei exzentrischem Druck überhaupt nicht vor. Trotzdem bedeuten aber diese Abbiegungen noch lange kein Knicken. Denn es zeigt sich, daß diese — leicht gebogene — Stellung des exzentrisch belasteten Stabes eine stabile Gleichgewichtslage ist. Wie Versuche ergeben, findet ein eigentliches Ausknicken erst bei annähernd derselben Belastung statt, wie bei zentrischem Druck. Allerdings gilt dies hauptsächlich für schlanke Stäbe. Bei gedrungenen Stäben scheint durch eine ursprünglich vorhandene Exzentrizität die Knicklast merkbar herabgesetzt zu werden. Doch läßt sich der Einfluß rechnerisch nicht verfolgen; bzw. es fehlen genügend Versuche hierüber.

Natürlich hat aber eine Exzentrizität Einfluß auf die auftretende Spannung. Denn jeder auf Knicken beanspruchte Körper ist zunächst doch auf Druck zu untersuchen. (Es kann eventuell P_K sehr hoch sein, so daß der Körper gegen Knicken durchaus gesichert ist, während er dagegen durch den Druck zermalmt wird.) Bei dieser Druckuntersuchung tritt die Exzentrizität insofern in Erscheinung, als der Fall „Biegung durch exzentrischen Druck“ (16. Vortrag) zu berücksichtigen ist. (Näheres s. § 99, Berechnung der Stützen.)

Zusammenfassung.

Bei auf Knicken beanspruchten Konstruktionsteilen müssen wir stets auf eine Exzentrizität der Last gefaßt sein. Doch wird diese Exzentrizität bei Berechnung der Knicklast des Stabes — sowohl bei $P_{K(E)}$ wie $P_{K(T)}$ — nicht berücksichtigt; bei schlanken Stäben mit Recht, bei gedrungenen Stäben mit weniger Recht.

Die Exzentrizität ist natürlich zu berücksichtigen bei der Berechnung der im Stabe auftretenden Normalspannung.

Digitized by Google

II. Die Art der Stützung des Stabes (Einspannung).

Den bisherigen Knickuntersuchungen ist der Fall zugrunde gelegt, daß der betreffende Stab an beiden Enden Gelenke hat, von denen das eine gelagert, das andere geführt ist (Fig. 174 und Fig. 175b). Das Kennzeichnende dieser Stützungsart besteht darin, daß beide Enden sich frei drehen können. In Fig. 175a, c und d sind nun noch andere mögliche Stützungsarten gezeichnet; Fig. 175a: unten eingespannt, oben vollständig frei; Fig. 175c: unten eingespannt, oben gelenkig geführt; Fig. 175d: oben und unten eingespannt (das obere Element also eingespannt geführt, so daß es sich nicht drehen kann).

Zu jeder dieser Lagerungsart ist in Fig. 175 die Knicklast P_K, und zwar nach Euler, hinzugeschrieben. Für den Fall II haben wir sie in den vorigen Paragraphen bestimmt; für die übrigen Fälle werden sie entsprechend gefunden.

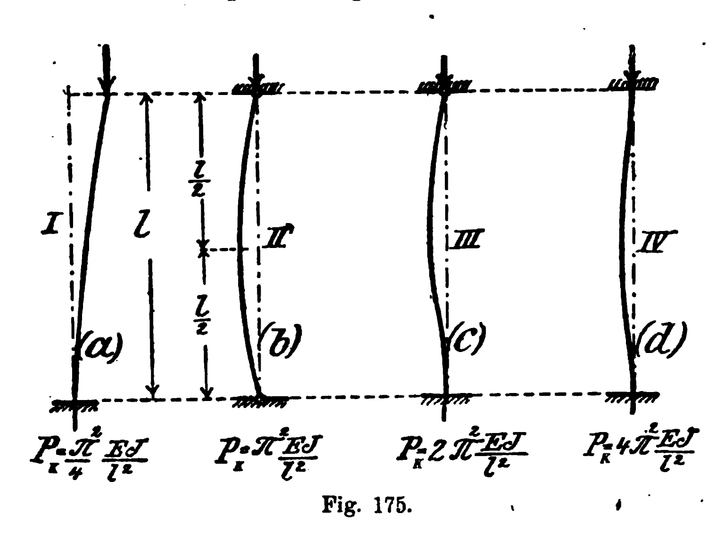


Fig. 175.

Bezeichnet man den Fall II, gewissermaßen als den Normalfall, mit 1, so verhalten sich die einzelnen Knicklasten wie $^1/_4 : 1 : 2 : 4$.

Hinsichtlich des Vorkommens der einzelnen Fälle sei noch bemerkt: Fall II ist fast stets anzunehmen, namentlich bei Stützen, Druckgliedern bei Fachwerken, usw. Fall I (der erheblich ungünstiger ist) ist natürlich dann anzunehmen, wenn die obere Führung gänzlich fehlt oder unzuverlässig ist. Die Fälle III und IV (die erheblich günstiger sind) sind fast nie anzunehmen, da eine wirkliche, absolut zuverlässige, Einspannung in der Praxis kaum vorkommt.

Digitized by Google

Diese Untersuchungen beziehen sich auf den Fall, daß die Knicklast nach Euler zu berechnen ist. Tetmajer gibt in seinem Buche nur Angaben über den II. Fall, der ja auch fast stets vorliegt und auf den sich seine Versuche erstreckten. Im Falle I ist die Knickkraft entsprechend kleiner zu nehmen. Eine Erhöhung der Knickkraft anzunehmen, falls eine — mehr oder minder gute — Einspannung vorliegt, ist auch hier nicht zu empfehlen.

Zusammenfassung.

Auf die Größe der von einem Stabe ausgehaltenen Knicklast ist seine Lagerung von bedeutendem Einfluß, indem sich seine Knicklasten verhalten wie $^1/_4 : 1 : 2 : 4$. Für die Praxis ist meistens der Fall II anzunehmen, vorausgesetzt, daß nicht der (noch ungünstigere) Fall I vorliegt.

III. Einfluß des Materials des Stabes.

Das Material des Stabes ist natürlich ebenfalls von großem Einfluß auf seine Knicklast. Bisher haben wir Flußeisen untersucht. Wie lauten nun die Formeln für andere Materialien?

1. Die Eulerschen Formeln

bleiben unverändert, nur daß für den Wert „E" jedesmal der Elastizitätsmodul des betreffenden Materials einzusetzen ist. Hierdurch ist der verschiedenen Widerstandsfähigkeit gegen Knicken bei den verschiedenen Stoffen Rechnung getragen.

Natürlich ist je nach dem Material auch die Grenze eine andere, bis zu der die Eulersche Knickuntersuchung überhaupt gültig ist. Denn diese Grenze hängt ja von der Proportionalitätsgrenze des betreffenden Materials ab. Nach Tetmajers Versuchen sind diese Grenzen:

$$\text{(I)} \quad \begin{cases} \text{bei Flußeisen} \ldots\ldots l:i = 105 \\ \text{„ Schweißeisen} \ldots l:i = 112 \\ \text{„ Gußeisen} \ldots\ldots l:i = 80 \\ \text{„ Bauholz} \ldots\ldots l:i = 100 \\ \text{„ Flußstahl} \ldots\ldots l:i = 90. \end{cases}$$

Wenn also l größer ist (d. h. wenn der Stab schlanker ist), gelten die Eulerschen Formeln; sonst die Tetmajerschen.

Digitized by Google

2. Die Tetmajerschen Formeln

sind je nach dem Material verschieden:

$$
\text{(II)} \begin{cases}
\text{für Flußeisen} \ldots\ldots P_K = F\left(3{,}10 - 0{,}0114\,\frac{l}{i}\right) \\
\text{„ Schweißeisen} \ldots P_K = F\left(3{,}03 - 0{,}0129\,\frac{l}{i}\right) \\
\text{„ Gußeisen} \ldots\ldots P_K = F\left[7{,}76 - 0{,}120\,\frac{l}{i} + 0{,}00054\left(\frac{l}{i}\right)^2\right] \\
\text{„ Bauholz} \ldots\ldots P_K = F\left(0{,}293 - 0{,}00194\,\frac{l}{i}\right) \\
\text{„ Flußstahl} \ldots\ldots P_K = F\left(3{,}35 - 0{,}0062\,\frac{l}{i}\right).
\end{cases}
$$

In diese Formeln ist F in qcm einzusetzen. Die Länge l und der Trägheitsradius $(i = \sqrt{J : F})$ sind natürlich beide in gleichem Maße zu nehmen. Die Kräfte P_K sind dann in t zu nehmen.

Zusatz: Bei Gußeisen und Holz ist die Eulersche Knickuntersuchung bereits an und für sich sehr unsicher, da bei diesen Materialien nicht das Hookesche Gesetz der Formänderungen gilt (also eigentlich überhaupt keine Proportionalitätsgrenze gibt). Infolgedessen ist die Berechnung der Abweichungen y und somit die ganze Eulersche Untersuchung sehr unbestimmt.

Zusammenfassung.

In die Eulerschen Formeln ist bei verschiedenen Materialien jeweils das betreffende „E" einzusetzen; im übrigen bleiben die Formeln unverändert. Es ändert sich aber je nach dem Material der Gültigkeitsbereich der Formel.

Bei den Tetmajerschen Formeln ist für jedes Material eine besondere Formel zu verwenden.

IV. Knickfestigkeit zusammengesetzter Profile und die Berechnung der Querverbindungen.

Bekanntlich werden Druckstäbe häufig aus mehreren Teilstäben, z. B. aus 2 [-Eisen, zusammengesetzt, die durch Vergitterung miteinander verbunden werden. Es fragt sich nun, ob ein solcher, gewissermaßen durchbrochener Stab sich hinsichtlich Knicken ebenso verhält wie ein vollständig gleichmäßiges Profil (voller Kreisquerschnitt u. dgl.).

Die Antwort darauf hat die praktische Erfahrung gegeben: Es ist nachgewiesen, daß die Einstürze von Druckstäben

Digitized by Google

vielfach deshalb erfolgt sind, weil ein derartig zusammengesetztes Profil nicht dasselbe hält wie ein einheitlicher Querschnitt, und daß die in der Praxis übliche Verbindung der Teilprofile häufig zu schwach ist.

Leider ist die theoretische Behandlung dieses Falles sehr schwierig und trotzdem nicht vollkommen. Wir wollen deshalb zunächst die bisher übliche, angenäherte Rechenmethode vorführen. Von den neueren, schärferen Untersuchungen möge nur ein von Professor Krohn (Danzig) angegebenes Verfahren erläutert werden, das zwar in theoretischer Hinsicht durchaus nicht lückenlos ist, das aber wenigstens für die Praxis sehr bequeme Formeln liefert. Im Zusammenhange damit wird dann auch auf die Berechnung der Bindebleche usw. eingegangen werden.

1. Bisheriges Verfahren.

Wenn ein Stab aus mehreren Profilen zusammengesetzt ist, z. B. aus 2 [-Eisen (Fig. 175°a und b), so rechnet man bis jetzt wohl allgemein folgendermaßen:

a) Untersuchung hinsichtlich Knicken. Zunächst wird der Stab als Ganzes betrachtet. Man berechnet also für den Querschnitt das Trägheitsmoment für die x-Achse und für die y-Achse. [J_x direkt $= 2 \times$ Trägheitsmoment eines [-Eisens; J_y unter Benutzung der Formel $J_n = J + F \cdot a^2$.] Mit diesen Werten verfährt man hierauf genau so wie bei einem vollen Stabe: Man nimmt an, daß der Stab um die Achse knicken wird, die das kleinere Trägheitsmoment hat, und dieses wird in die Eulersche, bzw. Tetmajersche Formel zur Berechnung der Knicklast P_K eingesetzt. Der Vergleich von P_K mit der aufzunehmenden Last P ergibt dann, ob der Stab als Ganzes knicksicher ist.

Dann untersucht man die Einzelstäbe, aus denen der Gesamtstab zusammengesetzt ist. Hierbei nimmt man an, daß die Gesamtlast P sich gleichmäßig auf die Einzelstäbe verteilen wird. Durch diese Annahme hat man den Lastanteil P' jedes Einzelstabes, und kann nun vergleichen, ob seine Knicklast (Tragfähigkeit) P'_K entsprechend größer ist als seine aufzunehmende Last P'. [Bei Berechnung von P'_K muß man natürlich das kleinste Trägheitsmoment des betreffenden Einzelstabes einführen. Seine Knicklänge ist der Abstand c zwischen zwei Bindeblechen.]

b) Untersuchung der Verbindungsteile (Bindebleche, Vergitterung). Deren Berechnung macht man sich noch bequemer: man berechnet sie überhaupt nicht.

Digitized by Google

2. Das Krohnsche Verfahren

bezieht sich zunächst nur auf gedrungene Stäbe, die nach Tetmajer zu berechnen sind. Als Notbehelf wird es auch auf schlanke Stäbe übertragen. Übrigens sind derartige, zusammengesetzte Druckstäbe meistens sowieso nach Tetmajer zu behandeln.

Bei einem Querschnitte wie Fig. 175°a heiße die Achse $x—x$ die „Materialachse"; dagegen die Achse $y—y$ (die zwischen die Profile hindurchgeht) die „freie Achse". Die *Krohn*sche Regel zur Berechnung eines derartigen zusammengesetzten Stabes lautet dann: Hinsichtlich Knicken um die Materialachse braucht nur der Gesamtstab mit seinem Trägheitsmoment J_x in der üblichen Weise untersucht zu werden. Dagegen beim Knicken um die „freie Achse" $y—y$ kommt der Gesamtstab nicht mehr in Frage. Es müssen dann vielmehr die Einzelstäbe untersucht werden; weil nämlich — das ist der Kernpunkt des Verfahrens — bei diesem Knicken die Gesamtlast P sich ungleichmäßig auf die Einzelstäbe verteilt, wodurch dann der eine (am meisten belastete) Einzelstab bereits vorzeitig zum Ausknicken gebracht wird. Daraus folgt dann weiter, daß man bei solchen Querschnitten das Trägheitsmoment für die freie Achse bedeutend größer machen muß als für die Materialachse, um nach beiden Richtungen gleiche Knicksicherheit zu haben.

Der Unterschied gegen das bisherige Verfahren besteht also darin, daß man beim Knicken um die freie Achse $y—y$ nicht einfach den Gesamtstab nimmt, sondern genauer untersucht, welcher Lastanteil auf jeden Einzelstab entfällt. Hierdurch werden sich dann ganz andere Werte ergeben. [Wir beschränken uns jedoch im wesentlichen auf die Mitteilung der Resultate. Die vollständige Abhandlung ist im Zentralblatt der Bauverwaltung 1908, Nr. 84, nachzulesen.]

a) Bestimmung des auf jeden Einzelstab entfallenden Lastanteils.

Als Beispiel diene Fig. 175°a und b. Solange der Stab gerade bleibt, hat jeder Einzelstab die Hälfte der Last P aufzunehmen. Dieser Anteil ist aber nur theoretisch. Praktisch geschieht folgendes: Da die Last P stets etwas exzentrisch sein wird, erleidet der Stab bereits vor dem eigentlichen Ausknicken eine Abbiegung δ (§ 98a, I). Hierdurch aber kommt der eine Einzelstab mehr unter die Last P zu stehen als der andere. Er wird infolgedessen mit mehr als die Hälfte von P belastet und vorzeitig zum Bruch gebracht.

Digitized by Google

Diese Durchbiegung δ, die der Stab kurz vor der Knickung aufweist, läßt sich allerdings bei gedrungenen Stäben nicht berechnen, da der ganze Vorgang sich jenseits der Proportionalitätsgrenze abspielt.

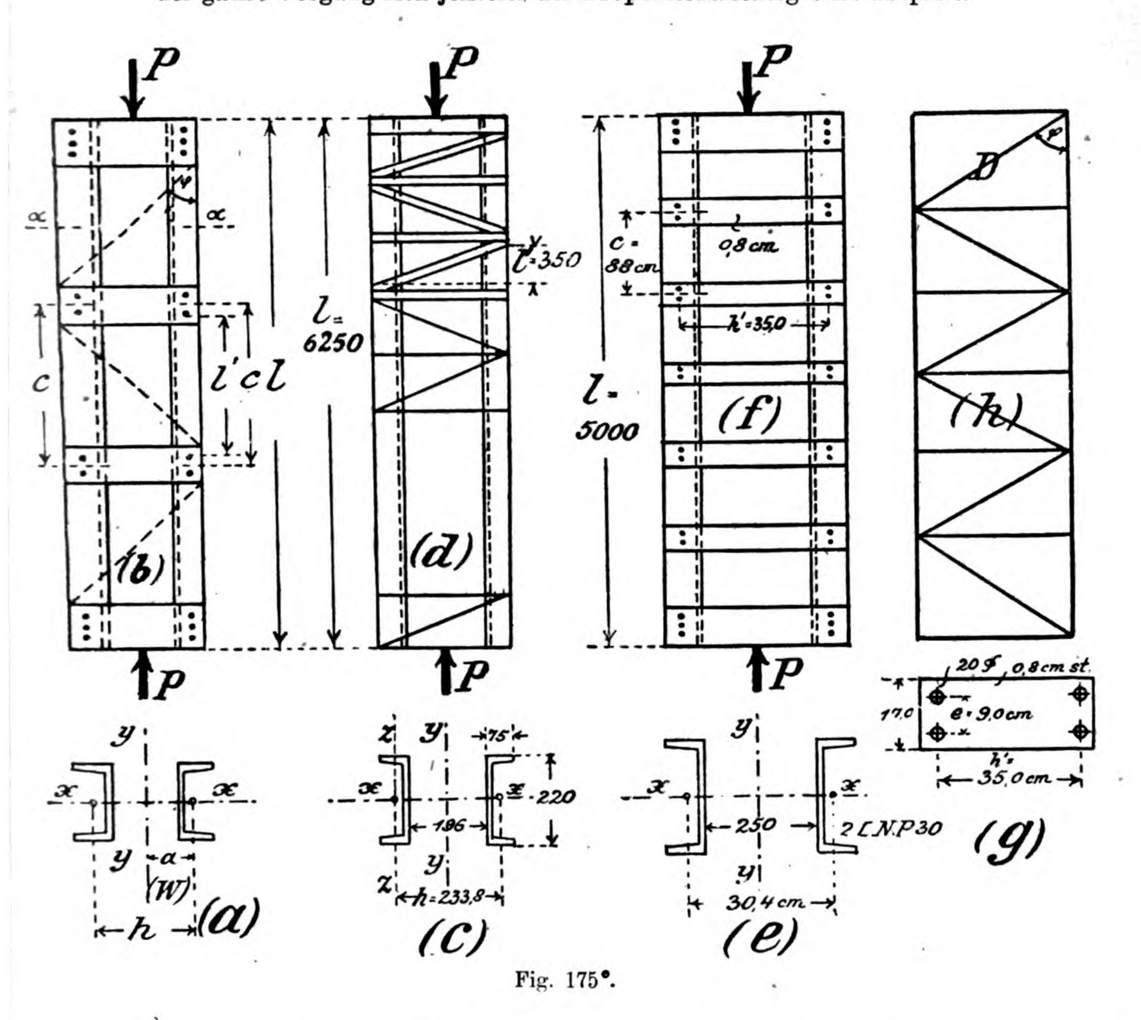


Fig. 175*.

Wenn man jedoch in der Tetmajerschen Formel für die im Augenblicke des Knickens auftretende Spannung: $\sigma_k = \left(3{,}10 - 0{,}0114 \frac{l}{i}\right)$ annimmt, daß das Glied $0{,}0114\,(l:i)$ die Biegungsspannung darstellt, die eben durch das Ausbiegen in den Stab hineinkommt, so kann man dadurch einen Rückschluß auf die Größe δ des Ausbiegens machen. Denn das Moment der Last P bei einer Ausbiegung δ ist: $M = P \cdot \delta$. Hat der Querschnitt ein Wider-

Digitized by Google

standsmoment W, so ist also die durch das Ausbiegen in den Stab hineinkommende Biegungsspannung: $\sigma_b = \frac{P \cdot \delta}{W}$. Und die Gleichsetzung dieses Ausdruckes mit dem zweiten Gliede der Tetmajerschen Formel für die Spannung σ_K würde liefern:

$$0{,}0114 \frac{l}{i} = \frac{P \cdot \delta}{W},$$

$$\text{(I)} \qquad \delta = 0{,}0114 \frac{l}{i} \cdot \frac{W}{P}.$$

Hiermit wäre dann tatsächlich ein Ausdruck für die Ausbiegung δ gefunden, die unser Stab bereits **kurz vor** dem eigentlichen Ausknicken aufweisen wird.

Mit Hilfe dieser Ausbiegung δ bestimmt Professor *Krohn* den Anteil der Gesamtlast, der auf den am meisten beanspruchten Stab entfällt, zunächst zu

$$P_1 = P\left(\frac{1}{2} + \frac{\delta}{h}\right).$$

Hieraus ergibt sich dann durch Einsetzung des obigen Wertes für δ und nach einigen Umformungen die Hauptformel:

$$\text{(II)} \qquad P_1 = P \cdot \frac{68h}{136h - l} \quad \text{(bei zwei Einzelstäben)},$$

worin bedeutet: h den Abstand der Schwerpunkte der beiden Einzelstäbe voneinander, l die Knicklänge des Stabes (Fig. 175°a und b.)

Ist der Gesamtstab aus mehr als zwei Einzelstäben zusammengesetzt, so erweitert sich die Formel (II) zu:

$$\text{(IIa)} \qquad P_1 = P \cdot \frac{F_1}{F} \frac{272}{272 - \frac{l}{i}} \quad \text{(bei mehreren Stäben)},$$

worin bedeuten: P_1 wiederum die auf den äußersten (d. h. am meisten beanspruchten) Stab entfallende Last; F_1 dessen Querschnittsfläche; F den Gesamtquerschnitt; $(l:i)$ das Verhältnis von Knicklänge zu Trägheitsradius beim Gesamtstab.

Auf diese Weise wird also der größte Lastanteil bestimmt. Andererseits berechnet man die Knicklast P_K, die der betreffende Einzelstab überhaupt aushalten kann, und hat dann aus dem Verhältnis von $P_K:P_1$ die Sicherheit gegen Knicken, die dieser meist beanspruchte Stab und mit ihm die gesamte Konstruktion bietet. Hiermit ist die Knicksicherheit der Konstruktion hinsichtlich der freien Achse y—y untersucht.

Digitized by Google

b) Die Beanspruchung der Bindebleche usw.

ist bereits früher von Professor *Engesser* untersucht und soll jetzt im Zusammenhang mit den *Krohn*schen Arbeiten angegeben werden.

α) Die **Querkraft** in einem ausgeknickten Stabe. Denkt man sich durch den ausgebogenen Stab einen Querschnitt gelegt, so tritt in diesem Schnitte eine horizontale Schubkraft auf, deren größter Wert (an den Stabenden) beträgt:

$$\text{(III)} \qquad Q = P \cdot \delta \cdot \frac{\pi}{l}.$$

[Diese Schubkraft wird aus dem Satze gefolgert: Der Unterschied zweier aufeinanderfolgender Momente ist gleich der Querkraft an dieser Stelle $\times$ dem Abstand der beiden Querschnitte. Die Momente beim ausgebogenen Stab wachsen ja entsprechend den Ausbiegungen.]

Indem man nun für δ den vorhin aufgestellten Ausdruck (I) einsetzt, ergibt sich diese Querkraft schließlich:

$$\text{(III)} \qquad Q = \frac{W}{28\,i} \qquad \text{(bei mehreren Stäben),}$$

worin W das Widerstandsmoment und i den Trägheitsradius des Gesamtstabes bedeuten. Besteht letzterer nur aus zwei Einzelstäben, so läßt sich die Formel vereinfachen zu

$$\text{(IIIa)} \qquad Q = \frac{F_1}{14} \qquad \text{(bei zwei Stäben),}$$

worin F_1 die Querschnittsfläche eines Einzelstabes bedeutet.

β) Mit Hilfe dieser Querkraft ergibt sich nun die Beanspruchung der **Bindebleche** und der **Vergitterung.**

Geschieht die Verbindung durch **Bindebleche** (Fig. 175°b), so wird die auf ein solches Blech entfallende Kraft genau so berechnet, wie die Kraft, die auf die Niete eines gewöhnlichen Blechträgers entfällt. Für letztere lautet die Formel bekanntlich: $N = Q\frac{S}{J} \cdot e$ (§ 78). In Fig. 175° ist hier an Stelle der Nietteilung e der Abstand c der Bindebleche einzusetzen, so daß sich für die Kraft T ergibt:

$$T = Q\frac{S}{J} \cdot c.$$

[S = statisches Moment eines Einzelstabes; J = Trägheitsmoment des Gesamtstabes, c = Abstand der Bindebleche.] Setzt man hierin für Q den vorhin aufgestellten Ausdruck (III) ein, so erhält man für T den Ausdruck:

$$\text{(IV)} \qquad T = \frac{W}{28\,i} \cdot \frac{S}{J}\,c \qquad \text{(bei mehreren Stäben).}$$

Digitized by Google

Besteht der Stab nur aus zwei Einzelstäben, so kann man die Formel ferner vereinfachen zu:

$$\text{(IVa)} \qquad T = F_1 \cdot \frac{c}{14h} \qquad \text{(bei zwei Stäben).}$$

Diese Kraft T wirkt also als Schubkraft in Richtung des Stabes.

Durch die Kraft T wird nun im Bindeblech ein Moment erzeugt:

$$\text{(V)} \qquad M = T \cdot \frac{h}{2};$$

bzw.

$$\text{(Va)} \qquad M = F_1 \frac{c}{28} \qquad \text{(bei zwei Stäben).}$$

Hierfür ist das Bindeblech zu dimensionieren. Die Anschlußniete des Bleches an den Stab müssen die obige Schubkraft T und außerdem das Moment M übertragen. Auf diese Weise werden Bindeblech und Niete berechnet.

Geschieht die Verbindung durch **Diagonalen** (Fachwerk), so kann deren Berechnung genau so erfolgen, wie die Berechnung der Diagonalen eines Parallelträgers (Band II, 1. Vortrag). Man legt einen Schnitt $\alpha-\alpha$, bestimmt hierfür die Querkraft Q [Formel (III), (IIIa)] und wendet dann die Gleichgewichtsbedingung: Summe aller Horizontalprojektionen gleich Null, an. Diese liefert die Gleichung:

$$D \cdot \sin\varphi = Q$$

und hieraus folgt die Diagonalkraft

$$\text{(VI)} \qquad D = \frac{Q}{\sin\varphi}.$$

Dieses ist das Krohnsche Verfahren bei derartig zusammengesetzten Knickstäben. Zum Schlusse sei noch bemerkt, daß bei der Berechnung der Verbindungsteile (Niete, Bindebleche, Vergitterung) die auftretenden Spannungen bis nahe zur Bruchgrenze, vielleicht 4000 kg/qcm, zugelassen werden. Denn der ganze betrachtete Vorgang spielt sich ja an der Grenze des Zusammenbruches (Ausknickens) ab, und es hätte keinen Zweck, die Verbindungsteile so stark zu dimensionieren, daß sie selbst an dieser Grenze erst die sonst üblichen Spannungen erhalten.

Zusammenfassung

zu den *Krohn*schen Formeln: Man muß das Ausknicken um die „Materialachse“ $x-x$ und die „freie Achse“ $y-y$ getrennt behandeln. Bei der ersteren Untersuchung kann angenommen werden, daß die vorhandene Last sich gleichmäßig auf die einzelnen Stäbe verteilt, so daß also der Gesamtstab wie ein einheitliches Profil wirkt. Bei der Untersuchung des Knickens um die freie Achse

Digitized by Google

wirken die einzelnen Stäbe ungleichmäßig, so daß der am meisten beanspruchte Stab besonders untersucht werden muß. Diese Untersuchung geschieht in der Weise, daß man zunächst den Lastanteil ausrechnet, den dieser Stab von der gesamten aufzunehmenden Last P übernimmt:

$$\text{(II)} \qquad P_1 = P \cdot \frac{68\,h}{136\,h - l} \qquad \text{(bei zwei Stäben);}$$

bzw.

$$\text{(IIa)} \qquad P_1 = P \cdot \frac{F_1}{F} \, \frac{272}{272 - \frac{l}{i}} \qquad \text{(bei mehr Stäben);}$$

und dann für diese Last die Knicksicherheit des betreffenden Stabes nachweist. (Freie Länge hierfür: von Bindeblech zu Bindeblech; Berechnung von P_K: nach Tetmajer.)

Hinsichtlich der Bindebleche, Vergitterungen usw. ergaben sich folgende Regeln: Die Scherkraft, die in Richtung der Stabachse wirkt, ist (bei zwei Stäben):

$$T = F_1 \frac{c}{14\,h} \,.$$

(Bei mehreren Stäben muß man zunächst Q ausrechnen und dann T.) Das Biegungsmoment, das die Bindebleche beansprucht, ist (bei zwei Stäben)

$$M = T\,\frac{h}{2} = F_1 \frac{c}{28} \,.$$

Die Anschlußniete müssen sowohl die Scherkraft T wie das Moment M aushalten.

Als zulässige Beanspruchung bei diesen Berechnungen der Anschlußteile kann die Bruchfestigkeit (zirka 4000 kg/qcm) genommen werden.

Zum Schlusse sei hervorgehoben, daß alle diese Formeln durchaus nicht mathematisch einwandfrei sind. Sie sind gewissermaßen ein Provisorium. Soweit jedoch Versuche vorliegen, haben sie sich gut bewährt. Und sie erfüllen die eine Bedingung, die die Praxis mit Recht an solche Formeln stellt: sie sind handlich.

§ 98b.

Beispiele und Ergänzungen zu § 98 und 98a.

Erste Aufgabe.

Ein Stab aus Martinstahl von den Abmessungen: Länge $l = 92{,}5$ cm und Querschnitt $1{,}82 \times 2{,}01$ cm (Rechteck) ist nach Belastungsfall II (Fig. 175b) belastet. Wie groß ist die Knicklast dieses Stabes?

Digitized by Google

Zahlenangaben:
$E = 2170000$ kg/qcm; $l = 92,5$ cm; $F = 1,82 \cdot 3,01 = 5,47$ qcm; kleinstes Trägheitsmoment

$$J = \frac{1}{12} 3,01 \cdot 1,82^3 = 1,51 \text{ cm}^4.$$

(Dieses und das folgende Beispiel sind entnommen aus: Karman, „Untersuchungen über Knickfestigkeit"; s. Literaturangaben am Schlusse dieses Paragraphen.)

Zunächst untersuchen wir, ob in diesem Falle die Eulersche oder die Tetmajersche Betrachtungsweise maßgebend ist. Zu diesem Zwecke berechnen wir den Hilfswert:

$$\text{Trägheitsradius } i = \sqrt{\frac{J}{F}} = \sqrt{\frac{1,51}{5,47}} = \sqrt{0,276} = 0,526 \text{ cm}$$

und ferner das Verhältnis

$$\frac{l}{i} = \frac{92,5}{0,526} = 176.$$

Dieses Verhältnis ist größer als 90. Folglich ist die Eulersche Formel anzuwenden.

Die Knicklast selber ergibt sich nun:

$$P_K = \pi^2 \frac{E \cdot J}{l^2} = 3,14^2 \frac{2170000 \text{ kg/cm}^2 \cdot 1,51 \text{ cm}^4}{92,5^2 \text{ cm}^2}$$

$$= 9,87 \frac{2170000 \cdot 1,51}{92,5^2} \text{ kg},$$

$$P_K = 3780 \text{ kg}.$$

Zusatz: Dieser Stab ist entnommen den Versuchsreihen aus der *Karman*schen Arbeit. Es ergab sich beim Versuche in der Festigkeitsmaschine, daß bei dem Stabe das Labilwerden des Gleichgewichtszustandes eintrat bei einer Last von 3770 kg. Also eine vorzügliche Übereinstimmung von Theorie und Praxis (wie meistens bei sehr schlanken Stäben).

Zweite Aufgabe.

Dieselbe Aufgabe wie vorhin; nur seien die Abmessungen: $l = 52,8$ cm; $F = 2,51 \cdot 4,00$ cm.

Wir berechnen zunächst die erforderlichen Hilfswerte:

$$F = 2,51 \cdot 4,00 = 10,04 \text{ qcm}; \quad J = \frac{1}{12} 4,00 \cdot 2,51^3 = 5,27 \text{ cm}^4;$$

$$i = \sqrt{\frac{5,27}{10,04}} = 0,725 \text{ cm}; \qquad \frac{l}{i} = \frac{52,8}{0,725} = 73.$$

Digitized by Google

Der Wert $(l:i)$ **hat sich kleiner als 90 ergeben, folglich muß die Tetmajersche Formel angewendet werden. Wir finden die Knicklast:**

$$P_K = F\left(3{,}35 - 0{,}0062\,\frac{l}{i}\right)$$

$$= 10{,}04 \text{ qcm } (3{,}35 - 0{,}0062 \cdot 73) \text{ t/qcm}$$

$$= 10{,}04 \cdot 2{,}897 = 29{,}1 \text{ t.}$$

Zusatz: Beim Versuche knickte dieser Stab bei einer Last von 29600 kg aus. Also ebenfalls eine gute Übereinstimmung.

Dritte Aufgabe.

Für den in Fig. 175°c und d gezeichneten zusammengesetzten Stab ist die Knicklast zu berechnen!

Gesamtlänge $l = 625{,}0$ cm; Knicklänge der Einzelstäbe (zwischen den Nieten der Vergitterung) $l' = 35{,}0$ cm. Fläche eines [-Eisens $F_1 = 47{,}4$ qcm; also Gesamtfläche $F = 2 \cdot 47{,}4 = 94{,}8$ qcm. Trägheitsmoment eines [-Eisens in bezug auf seine Achse $z-z$: $J_z = 190$ cm^4; Trägheitsmoment des Gesamtquerschnittes in bezug auf die „freie Achse" $y-y$: $J_y = 13\,340$ cm^4. Abstand der Schwerpunktsachsen $h = 23{,}38$ cm.

[Dieser Stab entstammt einer von Professor Krohn veröffentlichten Reihe von Versuchen, die in Frankreich angestellt wurden, und die die Verwendbarkeit der Krohnschen Formeln dartun.]

Bei dem mit diesem Stabe ausgeführten Versuche waren die Enden derartig in Schneiden gelagert, daß ein Ausknicken nur um die Achse $y-y$ stattfinden konnte. Es braucht also auch nur die Knicklast für diese Achse festgestellt zu werden.

I. Bisheriges Verfahren.

1. Der Stab als Ganzes betrachtet ergibt eine Knicklast in bezug auf die Achse $y-y$:

$$l = 625{,}0 \text{ cm}; \quad F = 94{,}8 \text{ cm}^2; \quad J = 13\,340 \text{ cm}^4.$$

$$i = \sqrt{13\,340 : 94{,}8} = 11{,}9 \text{ cm}; \quad \frac{l}{i} = \frac{625{,}0}{11{,}9} = 52{,}6.$$

Somit wird (nach Tetmajer)

$$P_K = 94{,}8\,(3{,}10 - 0{,}0114 \cdot 52{,}6) = 94{,}8\,(3{,}10 - 0{,}60),$$

$$P_K = 237 \text{ t.}$$

2. Jeder Einzelstab müßte also einen Anteil aufnehmen können von $\frac{1}{2}\,237 = 118{,}5$ t. In Wirklichkeit kann er aufnehmen:

$$l' = 35{,}0 \text{ cm}; \quad F = 47{,}4 \text{ cm}^2; \quad J = 190 \text{ cm}^4,$$

$$i = \sqrt{190 : 47{,}4} = 2{,}0 \text{ cm}; \quad \frac{l'}{i} = \frac{35{,}0}{2{,}0} = 17{,}5.$$

Digitized by Google

Also (nach Tetmajer):

$$P'_K = 47{,}4\,(3{,}10 - 0{,}0114 \cdot 17{,}5) = 47{,}4\,(3{,}10 - 0{,}20)$$
$$= 137{,}4 \text{ t.}$$

Die Einzelstäbe haben demnach noch einen Überschuß an Knicksicherheit.

Wir müßten also erwarten, daß die Konstruktion sich als Ganzes ausbiegen wird, und zwar bei einer Last von 237 t.

Der Versuch hat diese Rechnung nicht bestätigt. Der Fehler liegt eben darin, daß die Gesamtlast P sich nicht gleichmäßig auf die beiden Einzelstäbe verteilt, sondern infolge der (schon vor dem eigentlichen Ausknicken auftretenden) Abbiegung den einen Stab mehr belastet und hierdurch diesen schon vorzeitig zum Ausknicken bringt. Auf diese Weise muß natürlich ein kleineres P_K zustande kommen.

II. Nach Krohn.

1. Die Knicklast des gesamten Stabes heiße wieder P_K. Von dieser Knicklast muß der am meisten beanspruchte Stab aufnehmen (Krohnsche Formel II)

$$P_1 = P_K \frac{68\,h}{136\,h - l}.$$

In unserem Falle ist:

$$h = 23{,}38 \text{ cm}; \quad l = 625{,}0 \text{ cm}.$$

Also wird der Anteil

$$P_1 = P_K \frac{68 \cdot 23{,}38}{136 \cdot 23{,}38 - 625{,}0} = \frac{1589{,}8}{3179{,}7 - 625{,}0}.$$

$$(1) \qquad P_1 = 0{,}622\,P_K.$$

(Der Anteil ist also nicht $\frac{1}{2} P_K$ sondern höher.)

2) Andererseits die Tragfähigkeit eines Einzelstabes (wie bereits vorhin berechnet):

$$(2) \qquad P'_K = 137{,}4 \text{ t.}$$

Die Last P_K darf nun augenscheinlich höchstens so groß sein, daß der Anteil P_1 des Einzelstabes gerade gleich dessen Knicklast P'_K wird. Es ergibt sich somit die Beziehung:

$$(3) \qquad 0{,}622\,P_K = 137{,}4 \text{ t,}$$

$$P_K = \frac{137{,}4}{0{,}622} = 221 \text{ t.}$$

Beim Versuche ist der Stab geknickt bei 220 t.

Zusatz: Wollte man diesen Stab — entgegen aller durch Rechnung und Versuche gegebenen Erkentnnis — einfach nach der Eulerschen Formel behandeln, so ergäbe sich:

Digitized by Google

Für den Gesamtstab ist

$$P_{K(E)} = \pi^2 \frac{E \cdot J}{l^2} = 3{,}14^2 \cdot \frac{2150000 \cdot 13340}{625{,}0^2},$$

$$P_{K(E)} = 725000 \text{ kg} = 725 \text{ t}.$$

Die Einzelstäbe haben, wie man sich leicht überzeugt, bei einer Knicklänge von 35 cm eine weit größere Knicklast als $\frac{1}{2} \cdot 725$ t. Der Stab würde also nach *Euler* erst bei einer Last von 725 t ausknicken. (Wahrscheinlich also gar nicht; denn vorher wäre er schon durch die reinen Normalspannungen σ zerstört.) Er ist aber ausgeknickt bei 220 t!

Dieser Versuch lehrt doch wohl deutlich, daß es nicht angängig ist, die ganze Knickungstheorie — wie es vielfach noch geschieht — mit der einen Formel $P = \pi^2 \ldots$ abmachen zu wollen.

Vierte Aufgabe.

Die Bindebleche und Vergitterungen einer Stütze sind zu berechnen! (Nach *Krohn.*)

Die Stütze ist in Fig. 175°e—g gezeichnet. Der Querschnitt eines Einzelstabes ([-Eisen N. P. 30) ist $F_1 = 58{,}8$ qcm. Der Schwerpunktsabstand h ist: $h = 30{,}4$ cm.

a) Die Verbindung geschehe nur durch Bindebleche (Fig. 175°f). Als Abstand der Bindebleche ist gewählt $c = 88$ cm. Der Abstand der Nietreihen ist $h' = 35{,}0$ cm (Fig. 175°g). Dann berechnen wir nach den Krohnschen Formeln:

1. Schubkraft in Richtung des Stabes pro Bindeblech:

$$T = \frac{1}{2} \cdot F_1 \frac{c}{14\,h} = \frac{1}{2} \cdot 58{,}8 \frac{88}{14 \cdot 30{,}4},$$

$$T = \frac{1}{2} 12{,}16 = 6{,}08 \text{ t}.$$

($\frac{1}{2}$, weil jedes [-Eisen zwei Bindebleche — an der Vorder- und an der Rückseite — trägt.)

2. Hierdurch entsteht für das Bindeblech ein Moment

$$M = T \frac{h'}{2} = 6{,}08 \cdot \frac{35{,}0}{2} = 106 \text{ cmt}.$$

Das Trägheitsmoment eines Bindebleches ist in dem durch die Niete geschwächten Schnitte (Fig. 175°g):

$$J_b = \frac{1}{12} \cdot 0{,}8 \cdot 17{,}0^3 - 2 \cdot 0{,}8 \cdot 2{,}0 \cdot \left(\frac{9{,}0}{2}\right)^2 = 263 \text{ cm}^4.$$

Digitized by Google

Also das Widerstandsmoment

$$W = \frac{263}{8{,}5} = 30{,}9 \text{ cm}^3,$$

und die auftretende Spannung:

$$\sigma = \frac{M}{W} = \frac{106}{30{,}9} = 3{,}4 \text{ t/qcm} = 3400 \text{ kg/qcm}.$$

Die Spannung des Bindebleches liegt also noch unter der Bruchgrenze.

Außerdem ist das Bindeblech noch für die Schubkraft T zu rechnen; doch wird diese beim Bindeblech vernachlässigt.

3. Die Niete müssen ebenfalls die Schubkraft T in Richtung der Stabachse und das Moment M übertragen.

Die Kraft T verteilt sich auf zwei Niete; also pro Niet $\frac{1}{2}\,T$. Infolge des Momentes M muß jeder Niet eine Einzelkraft ausüben:

$$H = \frac{M}{e} = \frac{106}{9{,}0} = 11{,}8 \text{ t}.$$

Zusammen mit der Schubkraft T ergibt sich, da H und T rechtwinklig zueinander stehen, also pro Niet eine resultierende Kraft von

$$N = \sqrt{H^2 + \left(\frac{T}{2}\right)^2} = \sqrt{11{,}8^2 + 3{,}04^2} = 12{,}2 \text{ t}.$$

Die Schubspannung, die der (einschnittige) Niet im Augenblicke des Ausknickens erhält, ist somit

$$t = \frac{N}{\frac{d^2\pi}{4}} = \frac{12{,}2}{\frac{2{,}0^2 \cdot 3{,}14}{4}} = 3{,}88 \text{ t/qcm} = 3880 \text{ kg/qcm}.$$

Hiermit sind Bindebleche und Anschlußniete berechnet.

b) Die Verbindung geschehe durch Vergitterung (Fig. 175°h).

1. Zunächst berechnen wir die rechtwinklig zur Stabachse wirkende Querkraft pro Gitterwand:

$$Q = \frac{1}{2} \cdot \frac{F_1}{14} = \frac{1}{2} \cdot \frac{58{,}8}{14} = 2{,}1 \text{ t}.$$

[Da die Vergitterung vorn und hinten ist, nimmt jede Wand nur die Hälfte von $(F_1 : 14)$ auf.]

2. Aus Q ergibt sich dann die auf eine Diagonale entfallende Spannkraft. Der Winkel φ zwischen Diagonale und Vertikalgurt sei $\varphi = 45°$. Somit wird die Diagonalkraft

$$D = \frac{Q}{\sin\varphi} = \frac{2{,}1}{\sin 45} = \frac{2{,}1}{0{,}71} = 3{,}0 \text{ t}.$$

Digitized by Google

Gewählt sind Flacheisen 6,0 · 1,0 mit

$$F = 6{,}0\ \text{qcm}, \quad J_{min} = \tfrac{1}{12}\, 6{,}0 \cdot 1{,}0^3 = 0{,}5\ \text{cm}^4.$$

Die Knicklänge beträgt rund 49 cm. Die Diagonalen könnten also eine Knicklast aufnehmen (nach Euler):

$$P_K = \pi^2 \cdot \frac{2150000 \cdot 0{,}5}{49^2} = 4500\ \text{kg}.$$

Die Diagonalen reichen somit aus, um die Kraft D in jeder Hinsicht (als Zug wie als Druck) zu übertragen.

Zusatz. Es ist bereits darauf hingewiesen, daß die Krohnschen Formeln sehr gut mit Versuchen übereinstimmen. Trotzdem darf man sich nicht darüber täuschen, daß sie in theoretischer Hinsicht nur ein Notbehelf sind, weil wir andere handliche Formeln für die Praxis überhaupt noch nicht haben. Die Anwendung der Biegungsformel $\sigma = M : W$ bei der Berechnung der Spannung im Bindebleche, und vieles andere in der Ableitung, kann natürlich nicht genau stimmen.

Hinsichtlich der Bindebleche usw. sei noch gesagt, daß man sie namentlich an den Enden des Stabes sehr reichlich nehmen soll.

Geschichtliches und literarische Angaben.

Die *Euler*schen Arbeiten über die Ausbiegungen eines auf Knickung beanspruchten Stabes gehören zu den ältesten Untersuchungen der Elastizitätstheorie überhaupt. Sie stammen bereits aus dem Jahre 1757 und sind eine Frucht der Studien, die Euler — als Erster — über die Gestalt eines gebogenen Stabes im allgemeinen angestellt hat. In neuerer Zeit sind dann diese mathematischen Untersuchungen aufgenommen und weitergeführt, wobei als die für die Technik wichtigsten Arbeiten zu nennen sind die von *Saalschütz*, *Kriemler*, *Kübler*, u. a. Eine eingehende zusammenfassende Behandlung dieser Theorie der „Elastica" findet sich in *A. E. H. Love*, Lehrbuch der Elastizität (deutsch von A. Timpe). Leider erfordern alle diese Unsersuchungen sehr schwierige mathematische Hilfsmittel, die oft weit über die Grenzen der eigentlichen Ingenieurmathematik hinausgehen.

Die praktische Seite der Knickungstheorie wurde von *Bauschinger* und namentlich von *v. Tetmajer* (Zürich, später Wien) erforscht. Die Arbeiten des letzteren — Feststellung der Gültigkeitsgrenze der Eulerschen Formel und Angaben über die neuen Formeln — sind niedergelegt in dem Buche: *v. Tetmajer*, „Die Gesetze der Knickungs- und der zusammengesetzten Druckfestigkeit der technisch wichtigsten Baustoffe", das ein reichhaltiges Versuchsmaterial und manche weitergehende Betrachtung (über den Einfluß von Querverbindungen u. a.) enthält.

Während v. Tetmajer die Knickungsaufgaben, für die die Eulersche Betrachtung nicht mehr gilt, durch Versuche löste, haben *Engesser* und in neuester Zeit *von Karman* einen anderen Weg eingeschlagen. Sie führen einen veränderlichen Elastizitätsmodul ein, entsprechend dem Umstande,

Digitized by Google

daß bei Spannungen über der Proportionalitätsgrenze das Verhältnis von Spannung zu Dehnung in jeder Spannungsstufe ein anderes ist. Hierüber siehe besonders: „Mitteilungen über Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesens, herausgegeben vom Verein Deutscher Ingenieure; Heft 81, *Karman*: Untersuchungen über Knickfestigkeit" (1910). Die hierin durchgeführten Untersuchungen werden vorläufig wenigstens allerdings mehr theoretischen Wert haben als praktische Verwendung finden, da die Einführung eines veränderlichen Moduls ziemlich viel Rechenarbeit macht und auch noch manche andere vorbereitende Untersuchungen erfordert. Sehr lehrreich in der angeführten Schrift sind die Angaben über die ausgeführten Versuche, die die neu aufgestellte Rechenmethode bestätigen (andererseits aber auch die vorzügliche Brauchbarkeit der bequemen Tetmajerschen Formeln dartun).

Von den in der Knickungstheorie auftretenden Sonderfragen ist besonders das Verhalten eines aus mehreren Einzelteilen bestehenden Druckstabes untersucht. Zunächst von *Engesser*, Zentralblatt der Bauverwaltung 1891; in neuester Zeit von *Krohn*, Zentrallblatt der Bauverwaltung 1908, und *Müller*-Breslau, Der Eisenbau 1911.

Im vorstehenden ist nur ein Auszug aus den wichtigsten Forschungen gegeben. Manche ältere Untersuchung, z. B. die Formel von *Schwarz-Rankine* über die Tragfähigkeit, hat sich nicht bestätigt, und ist deshalb nicht mehr erwähnt. Alle diese Arbeiten zeigen aber, daß die Knickungstheorie vielleicht das schwierigste und empfindlichste Gebiet der gesamten technischen Elastizitätstheorie ist.

§ 99.

Berechnung von Stützen und Druckstäben.

Die eigentliche Theorie der Knickfestigkeit ist in den vorigen Paragraphen behandelt. Die wichtigste Anwendung dieser Theorie ist die Berechnung von Stützen (Säulen) und Druckgliedern in Fachwerken. Insgesamt müssen bei einer solchen Berechnung der Reihe nach folgende Nachweise gemacht werden: I. Drucksicherheit; II. Knicksicherheit; hierzu kommt noch speziell bei Stützen: III. Anschluß an den Fundamentkörper (Verankerung); IV. Fundamentkörper. Die Untersuchungen I und II sind in § 99; III und IV in § 99a durchgeführt.

I. Nachweis der Drucksicherheit.

Eine Stütze ist zunächst wie jeder andere auf Druck beanspruchte Körper hinsichtlich der Normalspannungen σ zu untersuchen. Hierbei sind die beiden Fälle zu unterscheiden, daß die Belastung 1. zentrisch, 2. exzentrisch auf die Stütze wirkt.

Digitized by Google

1. Die Belastung wirkt genau zentrisch.

Die Belastung heiße P; die Querschnittsfläche der Stütze sei F. Dann ist die durch die Last P hervorgerufene Normalspannung:

$$\text{(I)} \qquad \sigma = \frac{P}{F}.$$

Ist für die Spannung σ ein bestimmter zulässiger Wert „k" vorgeschrieben, so ergibt sich umgekehrt die für die Last P erforderliche Querschnittsfläche:

$$\text{(Ia)} \qquad F = \frac{P}{k}.$$

2. Die Belastung wirkt exzentrisch.

Die Belastung heiße P; ihr Abstand vom Schwerpunkte des Querschnittes sei p. Der Querschnittsinhalt sei F; seine Widerstandsmomente W_1 und W_2 (häufig $W_1 = W_2 = W$).

Es liegt der im 16. Vortrag behandelte Fall: „Biegung durch exzentrischen Druck" vor. Wie daselbst abgeleitet, ergeben sich hierfür die größten Spannungen (§ 90_{Ic}):

$$\text{(II)} \qquad \left\{ \begin{aligned} \sigma_1 &= -\left(\frac{P}{F} + \frac{P \cdot p}{W_1}\right), \\ \sigma_2 &= -\left(\frac{P}{F} - \frac{P \cdot p}{W_2}\right). \end{aligned} \right.$$

[σ_1 = Spannung in derjenigen äußersten Faser, die auf derselben Seite vom Schwerpunkte liegt wie die Last P; W_1 das zugehörige Widerstandsmoment. σ_2 = größte Spannung auf der entgegengesetzten Seite; kann eventuell positiv (Zug) werden.]

Statt durch die obigen Formeln kann man die Spannungsbestimmung auch mittels der Kernpunkte vornehmen (§ 90_{II}):

$$\text{(III)} \qquad \left\{ \begin{aligned} \sigma_1 &= -\frac{P \cdot f}{W_1}, \\ \sigma_2 &= \mp \frac{P \cdot f'}{W_2}. \end{aligned} \right.$$

Eine Umkehrung der Formeln (II), (III), um hierdurch aus der Last P direkt den erforderlichen Querschnitt zu bestimmen, ist nicht möglich, da außer der Unbekannten F auch noch W_1, W_2 vorkommen. Man muß also so vorgehen, daß man einen Querschnitt annimmt, hierfür F und W ausrechnet, und dann nachsieht, ob die entstehende Spannung σ_1, σ_2 nicht die zulässige Grenze k überschreitet.

Zusatz: Bei der Berechnung der Spannungen σ_1 und σ_2 in den beiden äußersten Faserschichten *1* und *2* (vgl. z. B. Fig. 169)

Digitized by Google

muß auf den Einfluß der verschiedenen Stellungen der Last Rücksicht genommen werden: Die größte Druckspannung in der Schicht *1* entsteht dann, wenn alle links vom Kernpunkte K_1 angreifenden Konstruktionsteile (Unterzüge, Deckenträger usw.) vollbelastet und alle rechts von K_1 angreifenden Teile nur durch Eigengewicht belastet sind. Die größte Zugspannung der Schicht *1* entsteht dagegen, wenn die *rechts* von K_1 angreifenden Lasten ihren Größtwert haben. Entsprechend ist es für die Schicht *2*. ***Nur wenn sämtliche Lasten innerhalb des Kerns angreifen, ist für beide äußerste Schichten Vollbelastung maßgebend.***

II. Nachweis der Knicksicherheit.

Die vorhandene Last sei P; die „Knicklast" sei P_K. Die Last P darf natürlich nur einen Bruchteil der Knicklast P_K betragen, da diese ja die äußerste Grenze der Tragfähigkeit darstellt. Ist P der n-te Teil von P_K, so sagt man, „der Stab hat $n$fache Knicksicherheit". Die Zahl n ist der „Sicherheitsfaktor". [Der kleinste Wert von n ist natürlich „1".]

Für die folgende Untersuchung müssen wir, wie stets in der Knickungsthorie, schlanke und gedrungene Stäbe getrennt behandeln.

1. Stäbe nach der Eulerschen Formel.

a) Allgemeine Formeln. Hinsichtlich der Stützungsart werden wir bei Säulen meistens den Fall *II* aus Fig. 175 zugrunde zu legen haben; namentlich bei eisernen Säulen, die unten auf einer Fußplatte aufstehen und oben durch die anstoßenden Unterzüge und Deckenträger seitlich gehalten werden. Für diese Stützungsart ist die **Knicklast** (Fig. 175b):

$$P_K = \pi^2 \frac{E \cdot J}{l^2}.$$

Verlangen wir nun von der Stütze eine $n$fache Knicksicherheit, so ist also die **zulässige Belastung:**

$$\text{(IV)} \qquad P = \frac{1}{n} \cdot \pi^2 \frac{EJ}{l^2}.$$

Sind umgekehrt die Last P und der Sicherheitsfaktor n vorgeschrieben, so ergibt sich nach Formel (IV) das **erforderliche Trägheitsmoment:**

$$\text{(V)} \qquad J = \frac{n}{\pi^2} \cdot \frac{P l^2}{E}.$$

Digitized by Google

Sind schließlich P und J gegeben, so finden wir den Sicherheitsfaktor, den der Stab bietet, zu:

$$\text{(VI)} \qquad n = \pi^2 \frac{EJ}{Pl^2} .$$

Die Formeln (IV) bis (VI) gelten für jedes Material. Man hat nur den betreffenden Elastizitätsmodul E einzusetzen und findet dann P bzw. J oder n. Voraussetzung ist natürlich, daß die betreffende Stütze überhaupt in die Eulersche Betrachtungsweise hineingehört.

b) Besondere Formeln (für Flußeisen). Die Formeln (V) und (VI) wollen wir noch etwas bequemer schreiben. Wir nehmen Flußeisen an ($E = 2\,150\,000$ kg/qcm $= 21\,500\,000$ t/qm). Ferner setzen wir $\pi^2 = 3{,}14^2 =$ rd. 10. Und schließlich nehmen wir die verlangte Sicherheit n z. B. gleich 5 (preußische Vorschriften). Dann ergibt die Formel (V) (alles in m und t ausgedrückt):

$$J = \frac{5}{10} \frac{Pl^2}{21\,500\,000} = 0{,}000\,000\,023\,3\, Pl^2 .$$

Hierin ist also J in m^4 angegeben; P in t und l in m. Da nun $1\ m^4 = 100\,000\,000\ cm^4$ ist, so ergibt sich J in cm^4, wenn wir den Wert der obigen Formel entsprechend multiplizieren:

$$\text{(Va)} \qquad \boxed{J = 2{,}33\ Pl^2 .} \qquad \text{(5fache Sicherheit.)}$$

Hiernach kann man also das erforderliche J aus der Last P und der Knicklänge l aufs bequemste berechnen.

Für den Fall, daß eine 4fache Sicherheit als ausreichend erachtet wird, lautet die Formel:

$$\text{(Vb)} \qquad \boxed{J = 1{,}86\ Pl^2 .} \qquad \text{(4fache Sicherheit.)}$$

Bei Anwendung der Formeln (Va) und (Vb) ist wohl zu beachten, daß P in t, l in m einzusetzen ist. J ist aber in cm^4 zu entnehmen.

Umgekehrt ergibt sich die vorhandene Knicksicherheit bei Flußeisen, falls die Last P in *Tonnen*, die Länge l in *Meter*, das Trägheitsmoment aber in cm^4 eingesetzt wird, zu:

$$n = 2{,}15 \frac{J}{P \cdot l^2} .$$

2. Stäbe nach der Tetmajerschen Formel.

Hier gestaltet sich die Berechnung so, daß zunächst die Knicklast P_K ausgerechnet wird, die das angenommene Profil

Digitized by Google

tragen kann. Aus dem Verhältnis von P_K zur Last P ergibt sich dann, ob der Stab genügend sicher ist.

Besteht der Stab aus mehreren Teilen, so ist zu empfehlen, P_K nach den Krohnschen Formeln zu bestimmen.

Zusatz: Wie bereits gesagt, begnügen sich die preußischen Vorschriften mit der Eulerschen Untersuchung bei allen Stäben. Für den Konstrukteur ist aber diese summarische Behandlung nicht zu empfehlen.

§ 99a.

Berechnung von Verankerungen und Fundamenten.

I. Nachweis der Verankerungen.

Würde man die Fußplatte einer Stütze lose auf das Fundament stellen, so könnten zwischen Fußplatte und Fundament nur Druckspannungen übertragen werden (§ 91).

Die Berechnung dieser Kräfte hätte also nach den Regeln zu erfolgen, wie sie für den Fall: „Spannungen bei nur druckfestem Material" aufgestellt sind.

Sobald nun die Resultierende der auf die Stütze wirkenden Kräfte nahe an den Rand der Fußplatte fällt, würde sich die Druckspannung zwischen Platte und Fundament sehr groß ergeben ($\sigma = 2P : 3ab$; § 91), so daß das Gleichgewicht gefährdet wird. Das Gleichgewicht würde sogar unmöglich werden, sobald die Resultierende außerhalb der Stützplatte fällt. Aus diesem Grunde wird man also namentlich bei schrägen Belastungen die Stütze nicht lose auf das Fundament stellen, sondern zugfest mit ihm verbinden (verankern). Diese Verankerungen sollen jetzt berechnet werden.

1. Verschiedene (theoretisch nicht einwandfreie) Methoden.

Hinsichtlich der Wirkungsweise der Verankerungen begegnet man in der Praxis häufig recht unklaren und falschen Ansichten. Zunächst mögen deshalb einige der üblichen Rechenmethoden auf ihre Richtigkeit hin besprochen werden.

a) Häufig findet man folgenden Gedankengang: „Die Stütze wird sich um den Punkt c (Fig. 176a) drehen, folglich stellen wir für diesen Punkt die Momente auf und erhalten:

$$P \cdot r = Z \cdot a; \quad Z = \frac{P \cdot r}{a}.$$

Hiermit ist dann die Ankerkraft Z bestimmt." Diese Berechnung bezieht sich also auf den in Fig. 176b dargestellten Zustand, daß der Anker sich bereits so gedehnt hat, daß die Platte nur noch auf der Kante c aufsteht.

Digitized by Google

Für diesen Fall würde Z tatsächlich den obigen Wert annehmen. Nun ist aber Fig. 176b ein Zustand, der auf keinen Fall eintreten darf. In Wirklichkeit spielt sich vielmehr folgender Vorgang ab: Die Platte drückt sich bei c etwas in das Fundament ein und hebt sich bei d etwas ab. Hierbei entstehen im Anker Zugspannungen und gleichzeitig auf einer Strecke $\overline{cN}$ gegen die Platte Druckspannungen. *Letztere müssen natürlich ebenfalls in die Gleichgewichtsbedingungen eingeführt werden,* da sie ebenso wie die Last P und die Ankerkraft Z auf die Stütze einwirken. Tut man dieses, so ergibt sich — wie später gezeigt werden wird — für Z ein ganz bedeutend größerer Wert. *Nur dann, wenn der Anker zu schwach ist, um diese Spannkraft aufzunehmen, und infolgedessen eine übermäßige Dehnung erleidet, wird sich die Stütze so weit drehen, daß der Zustand Fig. 176b eintritt.* Man sieht also, daß eine auf Grund von Fig. 176b bestimmte Spannung kein Maß für die Sicherheit der Konstruktion abgibt. Denn um überhaupt in diesen Zustand gelangen zu können, hat der Anker bereits eine unzulässige Form-

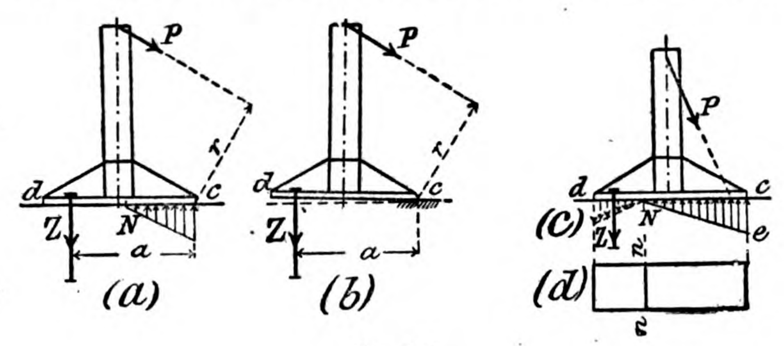


Fig. 176.

änderung durchmachen müssen und kann also nicht mehr als vollwertiges Material angesehen werden. In dem normalen, beabsichtigten Zustand ist das in Betracht zu ziehende Kräftesystem ein ganz anderes, und hierfür muß er berechnet werden.

b) Eine andere Rechenmethode ist die folgende: Man betrachtet die Stütze als einen mit dem Fundamente zusammenhängenden Freiträger (Fig. 176c). Infolge der Last P entständen in dem Schnitte $\overline{dc}$ sowohl Zug- als auch Druckspannungen. Erstere mögen sich auf eine Strecke $\overline{dN}$, letztere auf $\overline{cN}$ erstrecken (Fig. 176c und d); die Linie n—n sei also die Nullinie des Querschnittes. Von diesen Spannungen werden nun die Druckkräfte direkt von dem Fundament aufgenommen. Die Zugspannungen können dagegen in dieser Berührungsfläche nicht übertragen werden, so daß hierfür Anker eingezogen werden müssen. Man bestimmt also zunächst die Druckspannungen (Dreieck $c\,e\,N$ in Fig. 176c), und zwar so, als ob das Fundament im Schnitte $\overline{dc}$ sowohl Zug als auch Druck aufnehmen könnte. Sobald dann die Druckspannungen bekannt sind, ergibt sich der Ankerzug natürlich aus einer Momentengleichung oder aus der Gleichung $R_y = 0$, — Auch diese Berechnung ist falsch. Sie beruht nämlich auf der Annahme, daß dadurch, daß wir das Mauerwerk auf der Strecke $\overline{dN}$ durch den Anker ersetzt haben, keine Änderung der Nullinie n—n und des Druck-

Digitized by Google

dreiecks $c e N$ eintreten wird. Man erkennt leicht, daß diese Annahme durchaus nicht zutreffen wird. Um dieses einzusehen, wollen wir uns die Stütze (Fig. 176c) einmal ohne Anker, dann mit einem sehr elastischen Anker, dann mit einem etwas stärkeren Anker usw. ausgeführt denken. Bei der ersten Ausführung können wir die Lage der Nullinie und die auftretenden Spannungen nach dem Früheren leicht bestimmen. (Exzentrische Belastung eines nur Druck aufnehmenden Materials.) Bei der zweiten Ausführung — sehr elastischer Anker, z. B. dünner, langer Draht — wird sich die Lage der Nullinie und somit auch das Spannungsdreieck nur sehr wenig ändern, da die geringe, vom Anker ausgeübte Kraft gegenüber den anderen Kräften verschwindet. Bei einer anderen Ausführung — mit stärkerem Anker — wird auch die Zugkraft des Ankers mehr zur Geltung kommen und somit eine Verschiebung der Nullinie hervorrufen usw. Man sieht also, daß es von der mehr oder minder großen Nachgiebigkeit des Ankers abhängt, welche Lage die Nullinie einnehmen wird. Im allgemeinen wird also dadurch, daß wir auf der Strecke $\overline{dN}$ das Mauerwerk durch einen Anker ersetzt haben, das elastische Verhalten der *gesamten* Konstruktion (Nullinie) geändert, so daß es durchaus nicht zulässig ist, die unter einer anderen Annahme gefundenen Spannungen auf die neue Anordnung zu übertragen.

2. Berechnung auf Grund der elastischen Formänderungen.

Wir wollen nun den zur Bestimmung der Kräfte führenden Weg festlegen: Zunächst untersuchen wir natürlich, welche Kräfte überhaupt auf die Stütze einwirken. Die Wirkung dieser Kräfte besteht darin, daß die Stütze im Gleichgewicht bleibt. Daraus folgt, daß die Kräfte die drei Bedingungen $R_x = 0$, $R_y = 0$, $\Sigma M = 0$ erfüllen müssen. Nun wird sich jedoch herausstellen, daß wir mehr Unbekannte als Gleichungen haben. Deshalb müssen wir uns noch weitere Gleichungen verschaffen, und zwar finden wir diese — wie stets in einem solchen Falle —, indem wir das elastische Verhalten der Konstruktion untersuchen. Auf diese Weise werden dann sämtliche Kräfte bestimmt.

a) Zusammenstellung der Kräfte.

Zunächst stellen wir also die auf die Stütze wirkenden Kräfte zusammen. Es sind dieses:

1. die Druckspannungen auf einer Strecke $\overline{cN}$ (Fig. 176a und 177a),
2. die Zugkraft Z des Ankers,
3. die Last P,
4. horizontale Reibungskräfte zwischen Platte und Fundament.

Digitized by Google

1. Von den Druckspannungen nehmen wir, wie bei jeder Biegungsaufgabe, an, daß sie vom Nullpunkte N an geradlinig

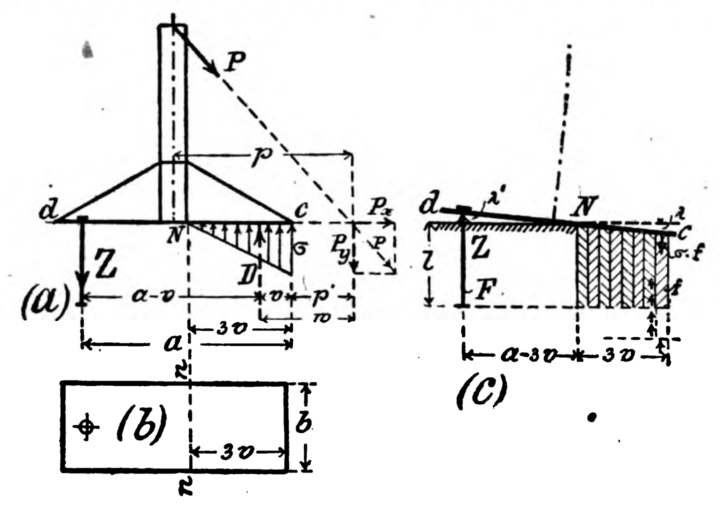


Fig. 177.

anwachsen. Wird die größte Druckspannung mit σ und die Länge des Druckdreieckes mit $3v$ bezeichnet (Fig. 177a), so ergeben sämtliche Druckspannungen eine Resultierende

$$D = \frac{1}{2} \cdot \sigma \cdot 3v \cdot b .$$

[b sei die Tiefe der (rechteckigen) Fundamentplatte.] Diese Resultierende liegt in der Entfernung v vom Punkte c.

2. Die Zugkraft Z des Ankers wird direkt als unbekannte Einzelkraft eingeführt.

3. Die Kraft P zerlegen wir zur bequemen Rechnung vertikal und horizontal in P_y und P_x. Als Punkt der Zerlegung nehmen wir den Schnittpunkt von P mit der Fläche $\overline{dc}$. (Der Zerlegungspunkt einer Kraft ist gleichgültig, da wir ja stets dieselben Seitenkräfte erhalten.)

4. Die horizontalen Kräfte zwischen Fußplatte und Fundament sind natürlich zunächst unbekannt. Ihre Resultierende möge mit T bezeichnet werden.

Somit sind alle Kräfte aufgezählt.

b) *Aufstellung der Gleichgewichtsbedingungen.*

Die Anwendung der drei Gleichgewichtsbedingungen auf die Stütze Fig. 177a ergibt:

Digitized by Google

$$T = P_x,$$
$$D = Z + P_y,$$
$$Z(a - v) = P_y \cdot w.$$

In der letzten Gleichung ist als Bezugspunkt für die Momente der Angriffspunkt von D gewählt. Natürlich ist dieses nur aus dem Grunde geschehen, weil dann in der Momentengleichung die Kräfte D und P_x herausfallen, und die Gleichung also sehr einfach wird. Mit dem „Drehen" der Platte hat die Wahl des Momentenpunktes aber absolut nichts zu tun, wie ja auch der Angriffspunkt der Kraft D durchaus kein Drehpunkt, d. h. feststehender Punkt, ist, sondern vielmehr bei der elastischen Formänderung der ganzen Konstruktion eine Verschiebung erfährt. Hieraus muß aufmerksam gemacht werden, da man immer wieder auf die verkehrte Ansicht stößt, daß die Momentengleichung nur auf einen „Drehpunkt" angewendet werden dürfe (s. Bemerkung am Schlusse von § 16).

Um die Kraft T in den obigen Gleichungen wollen wir uns nicht weiter kümmern. Sie wird durch die Reibung, eventuell durch die Rippen der Auflagerplatte, aufgenommen. Die Hauptsache ist die Berechnung der Ankerkraft Z und des Druckes D. Zu deren Berechnung bleiben somit die beiden Gleichungen übrig:

$$\text{(I)} \qquad -Z + D = P_y,$$
$$\text{(II)} \qquad Z(a - v) = P_y \cdot w.$$

In diesen zwei Gleichungen sind jedoch drei Unbekannte, nämlich Z, D und v. (Der Abstand w ist keine neue Unbekannte, da er durch v ausdrückbar ist, $w = v + p'$.) Die Unbekannten können also noch nicht ausgerechnet werden. Wir müssen vielmehr noch eine dritte Gleichung auffinden, und zwar erhalten wir diese, indem wir die Beziehungen zwischen den elastischen Formänderungen der Konstruktion untersuchen.

c) Beziehung zwischen D und Z auf Grund der Formänderungen.

Die Platte wird sich bei c um eine Strecke λ in den Stein hineindrücken und an der Stelle, wo der Anker angreift, um eine Strecke λ' abheben (Fig. 177c). Unter der Annahme, daß die Fläche $\overline{dc}$ der Platte eine Ebene bleibt, erhalten wir zunächst die Beziehung zwischen den elastischen Formänderungen:

$$\lambda : \lambda' = 3v : (a - 3v).$$

Um aber diese Gleichung zusammen mit den beiden obigen zu verwenden, müssen wir λ und λ' noch durch Z und D resp. σ ausdrücken. Zunächst finden wir

$$1) \quad \lambda' = \frac{Z \cdot l}{E' \cdot F},$$

Digitized by Google

worin l die Länge, E' der Elastizitätsmodul und F der Querschnitt des Ankers ist.

Bei λ ist es nicht so einfach, die entsprechende Beziehung aufzustellen. Die Formänderung eines derartigen Massivkörpers mit einer dreieckförmig angeordneten Belastung läßt sich viel schwieriger ermitteln als die eines Zugstabes. Um aber einen Anhalt zu haben, tun wir folgendes: Wir denken uns den Teil des Fundamentes rechts von N aus einzelnen Schichten bestehend. Die Schicht *1* habe den Flächeninhalt f. Auf ihr ruht also der Druck $\sigma \cdot f$, und es wird somit ihre Verkürzung:

$$2) \quad \lambda = \frac{\sigma \cdot f \cdot l}{E \cdot f} = \frac{\sigma l}{E}.$$

Hierbei ist also angenommen, daß das Fundamentmaterial ebenfalls dem *Hooke*schen Gesetze gehorcht, und zwar mit einem Elastizitätsmodul E. Die Länge l, auf der die Zusammendrückung erfolgt, ist gleich der Ankerlänge genommen. Augenscheinlich ist dieses eine recht unsichere Annahme; sie wird später noch erörtert werden. Nun setzen wir die Werte 1) und 2) in die obige Gleichung zwischen λ und λ' ein und erhalten:

$$\frac{\sigma \cdot l}{E} : \frac{Z \cdot l}{E' \cdot F} = 3v : (a - 3v),$$

$$\sigma = Z \cdot \frac{E}{E' \cdot F} \cdot \frac{3v}{a - 3v}.$$

Der gesamte Druck D war:

$$D = \frac{3}{2} \cdot \sigma \cdot v \cdot b.$$

Somit geht die obige Beziehung über in:

$$D = \sigma \cdot \frac{3}{2} v b = Z \cdot \frac{E}{E' \cdot F} \cdot \frac{3v}{a - 3v} \cdot \frac{3}{2} v b,$$

$$\text{(III)} \qquad D = Z \cdot \frac{9}{2} \frac{E}{E'} \cdot \frac{v^2}{a - 3v} \cdot \frac{b}{F}.$$

Hiermit ist die gesuchte dritte Gleichung zwischen D und Z gefunden.

d) Auflösung der Gleichungen.

Nun kommt, wie stets bei derartigen Aufgaben, als letzte Arbeit der rein mathematische Teil, nämlich die Auflösung der Gleichungen. Insgesamt haben wir:

Digitized by Google

$$\text{(I)} \qquad -Z + D = P_y,$$

$$\text{(II)} \qquad Z(a - v) = P_y \cdot w,$$

$$\text{(III)} \qquad D = Z \cdot \frac{9}{2} \frac{E}{E'} \cdot \frac{v^2}{a - 3v} \cdot \frac{b}{F}.$$

Den Wert von D aus Gleichung (III) setzen wir zunächst in die Gleichung (I) ein:

$$\text{(Ia)} \qquad Z\left(-1 + \frac{9}{2} \frac{E}{E'} \frac{b}{F} \cdot \frac{v^2}{a - 3v}\right) = P_y,$$

$$\text{(IIa)} \qquad Z(a - v) = P_y \cdot w.$$

Durch Division von (IIa) durch (Ia) hebt sich dann Z fort und es wird:

$$\text{(IV)} \qquad \frac{a - v}{-1 + \left(\frac{9}{2} \frac{E}{E'} \frac{b}{F}\right) \frac{v^2}{a - 3v}} = w.$$

In dieser Gleichung können wir noch w durch v ausdrücken:

$$w = v + p'$$

und einsetzen. Dann haben wir eine Gleichung, in der als einzige Unbekannte der Wert v vorkommt:

$$\text{(IVa)} \qquad \frac{a - v}{-1 + \left(\frac{9}{2} \frac{E}{E'} \frac{b}{F}\right) \frac{v^2}{a - 3v}} = v + p'.$$

Den Ausdruck in der runden Klammer bezeichnen wir zur Abkürzung mit K; also

$$\boxed{\frac{9}{2} \frac{E}{E'} \frac{b}{F} = K.}$$

Dann ergibt sich durch Ausmultiplizieren:

$$a - v = \left(-1 + K \frac{v^2}{a - 3v}\right)(v + p')$$

$$= -v + K \frac{v^3}{a - 3v} - p' + K \frac{v^2 p'}{a - 3v},$$

und schließlich, nach einigen Umformungen:

$$\text{(V)} \qquad v^3 + v^2 \cdot p' + v \cdot 3 \frac{a \pm p'}{K} - a \frac{a \pm p'}{K} = 0.$$

Das positive Vorzeichen bei p' gilt, wenn p' *rechts* von der Kante c liegt; das negative gilt, wenn p' *links* von c fällt.

Aus der obigen Gleichung ließe sich nun für v direkt eine Formel aufstellen. Da letztere aber recht unbequem wird, ist es

Digitized by Google

praktischer, die Gleichung (V) durch Probieren zu lösen (s. das folgende Beispiel). Sobald dann v bekannt ist, ergeben sich aus den Gleichungen (II) und (I) auch Z und D bzw. σ.

Zusammenfassung:

Um nach dieser Methode die Ankerkraft Z und die größte Druckspannung σ zwischen Fußplatte und Fundament zu berechnen, verfahren wir folgendermaßen:

a) Wir nehmen die Plattenabmessungen a und b und den Ankerquerschnitt F an und berechnen:

1. den Abstand p der Resultierenden bis Stützenachse und hieraus den Abstand p' bis Plattenende;
2. den Hilfswert $K = \frac{9}{2} \frac{E}{E'} \frac{b}{F}$. [$E$ = Elastizitätsmodul vom Fundament, E' = Elastizitätsmodul vom Anker.] Bei Betonfundament und Flußeisenanker kann man setzen: $E : E' = 1 : 15$. Also wird hierfür:

$$K = 0{,}3 \frac{b}{F}.$$

b) Diese Werte p' und K setzt man dann in die Gleichung ein:

$$v^3 + v^2 p' + v \cdot 3 \frac{a \pm p'}{K} - a \frac{a \pm p'}{K} = 0 \qquad \text{(V)}$$

und findet (durch Probieren) v. [Hinsichtlich der Vorzeichen von p' s. o.]

c) Aus v folgen dann schließlich:

$$\text{Ankerkraft } Z = \frac{P_v \cdot w}{a - v} \quad \text{(Gleichung II)},$$

$$\text{Druck } D = P_v + Z \quad \text{(Gleichung I)},$$

bzw.

$$\text{Spannung im Anker } \sigma' = \frac{Z}{F} \quad (\text{da } Z = \sigma' \cdot F),$$

$$\text{Spannung im Fundament } \sigma = D \frac{2}{3 v b} \quad (\text{da } D = \tfrac{1}{2} \sigma \cdot 3 v \cdot b).$$

Zusatz: Um hinsichtlich der Ankerfläche F einen Anhalt zu haben, kann man zunächst v = rd $\frac{1}{6} a$ bis $\frac{1}{10} a$ annehmen und hieraus aus der obigen Gleichung Z berechnen. Mit diesem angenäherten Wert läßt sich dann die genaue Rechnung durchführen.

3. Beispiel.

Die in Fig. 178a gezeichnete Stütze ist durch die Kräfte $P_1 = 1000$ kg und $P_2 = 10000$ kg belastet. Das Fundament ist aus Beton. Die Verankerung ist zu berechnen!

Digitized by Google

Es ist also gegeben:

$$P_y = 10000 \text{ kg},$$
$$P_x = 1000 \text{ kg}.$$

Ferner wählen wir:

Platte 70×50 cm; also $b = 50$ cm, $a = \text{rd} \cdot 64$ cm,
Ankerdurchmesser 2,0 cm; also $F = 3{,}14$ qcm.

a) Nun berechnen wir zunächst die Hilfswerte:

$$p = \frac{\Sigma M}{P_y} = \frac{10000 \cdot 0 + 1000 \cdot 400}{10000} = 40{,}0 \text{ cm},$$

$$p' = 40{,}0 - 35 = +5{,}0 \text{ cm},$$

$$K = 0{,}3 \frac{50{,}0}{3{,}14} = 4{,}8 .$$

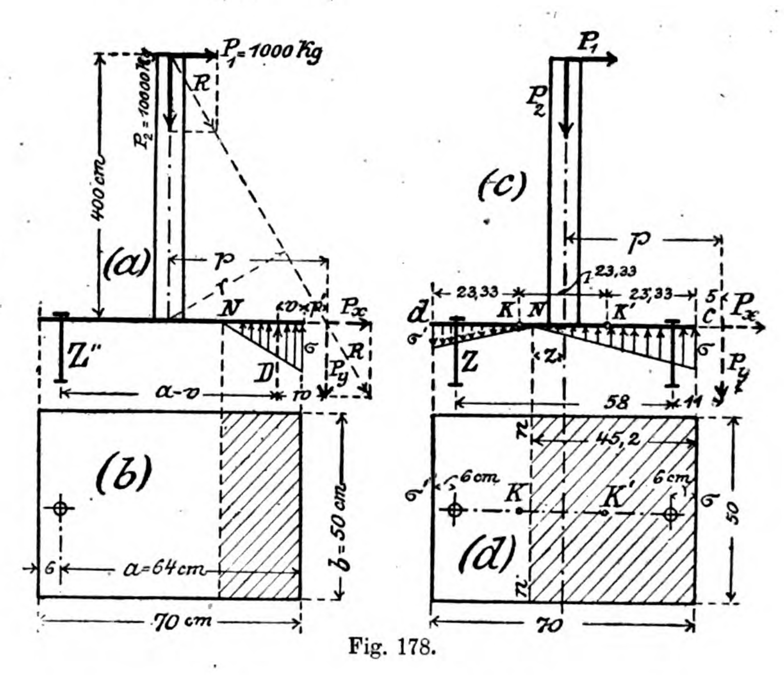


Fig. 178.

b) Mit diesen Hilfswerten lautet die Gleichung (V):

$$v^3 + v^2 \cdot 5{,}0 + v \cdot 3 \frac{64{,}0 + 5{,}0}{4{,}8} - 64{,}0 \frac{64{,}0 + 5{,}0}{4{,}8} = 0,$$

(V) $$v^3 + v^2 \cdot 5{,}0 + v \cdot 43{,}1 - 920 = 0 .$$

Um die Gleichung zu lösen, probieren wir zunächst den Wert

$$v = 8{,}0 \text{ cm}$$

Digitized by Google

und sehen nach, ob Gleichung (V) erfüllt ist. Die linke Seite der Gleichung liefert:

$$8{,}0^3 + 8{,}0^2 \cdot 5{,}0 + 8{,}0 \cdot 43{,}1 - 920,$$

d. i.

$$1177 - 920 = +257\,.$$

Es kommt also nicht der Wert Null heraus, den die linke Seite von Gleichung (V) haben soll. Der Wert von $v = 8{,}0$ cm ist also nicht der richtige. Nun probieren wir

$$v = 7{,}0 \text{ cm.}$$

Die linke Seite von Gleichung (V) hat den Wert:

$$7{,}0^3 + 7{,}0^2 \cdot 5{,}0 + 7{,}0 \cdot 43{,}1 - 920,$$

d. i.

$$890 - 920 = -30\,.$$

Dieser Wert ist schon so nahe an Null, daß wir $v = 7{,}0$ cm als richtig ansehen können. (Der genaue Wert von v ist 7,1 cm.)

c) Sobald dann v bestimmt ist, finden wir:

$$\text{(II)} \qquad Z = \frac{P_y \cdot w}{a - v} = \frac{10000 \cdot 12}{57} = 2100 \text{ kg},$$

$$\text{(I)} \qquad D = P_y + Z = 12100 \text{ kg};$$

hieraus

$$\text{Spannung im Anker } \sigma' = \frac{2100}{3{,}14} = 670 \text{ kg/qcm},$$

$$\text{Spannung auf das Fundament } \sigma = 12100 \frac{2}{3 \cdot 7{,}0 \cdot 50} = 23 \text{ kg/qcm}.$$

Beide Spannungen sind gering.

Zusatz 1. Zum Vergleiche wollen wir diese Stütze auch nach der vorhin unter 1b aufgeführten Rechenmethode untersuchen (Fig. 178c—d). Das Widerstandsmoment des Schnittes $\overline{dc}$ ist: $W = \frac{1}{6}\, 50 \cdot 70^2 = 40800$ cm³. Also ergibt sich mit Hilfe der Kernpunktsmomente:

$$\sigma = -\frac{10000 \cdot 51{,}66}{40800} = -12{,}7 \text{ kg/qcm},$$

$$\sigma' = +\frac{10000 \cdot 28{,}33}{40800} = +6{,}9 \text{ kg/qcm}.$$

Die Lage der Nullinie ist nach § 90, I bestimmt durch:

$$z = \frac{J}{F \cdot p} = \frac{\frac{1}{12} b h^3}{b \cdot h \cdot p} = \frac{1}{12} \frac{h^2}{p} = \frac{1}{12} \cdot \frac{70^2}{40} = 10{,}2 \text{ cm.}$$

Der Druck von 12,7 kg/qcm soll also auch dann auftreten, wenn in dem gezogenen Teile statt des Betons der Anker wirkt. Der Ankerzug Z wird dann, wenn zwei symmetrisch angeordnete Anker vorhanden sind, mitunter folgendermaßen berechnet: Für den Ankerzug Z ist der Angriffspunkt des anderen Ankers der „Drehpunkt“. (Was und weshalb sich etwas um diesen Punkt drehen soll, wird meistens nicht näher begründet.) Folglich wird: $Z = \frac{10000 \cdot 11}{58} = 1900$ kg.

Digitized by Google

Das Fehlerhafte dieser Berechnung tritt u. a. auch dann zutage, wenn wir die Summe von sämtlichen vertikalen Kräften bilden. Dann wird: vertikal abwärts $10000 + 1900 = 11900$ kg; vertikal aufwärts $\frac{1}{2} 12{,}7 \cdot 45{.}2 \cdot 50 = 14400$ kg. Wir sehen also, daß eine derartige Berechnung Resultate liefert, die nach den Grundregeln der Statik einfach unmöglich sind.

Zusatz 2. Hinsichtlich der in unserer Berechnung gemachten Annahmen ergibt sich noch folgendes: Die Annahmen, daß die Druckkräfte sich dreieckförmig verteilen und daß die Fußplatte eben bleibt, entsprechen den allgemeinen Grundlagen für die Berechnung von auf Biegung beanspruchten Körpern. Die Beziehung 1) zwischen λ' und Z wird sehr gut stimmen, da es sich hier um die Verlängerung eines auf Zug beanspruchten Eisenstabes handelt. Bedenklicher ist die Beziehung 2). In Wirklichkeit gehen die einzelnen Streifen (Fig. 177c) natürlich von Oberkante bis Unterkante Fundament durch. Der Streifen f z. B. ist also ein Stab, der oben durch die Kraft σf und an der Unterfläche durch eine kleinere Kraft belastet ist (da an der Fundamentsohle kleinere Pressungen herrschen). Der Unterschied der beiden Belastungen wird durch die zwischen je zwei Streifen wirkenden Schubspannungen aufgenommen werden. Da eine derartige genaue Untersuchung zurzeit aussichtslos ist, haben wir eine konstante Druckkraft σf angenommen und dafür eine kürzere Länge des Streifens eingeführt. Man beachte hierbei auch, daß die Formänderung des unteren Teiles des Fundamentes wenig Einfluß auf die *gegenseitige* Lagenänderung von Stützenplatte und Oberfläche des Fundamentes haben wird. Übrigens sind diese Unsicherheiten dieselben, die man bei der Berechnung von Eisenbetonkonstruktionen, z. B. exzentrisch belasteten Eisenbetonstützen, dauernd in den Kauf nehmen muß.

Hinsichtlich der Sicherheit der ganzen Berechnung sei auch noch darauf hingewiesen, daß der Anker von vornherein durch Anziehen der Muttern Anfangsspannung bekommt, um die Platte fest gegen das Fundament zu pressen. Diese Anfangsspannung kann sehr verschieden ausfallen. Wird sie übertrieben, so entstehen natürlich viel höhere Beanspruchungen, als die Rechnung ergibt.

II. Fundamente.

Die Fundamente werden durch die Stütze und durch Eigengewicht beansprucht. Man bestimmt — am einfachsten analytisch — den Schnittpunkt der Resultierenden R sämtlicher Kräfte mit der Fundamentsohle. In dieser Sohle können natürlich nur Druckkräfte übertragen werden, da ja das Fundament lose auf dem Erdreich aufsitzt. (Als Beispiel nehme man Fig. 170a und b, wo eine Fundamentfuge AD mit einer angreifenden Resultierenden R gezeichnet ist.) Wir haben also folgende Aufgabe: Auf einen Schnitt AD, in dem nur Druck übertragen werden kann, wirkt eine schräge exzentrische Kraft R. Wie groß sind die Spannungen (Pressungen) in diesem Schnitte?

Digitized by Google

Die Lösung geschieht nach § 91 (Spannungen bei nur druckfestem Material):

a) Liegt der Angriffspunkt der Resultierenden innerhalb des Kerns, so ist die größte Spannung (Kantenpressung):

$$\text{(VI)} \quad \begin{cases} \sigma = -\left(\dfrac{P}{F} + \dfrac{P \cdot p}{W}\right); & \text{oder auch} \\ \sigma = -\dfrac{P \cdot f}{W}. & [P \cdot f = \text{Kernmoment.}] \end{cases}$$

b) Liegt der Durchgangspunkt außerhalb des Kerns, so ist die größte Spannung

$$\text{(VII)} \qquad \sigma = -\frac{2P}{3ab}.$$

In diesen Formeln ist P die Vertikalkomponente der Resultierenden (also $= R_y$). Die Horizontalkomponente R_x bringt in der Fuge Schubspannungen hervor und wird durch die Reibung, bzw. den horizontalen Gegendruck der Erde aufgenommen. Hinsichtlich des Kerns sei noch erinnert, daß beim rechteckigen Querschnitt die Kernpunkte in $^1/_3$ der Höhe liegen.

Als größte Kantenpressung gilt für normale Fälle 3—4 kg/qcm.

Beispiel.

Die Stütze Fig. 178a habe ein Betonfundament: Grundriß 1,20 × 1,20 m, Höhe 0,90 m. Wie groß ist die Kantenpressung? (Die Figur zeichne man selber.)

Vertikallast der Stütze	10000 kg
Fundamentgewicht 1,20 · 1,20 · 0,9 · 2000 =	2850 „
gesamte Vertikallast P =	12850 kg;
Horizontallast H =	1000 kg.

Abstand der Resultierenden von der rechten Fundamentkante:

$$x = \frac{\Sigma M}{R_y} = \frac{+1000(4{,}00 + 0{,}90) - 12850 \cdot \frac{1}{2}\, 1{,}20}{12850} = \frac{+4900 - 7710}{12850}$$

$= 0{,}219$ m $= 21{,}9$ cm (links von der Kante).

Größter Druck $\sigma = -\dfrac{2 \cdot P}{3 \cdot a \cdot b} = -\dfrac{2 \cdot 12850}{3 \cdot 21{,}9 \cdot 120} = -3{,}3$ kg/qcm.

Zusatz: Häufig werden Fundamente derart untersucht, daß man von den Lasten und dem Fundamentgewicht die Momente in bezug auf die äußerste Kante aufstellt und dann das „Kippmoment" mit dem „Gegenmoment" vergleicht. [In unserem Falle: „Kippmoment" = 1000 (4,0 + 0,9) = 4900 mkg; „Gegenmoment" = 12850 · 0,6 = 7710 mkg; angebliche „Kippsicherheit" = 7710 : 4900 = 1,6 fach.] In dieser Aufstellung ist nicht berücksichtigt, daß die Spannungen σ auch ein Moment abgeben. Fügt man dieses noch hinzu, so kommt als Gesamtmoment natürlich „Null" heraus. Diese ganze Kippuntersuchung leidet also an einer inneren Unklarheit. **Maßgebend für die Standsicherheit sind stets die auftretenden Spannungen.**

Digitized by Google

Abschnitt VI.
Der Eisenbeton.

19. Vortrag:
Berechnung von Eisenbetonkonstruktionen auf Druck, Biegung und Knickung.

§ 100.
Das Grundprinzip der Eisenbetonberechnungen.

I. Allgemeines.

Der Beton ist ein aus Zement, Wasser, Sand, Kies oder Steinschlag hergestelltes künstliches Gestein. Er besitzt, wie die meisten Gesteinsarten, eine ziemlich bedeutende Festigkeit gegen Druckbeanspruchung, aber nur eine geringe Festigkeit gegen Zug. Wenn also bei einem aus Beton hergestellten Körper (z. B. Balken) sowohl Zug- als auch Druckspannungen auftreten, werden die Stellen, in denen Zugspannungen herrschen, eine viel geringere Sicherheit gegen Bruch besitzen, als die auf Druck beanspruchten Stellen. Man erkennt hieraus, daß hinsichtlich der Festigkeitseigenschaften der Beton ein unrationelles Material ist.

Mit Rücksicht auf diese mangelhafte Zugfestigkeit des Betons ist man zu der unter dem Namen „Eisenbeton" („verstärkter" oder „armierter" Beton) bekannten Bauweise übergegangen: An denjenigen Stellen der Konstruktion, an denen Zugspannungen auftreten, werden in den Beton Eiseneinlagen eingebettet. (Bei einem auf zwei Stützen ruhenden Betonbalken also in den unteren Schichten.) Diese Eiseneinlagen haben die Aufgabe, die an der betreffenden Stelle herrschenden Zugspannungen zu übernehmen. Der Beton wird hierdurch entlastet und in der Hauptsache nur zur Aufnahme der Druckspannungen herangezogen. Auf diese Weise entsteht ein Zusammenwirken von Eisen und Beton innerhalb eines Körpers, aber mit getrennten Aufgaben.

Digitized by Google

II. Beziehung zwischen Längenänderung und Spannung bei Eisen und bei Beton.

Das elastische Verhalten des Eisens ist aus unseren früheren Untersuchungen bekannt. Vor allen Dingen sei daran erinnert, daß Eisen ein Material ist, das sehr gut dem *Hooke*schen Gesetze gehorcht (§ 28, 30, 31). Hat ein Eisenstab eine Spannung σ, so läßt sich hieraus seine Dehnung (Längenänderung pro Längeneinheit) berechnen, indem man die Spannung durch den Elastizitätsmodul dividiert:

$$\text{(I)} \qquad \varepsilon_e = \frac{\sigma}{E_e}.$$

Der Elastizitätsmodul des Eisens ist jetzt mit E_e bezeichnet. Er beträgt bekanntlich bei Flußeisen rund 2150000 kg/qcm.

Die Beziehung (I) gilt, solange die Spannung σ unterhalb der Proportionalitätsgrenze ist, d. h. für alle für die Praxis in Betracht kommenden Spannungen. Die gesamte Längenänderung, die ein Stab von der ursprünglichen Länge l infolge der Spannung σ erfährt, beträgt somit:

$$\text{(Ia)} \qquad \lambda_e = \varepsilon_e \cdot l = \frac{\sigma \cdot l}{E_e}.$$

Diese Beziehungen (I) und (Ia) haben wir ja schon wiederholt angewendet.

Das elastische Verhalten des Betons ist weniger regelmäßig. Der Beton ist ein Material, das nicht dem *Hooke*schen Gesetze gehorcht. Es läßt sich also keine Verhältniszahl E angeben, mit deren Hilfe man aus der Spannung σ direkt die Dehnung ε berechnen kann. Man müßte vielmehr das Potenzgesetz (§ 29) anwenden, um dann mit Hilfe von zwei Faktoren, m und E, die Dehnung zu ermitteln.

Für die Praxis wird aber eine derartige Rechnung mit zwei Hilfszahlen m und E zu umständlich. Es ist deshalb allgemein üblich, und durch die amtlichen Vorschriften auch festgesetzt, daß die Dehnung des Betons so bestimmt werde, als ob dieses Material ebenfalls dem *Hooke*schen Gesetze gehorcht. Bei einer gegebenen Spannung σ berechnen wir also die Dehnung eines Betonstabes:

$$\text{(II)} \qquad \varepsilon_b = \frac{\sigma}{E_b}.$$

Die Zahl E_b schwankt für die verschiedenen Betonsorten zwischen 100000—200000 und müßte eigentlich für jede Mischung besonders bestimmt werden. [Schon aus diesem Grunde hätte es

Digitized by Google

wenig Zweck, die genauen Formeln zur Berechnung der Dehnung des Betons (Potenzgesetz) anzuwenden.] Die gesamte Längenänderung eines Betonkörpers von der Länge l ergibt sich nach dieser Annäherungsmethode:

$$\text{(IIa)} \qquad \lambda_b = \frac{\sigma \cdot l}{E_b}.$$

Durch die Formeln (Ia) und (IIa) können wir also die Längenänderungen λ_e und λ_b berechnen, die ein Eisen- bzw. Betonstab von der Länge l ausführt, sobald er mit einem Betrage σ (kg/qcm) gespannt wird.

III. Das Verhältnis der Spannungen eines Eisen- und eines Betonstabes, deren Längen l um gleiche Beträge λ geändert werden.

Nun wollen wir eine sehr wichtige Beziehung ableiten, die das gegenseitige elastische Verhalten von Eisen und von Beton ins rechte Licht setzt. Ein Betonkörper von der Länge l werde um ein Stück λ zusammengedrückt. Welche Spannung σ_b hat er im zusammengedrückten Zustande? Die Antwort ergibt sich sofort durch Auflösung der Gleichung (IIa). Die Spannung muß nämlich betragen:

$$\text{(III)} \qquad \sigma_b = \frac{\lambda}{l} \cdot E_b.$$

Diese Kraft muß also auf jedes Quadratzentimeter des Stabes aufgebracht werden, um eine Zusammendrückung λ zu erzielen. (Beträgt der Gesamtquerschnitt des Betonkörpers F, so wäre die erforderliche Gesamtlast demnach $F \cdot \sigma_b$.)

Nun möge angenommen werden, derselbe Körper bestehe nicht aus Beton, sondern aus Eisen, und erfahre die gleiche Längenänderung λ. Welche Spannung σ_e (Belastung pro Flächeneinheit) ist jetzt notwendig? Die Antwort ergibt sich durch Auflösung von Gleichung (Ia):

$$\text{(IV)} \qquad \sigma_e = \frac{\lambda}{l} \cdot E_e.$$

Vergleichen wir diese Spannung σ_e mit der vorhin erhaltenen Spannung σ_b, so zeigt sich folgendes Verhältnis:

$$\frac{\sigma_e}{\sigma_b} = \frac{\frac{\lambda}{l} \cdot E_e}{\frac{\lambda}{l} \cdot E_b},$$

$$\text{(V)} \qquad \frac{\sigma_e}{\sigma_b} = \frac{E_e}{E_b}.$$

Digitized by Google

In Worten: ***Werden ein Eisen- und ein Betonstab von den ursprünglichen Längen l je um einen Betrag λ verlängert oder verkürzt, so verhalten sich die bei dieser Formänderung entstehenden Spannungen wie der Elastizitätsmodul des Eisens zu dem des Betons.***

Das Verhältnis dieser beiden Elastizitätsmodul bezeichnet man gewöhnlich mit „n“,

$$\frac{E_e}{E_b} = n ,$$

wobei für n im allgemeinen der Betrag

$$\boxed{\frac{E_e}{E_b} = n = 15}$$

angenommen wird. (Vgl. die Durchschnittszahlen von E_e und E_b.) Mit dieser Abkürzung erscheint die Gleichung (V) in der Form:

$$\text{(Va)} \qquad \frac{\sigma_e}{\sigma_b} = \frac{E_e}{E_b} = n = \sim 15 .$$

Noch deutlicher wird der Inhalt dieser Gleichung, wenn wir sie so schreiben:

$$\text{(VI)} \qquad \sigma_e = n \cdot \sigma_b = \sim 15 \cdot \sigma_b .$$

Das heißt: ***Wenn ein Eisenstab um einen Betrag λ in seiner Länge verändert wird, so erleidet er hierbei die n-fache Spannung wie ein Betonstab, der an seiner Stelle wäre.*** Das Eisen ist gewissermaßen n-mal weniger nachgiebig als Beton und muß also, um eine bestimmte Längenänderung zu erfahren, in n-mal so große Spannung versetzt werden, als Beton.

Diese einfache Aussage, die das elastische Verhalten der beiden Materialien kennzeichnet, wird sich wie ein roter Faden durch alle Eisenbetonberechnungen hindurchziehen!

§ 101.

Berechnung von zentrisch belasteten Eisenbetonkörpern.

I. Ermittlung der Spannungen.

Aufgabe: Ein Betonkörper mit Eiseneinlagen (Fig. 179), dessen Abmessungen bekannt seien, ist durch eine zentrisch wirkende Last P auf Druck beansprucht. Wie groß sind die Spannungen im Eisen und im Beton?

Digitized by Google

Wir wollen zunächst folgende Bezeichnungen einführen. Es sei die

Querschnittsfläche des Betons: F,
" " Eisens: f_e,
Spannung im Beton: σ_b,
" " Eisen: σ_e.

Da die gesamten vom Eisen und vom Beton aufgenommenen Kräfte gleich der Last P sein müssen, haben wir zur Berechnung von σ_b und σ_e zunächst die Beziehung:

$$\text{(I)} \qquad \sigma_b \cdot F + \sigma_e \cdot f_e = P\,.$$

In dieser Gleichung sind die beiden Unbekannten σ_b und σ_e enthalten. Zu deren Berechnung müssen wir also noch eine zweite Beziehung aufsuchen. Letztere ergibt sich aus der Betrachtung des elastischen Verhaltens der Konstruktion:

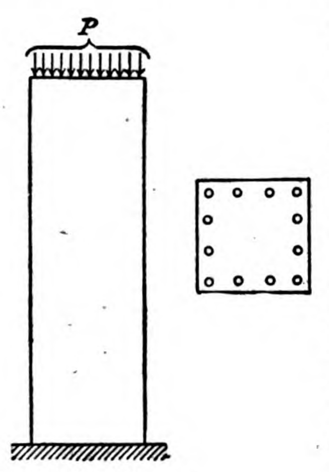


Fig. 179.

Wenn die Last P auf den Eisenbetonkörper einwirkt, wird der Beton samt den Eiseneinlagen um einen Betrag λ zusammengedrückt. Wir haben also den Fall, daß Beton und Eisen durch Einwirkung einer äußeren Kraft eine gleiche Längenänderung durchmachen müssen. Wie nun im vorigen Paragraphen gezeigt ist, besteht in einem solchen Fall stets die Beziehung: Die Spannung σ_e im Eisen ist das n-fache der Spannung σ_b des Betons. (n = Verhältnis des Elastizitätsmoduls des Eisens zu dem des Betons.) Wir haben somit die weitere Gleichung

$$\text{(II)} \qquad \sigma_e = n \cdot \sigma_b\,.$$

Nun lösen wir die Gleichungen (I) und (II) nach den beiden Unbekannten σ_b und σ_e auf und erhalten:

$$\text{(I)} \qquad \sigma_b \cdot F + \sigma_e \cdot f_e = P\,,$$

$$\text{(II)} \qquad \sigma_e = n \cdot \sigma_b\,,$$

$$\text{(Ia)} \qquad \sigma_b \cdot F + n\,\sigma_b \cdot f_e = P\,,$$

$$\sigma_b(F + n \cdot f_e) = P\,,$$

$$\text{(III)} \qquad \sigma_b = \frac{P}{F + n \cdot f_e}\,.$$

Digitized by Google

Die Spannung σ_e ist das n-fache der Betonspannung; also:

$$\text{(IV)} \qquad \begin{cases} \sigma_e = n \cdot \sigma_b \\ \quad = \dfrac{n \cdot P}{F + n \cdot f_e} . \end{cases}$$

Hiermit ist sowohl die Spannung im Beton als auch die im Eisen ermittelt.

Zusammenfassung: Bei einem Eisenbetonkörper mit der Betonfläche F, der Eisenfläche f_e und der (zentrisch wirkenden) Drucklast P ist die

$$\text{(V)} \qquad \boxed{\begin{aligned} &\textbf{Spannung im Beton} \quad \sigma_b = \frac{P}{F + n \cdot f_e}, \\ &\quad ,, \qquad ,, \quad \textbf{Eisen} \quad \sigma_e = n \cdot \sigma_b = \frac{n \cdot P}{F + n \cdot f_e} . \end{aligned}}$$

Für die Verhältniszahl n ist einzusetzen:

$$n = 15 .$$

II. Beispiele.

Erstes Beispiel. *Der in Fig. 179 gezeichnete Eisenbetonstab habe eine Querschnittsfläche von 38 × 38 cm und 12 Eiseneinlagen von je 1,5 cm ∅. Die Druckkraft P betrage 44000 kg. Wie groß sind die Spannungen im Beton und im Eisen?*

Die Querschnittsfläche der Eiseneinlagen ist:

$$f_e = 12 \cdot \frac{1{,}5^2 \pi}{4} = 21{,}21 \text{ qcm}.$$

Die Querschnittsfläche des Betons ist gleich dem Gesamtquerschnitt der Säule ($38 \cdot 38 = 1444$ qcm), vermindert um den durch die Eiseneinlagen fortgenommenen Raum (21,21 qcm). Meistens wird aber diese letztere Querschnittsverminderung nicht berücksichtigt, so daß man einfach schreibt:

$$F = 38 \cdot 38 = 1444 \text{ qcm}.$$

Das Verhältnis der Elastizitätsmodul E_e und E_b ist:

$$n = 15 .$$

Somit folgen aus unseren Formeln die Spannungen:

$$\sigma_b = \frac{44000}{1444 + 15 \cdot 21{,}21} = 25 \text{ kg/qcm},$$

$$\sigma_e = 15 \cdot 25 = 375 \text{ kg/qcm}.$$

Digitized by Google

Zweites Beispiel. Ein Eisenbetonpfeiler von 30 × 30 cm Querschnitt mit vier Rundeisen von je 2,3 cm ∅ ist mit einer Last von 30000 kg zentrisch belastet. Wie groß sind σ_b und σ_e?

Es ergeben sich der Reihe nach:

$$f_e = 4 \cdot \frac{2{,}3^2 \cdot \pi}{4} = 16{,}62 \text{ qcm},$$

$$F = 30 \cdot 30 = 900 \text{ qcm};$$

$$\sigma_b = \frac{30000}{900 + 15 \cdot 16{,}62} = 26{,}1 \text{ kg/qcm},$$

$$\sigma_e = 15 \cdot 26{,}1 = 392 \text{ kg/qcm}.$$

Zusatz: Die Formel für σ_b ist sehr einfach zu merken. Im Zähler des Bruches steht die aufzunehmende Last P. Im Nenner stehen die tragenden Querschnittsflächen F und f_e, wobei aber *der Eisenquerschnitt im n-fachen Betrage* einzusetzen ist. Diese Multiplikation mit der Verhältniszahl n ist eben dadurch zustande gekommen, daß Eisen n-mal soviel Spannung aufnimmt wie Beton, der an seiner Stelle wäre.

Sobald σ_b berechnet ist, folgt σ_e direkt aus: $\sigma_e = n \cdot \sigma_b$.

§ 102.

Berechnung von auf Biegung beanspruchten Eisenbetonbalken mit einseitiger Eiseneinlage.

I. Annahmen über die Spannungen.

Wir wollen folgende für die Berechnung von Eisenbetonbalken grundlegende Aufgabe behandeln: Ein Betonbalken von *rechteckigem* Querschnitt $b \times h$ sei in der (unteren) Zugzone durch Eiseneinlagen von dem Gesamtquerschnitt f_e verstärkt (Fig. 180a und b). Die Spannungen im Beton und im Eisen sind zu berechnen.

1. Hinsichtlich der *Zugspannungen im Beton* machen wir die Annahme, daß der Beton gegen Zugbeanspruchungen überhaupt nicht widerstandsfähig sei. Für einen Schnitt α—β (Fig. 180a, b und c) ergibt sich also folgendes Spannungsbild: In der obersten Schicht herrscht die größte Druckspannung im Beton. Diese Spannung nimmt dann nach unten zu allmählich ab bis auf Null. Unterhalb des Punktes N in Fig. 180c würde Zug auftreten. Da aber der Beton gegen Zugbeanspruchung nicht widerstandsfähig ist, schalten wir seine Wirksamkeit innerhalb der Zugzone voll-

Digitized by Google

ständig aus und nehmen nur die Eiseneinlagen als wirksam an. Von der allgemeinen, in § 38 behandelten Biegungsaufgabe unterscheidet sich der vorliegende Fall also dadurch, daß unterhalb des Punktes N nur an einer Stelle, nämlich da, wo die Eiseneinlagen sitzen, Spannungen angenommen werden.

2. Hinsichtlich der *Druckspannungen im Beton* machen wir die Annahme, daß sie *geradlinig* von ihrem Größtwerte an der

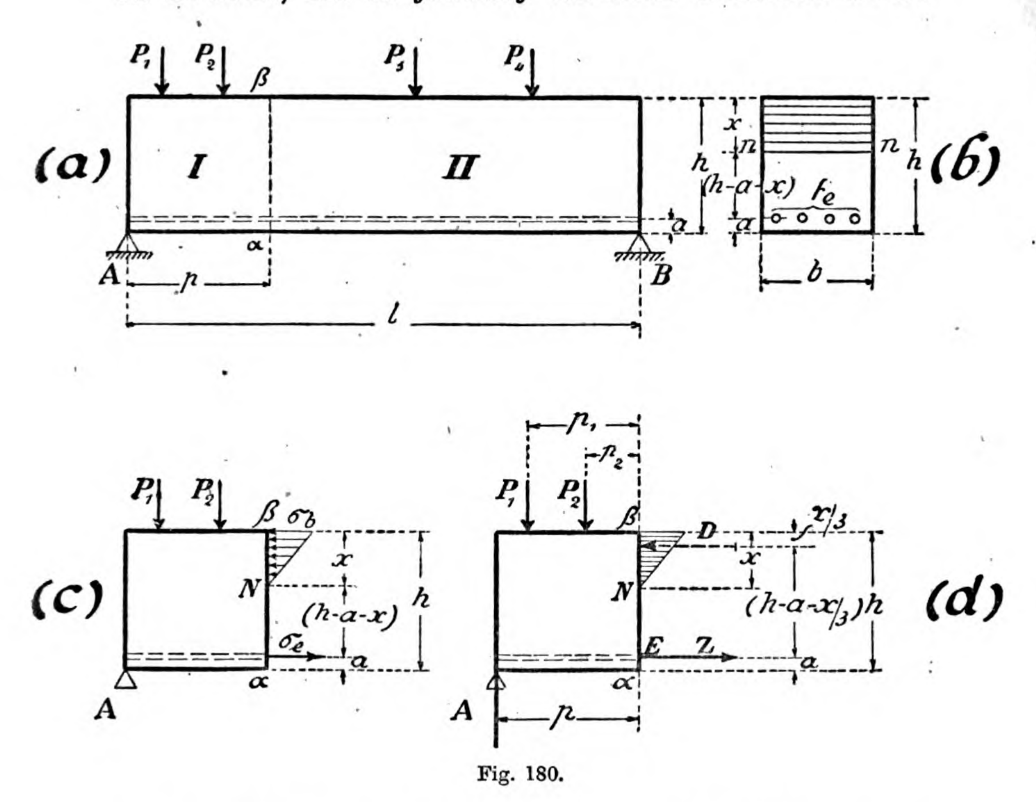


Fig. 180.

obersten Kante bis zu dem Werte Null an einem Punkte N abnehmen (Fig. 180c). Diese Annahme entspricht der *Navier*schen Hypothese in der allgemeinen Biegungslehre (§ 38). Falls die Spannungen nicht zu groß sind, wird sie auch beim Beton einigermaßen stimmen. Die Linie n—n in Fig. 180b, die die Grenze der Druckzone bedeutet, werden wir wieder die „*Nullinie*" nennen. Sie habe von der oberen Kante den (zunächst unbekannten) Abstand x.

3. Hinsichtlich der *Wirkung der Eiseneinlagen* machen wir die Annahme, daß das Eisen vollständig unverrückbar im Beton eingebettet sei. Bei der unter der Belastung eintretenden Durch-

Digitized by Google

biegung des Balkens soll also das Eisen genau dieselben Dehnungen ausführen wie die anschließenden Betonteile. Auf Grund dieser Annahme werden wir dann später die Spannung im Eisen durch die Betonspannung ausdrücken.

Der Abstand der Eisen von der unteren Kante sei a (Fig. 180b und c), so daß für die Entfernung der Nullinie von den Eiseneinlagen die Strecke $h—a—x$ übrigbleibt. Der Abstand a bestimmt sich aus praktischen Rücksichten, da unter den Eisen noch eine Schicht Beton von 1—2 cm Stärke als Schutz gegen Rosten usw. vorhanden sein muß.

II. Die Normalspannungen σ_b und σ_e.

a) Ableitung der Formeln für σ_b und σ_e.

Die größte Druckspannung im Beton (in der äußersten Druckschicht) heiße σ_b; die Spannung im Eisen heiße σ_e (Fig. 180c). Letztere Spannung können wir für den ganzen Eisenquerschnitt zugrunde legen, obgleich ja, streng genommen, auch die Spannungen des Eisens für die einzelnen Fasern desselben etwas voneinander verschieden sein werden. Die Berechnung von σ_b und σ_e in dem betrachteten Querschnitte $\alpha—\beta$ sei unsere nächste Aufgabe.

Aus der Höhe x und der Breite b der Druckzone ergibt sich die Resultierende D der Druckkräfte, ausgedrückt durch die Spannung σ_b:

$$D = \frac{1}{2}\sigma_b \cdot x \cdot b \, .$$

Aus dem Flächeninhalte f_e der Eiseneinlagen und deren Spannung σ_e ergibt sich die gesamte vom Eisen ausgeübte Kraft:

$$Z = \sigma_e \cdot f_e \, .$$

Diese beiden inneren Kräfte D und Z sind also in dem betrachteten Querschnitte wirksam (Fig. 180d), entsprechend den inneren Kräften D und Z bei der allgemeinen Biegungsaufgabe (Fig. 78). Außerdem sind noch Schubspannungen vorhanden nach Art von Fig. 79a; doch wollen wir uns um diese Spannungen jetzt nicht kümmern.

Zur Berechnung von D und Z dienen die Gleichgewichtsbedingungen: (I) $R_x = 0$, (II) $\Sigma M = 0$. (Die Gleichung $R_y = 0$ wäre zur Ermittlung der Schubspannungen zu verwenden.) Als Bezugspunkt für die Momente nehmen wir den Angriffspunkt E der Kraft Z. Dann ergibt sich (Fig. 180d):

$$\text{(I)} \qquad D = Z \, ,$$

$$\text{(II)} \qquad D\left(h - a - \frac{x}{3}\right) = M \, .$$

Digitized by Google

Hierin ist $M = +A \cdot p - P_1 \cdot p_1 - P_2 \cdot p_2$ = Momentensumme der äußeren Kräfte. Drücken wir D und Z durch die Spannungen σ_b und σ_e aus, so folgt:

$$\text{(Ia)} \qquad \frac{1}{2}\sigma_b \cdot x \cdot b = \sigma_e \cdot f_e ,$$

$$\text{(IIa)} \qquad \frac{1}{2}\sigma_b \cdot x \cdot b\left(h - a - \frac{x}{3}\right) = M .$$

In diesen beiden Gleichungen sind die *drei* Unbekannten σ_b, σ_e und x (Lage der Nullinie). Zu deren Bestimmung müssen wir also noch eine dritte Beziehung aufsuchen:

Entsprechend der allgemeinen Biegungslehre machen wir die Annahme, daß die Spannungen im Verhältnisse ihrer Abstände von der Nullinie wachsen. Diese Abstände sind: für die Spannung σ_e der Abstand $h - a - x$, für die Spannung σ_b der Abstand x. Da aber Eisen stets die n-fache Spannung aufnimmt wie Beton, der an seiner Stelle wäre, so schreiben wir

nicht $\quad \sigma_e : \sigma_b = (h - a - x) : x ,$

(III) sondern $\quad \sigma_e : \sigma_b = n(h - a - x) : x .$

Wie gesagt, ist dieses nur eine *Annahme* über das Verhältnis der Spannungen zueinander. Sie gründet sich darauf, daß die Eiseneinlagen dieselben Dehnungen ausführen, wie der Beton in den betreffenden Schichten.

Nun haben wir insgesamt drei Gleichungen zur Ermittlung der drei Unbekannten x, σ_b und σ_e:

$$\text{(Ia)} \qquad \frac{1}{2}\sigma_b \cdot x \cdot b = \sigma_e \cdot f_e ,$$

$$\text{(IIa)} \qquad \frac{1}{2}\sigma_b \cdot x \cdot b\left(h - a - \frac{x}{3}\right) = M ,$$

$$\text{(III)} \qquad \sigma_e = \frac{n(h - a - x)}{x} \cdot \sigma_b .$$

Bei der Auflösung dieser Gleichungen setzen wir den Wert σ_e aus Gleichung (III) in (Ia) ein:

$$\text{(Ib)} \qquad \frac{1}{2}\sigma_b \cdot x \cdot b = \frac{n(h - a - x)}{x} \cdot \sigma_b \cdot f_e ,$$

$$\frac{1}{2}x \cdot b = \frac{n(h - a - x)}{x} \cdot f_e ,$$

$$\frac{1}{2}x^2 b = n f_e (h - a) - n x f_e ,$$

$$x^2 + \frac{2 n f_e}{b} x = \frac{2 n f_e (h - a)}{b} .$$

Digitized by Google

Somit haben wir eine Gleichung erhalten, in der nur die eine Unbekannte x vorkommt. Allerdings ist die Gleichung quadratisch. Ihre Auflösung liefert:

$$x = -\frac{n f_e}{b} \pm \sqrt{\frac{2 n f_e (h-a)}{b} + \left(\frac{n f_e}{b}\right)^2}$$

$$= -\frac{n f_e}{b} \pm \sqrt{\left(\frac{n f_e}{b}\right)^2 \left(\frac{2 b (h-a)}{n f_e} + 1\right)},$$

$$x = -\frac{n f_e}{b} \pm \frac{n f_e}{b} \sqrt{1 + \frac{2 b (h-a)}{n f_e}}.$$

Das negative Vorzeichen der Klammer kommt nicht in Betracht, weil dann der Wert x negativ herauskommen würde. Es ergibt sich also für den Abstand x der Schlußwert:

(IV) $$x = \frac{n f_e}{b}\left[-1 + \sqrt{1 + \frac{2 b (h-a)}{n f_e}}\right].$$

Hiermit ist die Lage der Nullinie bestimmt. Die Formel ist recht unbequem; doch muß mit ihr gearbeitet werden.

Sobald dann x berechnet ist, ergibt sich aus Gleichung (IIa) die Spannung σ_b:

(V) **Betonspannung** $$\sigma_b = \frac{2 M}{b x \left(h - a - \frac{x}{3}\right)}.$$

Die Spannung σ_e läßt sich aus Gleichung (III) oder aus Gleichung (Ia) berechnen, indem man für σ_b den in Formel (V) stehenden Wert einsetzt. Die Gleichung (Ia) liefert:

(VI) **Eisenspannung** $$\sigma_e = \frac{b x}{2 f_e} \sigma_b = \frac{M}{f_e \left(h - a - \frac{x}{3}\right)}.$$

Die obige Formel folgt übrigens auch direkt aus der Gleichgewichtsbedingung, daß die Summe der linksherum zeigenden Momente gleich der Summe der rechtsherum zeigenden ist, indem man den Angriffspunkt von D als Bezugspunkt wählt:

$$Z\left(h - a - \frac{x}{3}\right) = M,$$

$$Z = \sigma_e \cdot f_e = \frac{M}{\left(h - a - \frac{x}{3}\right)},$$

$$\sigma_e = \frac{M}{f_e\left(h - a - \frac{x}{3}\right)}.$$

Digitized by Google

Durch die Formeln (IV)—(VI) haben wir unsere eingangs gestellte Aufgabe, bei einem gegebenen Eisenbetonbalken die Spannungen σ_b und σ_e zu berechnen, gelöst.

b) *Zulässige Werte der Spannungen σ_b und σ_e.*

Leider bestehen über die zulässigen Werte von σ_b und σ_e keine einheitlichen Vorschriften. Für die Ausführung von Hochbauten gelten in Preußen die „Bestimmungen für die Ausführung von Konstruktionen aus Eisenbeton bei Hochbauten vom 24. Mai 1907". (Verlag von Wilhelm Ernst & Sohn.) Diese Bestimmungen schreiben für die Maximalwerte von σ_b und σ_e bei Eisenbetonbalken vor:

$\sigma_{b,\,max} = \frac{1}{6}$ der nachgewiesenen Bruchfestigkeit des Betons gegen Druck,

$\sigma_{e,\,max} = 1000$ kg/qcm.

Hiernach kann man bei gutem Beton einen Grenzwert von

$$\sigma_b = \text{rd. } 40 \text{ kg/qcm}$$

annehmen. (Für Eisenbeton*stützen* gelten andere Werte! s. § 105.)

c) *Beispiele.*

Erstes Beispiel. Ein Eisenbetonbalken habe die Spannweite und Querschnittsabmessungen (Fig. 180a und b):

$$l = 300 \text{ cm}, \quad b = 20{,}0 \text{ cm}, \quad h = 39{,}0 \text{ cm}.$$

Die (in der Zugzone befindlichen) Eiseneinlagen bestehen aus vier Rundeisen von je 1,2 cm ⌀ mit 2,4 cm Schutzschicht. Die Belastung sei gleichmäßig verteilt und betrage $P = 3200$ kg.

Wie groß sind die größten Spannungen im Eisen und im Beton? $\left(\text{Verhältniszahl } n = \frac{E_e}{E_b} = 15.\right)$

Zunächst berechnen wir die Hilfswerte

$$f_e = 4 \cdot \frac{1{,}2^2 \cdot \pi}{4} = 4{,}52 \text{ qcm}; \quad a = 2{,}4 + \frac{1{,}2}{2} = 3{,}0 \text{ cm}; \quad h - a = 36{,}0 \text{ cm}.$$

$$M_{max} = \frac{Pl}{8} = \frac{3200 \cdot 300}{8} = 120000 \text{ cmkg}.$$

Dann ergeben sich der Reihe nach:

$$x = \frac{15 \cdot 4{,}52}{20{,}0}\left[-1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 20{,}0 \cdot 36{,}0}{15 \cdot 4{,}52}}\right]$$

$$= 3{,}39\left[-1 + \sqrt{1 + 21{,}2}\right] = 3{,}39\left[-1 + \sqrt{22{,}2}\right]$$

$$= 3{,}39[-1 + 4{,}71] = 12{,}6 \text{ cm}.$$

Digitized by Google

$$\frac{x}{3} = 4{,}2 \text{ cm}; \qquad h - a - \frac{x}{3} = 36{,}0 - 4{,}2 = 31{,}8 \text{ cm}.$$

$$\sigma_b = \frac{2 \cdot 120000 \text{ cmkg}}{20{,}0 \text{ cm} \cdot 12{,}6 \text{ cm} \cdot 31{,}8 \text{ cm}} = 29{,}9 \text{ kg/qcm}.$$

$$\sigma_e = \frac{120000}{4{,}52 \cdot 31{,}8} = 835 \text{ kg/qcm}.$$

Zweites Beispiel. Eine Eisenbetondecke von $l = 2{,}10$ m Spannweite und $h = 10{,}0$ cm Höhe hat, auf 1,0 m Breite gerechnet, 10 Rundeisen von 8 mm ∅ im Abstande von $a = 1{,}5$ cm. Die Last beträgt $p = 590$ kg pro qm. Wie groß sind σ_b und σ_e in Mitte Spannweite?

Es ist:

$$l = 210 \text{ cm}; \qquad b = 100{,}0 \text{ cm}; \qquad h = 10{,}0 \text{ cm}.$$

$$f_e = 10 \frac{0{,}8^2 \cdot \pi}{4} = 5{,}03 \text{ qcm}; \qquad h - a = 10{,}0 - 1{,}5 = 8{,}5 \text{ cm}.$$

$$P = 590 \cdot 2{,}10 = 1240 \text{ kg}; \qquad M = \frac{1240 \cdot 210}{8} = 32500 \text{ cmkg}.$$

Aus diesen Grundlagen ergeben sich

$$x = \frac{15 \cdot 5{,}03}{100{,}0}\left[-1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 100{,}0 \cdot 8{,}5}{15 \cdot 5{,}03}}\right] = 2{,}9 \text{ cm},$$

$$h - a - \frac{x}{3} = 8{,}5 - 0{,}97 = 7{,}53 \text{ cm};$$

$$\sigma_b = \frac{2 \cdot 32500}{100{,}0 \cdot 2{,}9 \cdot 7{,}53} = 29{,}8 \text{ kg/qcm},$$

$$\sigma_e = \frac{32500}{5{,}03 \cdot 7{,}53} = 860 \text{ kg/qcm}.$$

d) Mittel zur Herabminderung der Spannungen σ_b und σ_e.

Ergeben sich bei einem Entwurfe zu große Werte von σ_b oder σ_e, so wird man zunächst daran denken, die Höhe h des Balkens zu vergrößern. Aber auch die Vergrößerung des Eisenquerschnittes f_e dient zur Verminderung von σ_b und σ_e. Man kann also zwei Mittel anwenden. Ist der Beton billig, so nehme man reichlich Höhe und Breite, um hierdurch Eisen zu sparen (selbst wenn der Beton nicht bis zum zulässigen Werte ausgenutzt wird). Bei teurem Beton dagegen nehme man reichlicher Eisen.

Digitized by Google

III. Die Schubspannungen τ_0 im Beton.

a) Ableitung der Formel für τ_0.

Die Spannungen σ_b und σ_e treten in Schnitten *rechtwinklig* zur Stabachse auf. Nun zeigt aber die Erfahrung, daß, sobald Betonkonstruktionen sich zu stark durchbiegen, häufig ein horizontaler Längsriß (parallel der Stabachse) entsteht. Es bildet sich dann eine annähernd horizontal verlaufende Bruchfuge. Aus diesem Grunde ist es nötig, auch Horizontalschnitte des Balkens hinsichtlich der auftretenden Spannungen zu untersuchen. (Vgl. die sehr ähnliche in § 78 durchgeführte Untersuchung.)

Bei dem in Fig. 181 gezeichneten Balken wollen wir die auf ein Stück $\alpha NN'\beta$ wirkenden Kräfte betrachten. Dieses Stück erstrecke sich auf eine Länge Δx und in der Höhe von der äußersten Druckfaser bis zur Nullinie. Auf die Fläche αN wirken die vom Teile I auf den Teil II ausgeübten inneren Kräfte. Die Resultierende D dieser Kräfte ist im vorigen Absatz dieses Paragraphen bestimmt: Ist M die Momentensumme des Balkens für den Schnitt α, so folgt D aus der Momentengleichung für den Punkt E [s. Gleichung (II) in Absatz II, Fig. 180d]:

$$D\left(h - a - \frac{x}{3}\right) = M;$$

also

$$\text{(I)} \qquad D = \frac{M}{\left(h - a - \frac{x}{3}\right)}.$$

Dieses ist also die Kraft, mit der die Balkenteile gegeneinander drücken.

Entsprechend ergibt sich die Kraft D', die der Balkenteil III auf den Teil II ausübt: Ist M' das Moment an dem Schnitte β, so ist

$$\text{(II)} \qquad D' = \frac{M'}{\left(h - a - \frac{x}{3}\right)}.$$

Da M und M' im allgemeinen voneinander verschieden sind, so sind auch D und D' verschieden groß.

In Fig. 181c ist das Balkenstück $\alpha NN'\beta$ mit diesen beiden Kräften D und D' getrennt herausgezeichnet. Nun erkennt man folgendes: Da einerseits die beiden Kräfte D und D' voneinander verschieden sind, andererseits aber das Stück $\alpha NN'\beta$ trotzdem innerhalb des Gesamtbalkens im Ruhezustand bleibt, so muß

Digitized by Google

außer diesen Kräften D und D' noch eine weitere horizontale Kraft wirksam sein, die dem Unterschied von D und D' das Gleichgewicht hält. Diese Kraft kann nur in der horizontalen Fläche NN' vorhanden sein, da diese die einzige noch nicht untersuchte Fläche ist, in der das Stück $\alpha NN'\beta$ mit dem übrigen Körper in Berührung steht. In dieser Fläche NN' muß also eine Kraft

$$T_w = D' - D$$

vorhanden sein. Somit haben wir aus der Tatsache des Gleichgewichtszustandes des betrachteten Balkenstückes das Vorhandensein und die Größe dieser Kraft T_w theoretisch hergeleitet. Praktisch macht sich die Existenz der Kraft T_w dadurch bemerkbar, daß in der Tat bei Betonkörpern horizontale Bruchfugen auftreten, indem bei zu starker Belastung der obere Teil sich gegen den unteren verschiebt. Namentlich bei gewissen Konstruktionen (Plattenbalken, § 104) kann diese Art von Zerstörung leicht eintreten.

Zur bequemeren Berechnung von T_w setzen wir für D und D' ihre Werte ein und erhalten:

$$\text{(III)} \quad \begin{cases} T_w = \dfrac{M'}{\left(h - a - \dfrac{x}{3}\right)} - \dfrac{M}{\left(h - a - \dfrac{x}{3}\right)} \\ \quad = \dfrac{M' - M}{\left(h - a - \dfrac{x}{3}\right)}. \end{cases}$$

Nun ist aber bei jedem Träger der Unterschied der Momentensummen zweier aufeinanderfolgenden Querschnitte gleich der Kraftsumme an dieser Stelle mal dem Abstand der beiden Querschnitte (§ 57, I). Bezeichnen wir die Querkraft an der betrachteten Stelle des Balkens mit Q, so können wir also die obige Formel auch schreiben:

$$\text{(IV)} \qquad T_w = \frac{Q \cdot \Delta x}{\left(h - a - \dfrac{x}{3}\right)}.$$

Um hieraus einen Einblick in die Beanspruchung des Materials zu erhalten, müssen wir diese Kraft T_w noch auf die Beanspruchung pro Flächeneinheit (qcm) umrechnen. Bei einer Breite b des Balkens verteilt sich die Kraft T_w auf die Fläche $b \cdot \Delta x$. Allerdings wird diese Verteilung durchaus nicht gleichmäßig sein. Trotzdem rechnet man aber im Betonbau diese horizontale Be-

Digitized by Google

anspruchung so, als ob jedes Teilchen der Fläche $b \cdot \Delta x$ gleichviel von der Gesamtkraft T_w aufnimmt, gleichgültig, ob es am Rande oder im Innern des Balkens liegt. (Eine Untersuchung hinsichtlich des genauen Verteilungsgesetzes ist beim Eisenbetonbalken aussichtslos.) Man nennt diese horizontale, auf die *Flächeneinheit*

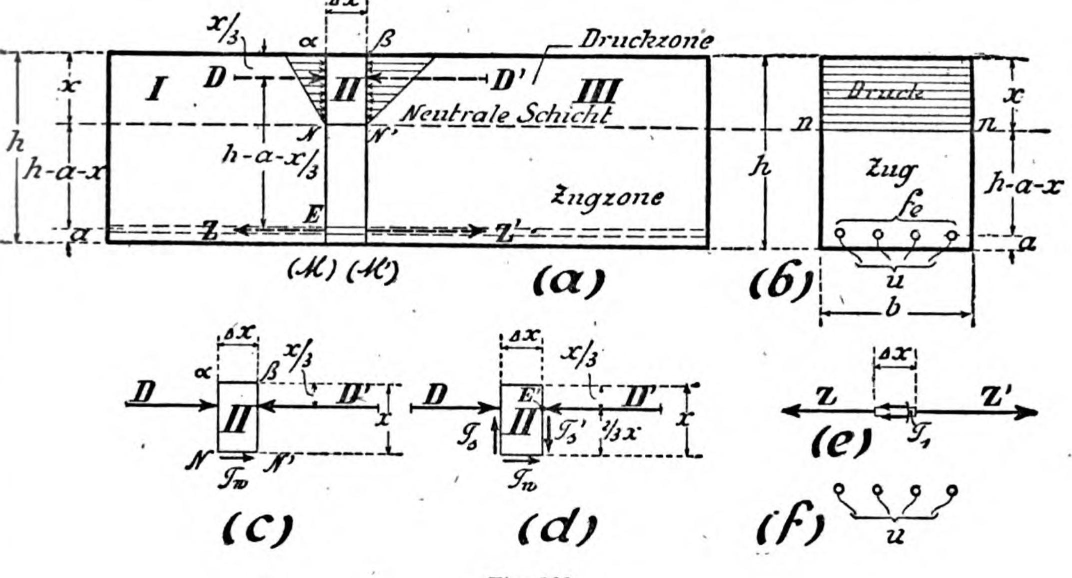


Fig. 181.

entfallende Beanspruchung die „horizontale Schubspannung τ_0" des Betons. Sie ergibt sich aus Formel (IV):

$$\tau_0 = \frac{Q \cdot \Delta x}{\left(h - a - \frac{x}{3}\right) b \cdot \Delta x}$$

(V) $$\boxed{\textbf{Schubspannung } \tau_0 = \frac{Q}{b\left(h - a - \frac{x}{3}\right)}}.$$

Hiermit ist auch die Beanspruchung der horizontalen Schnittflächen untersucht.

Zusatz 1: Nicht nur in der Fläche NN', sondern auch in anderen horizontalen Schnitten treten Schubspannungen auf. Für die Schicht NN' sind sie jedoch am größten; denn das über dieser Schicht befindliche Balkenstück $\alpha NN'\beta$ hat das gesamte Druck-

Digitized by Google

dreieck aufzunehmen, so daß die auf ein Verschieben hinzielende Differenz $D' - D$ der Horizontalkräfte am größten wird.

Zusatz 2: Die drei Kräfte D, D' und T_w in Fig. 181c erfüllen zwar die Bedingung, daß die Summe sämtlicher Horizontalprojektionen gleich Null sein muß, aber noch nicht die Bedingung $\Sigma M = 0$. Dieser Mangel weist darauf hin, daß noch weitere Kräfte vorhanden sein müssen. (Denn das Balkenstück führt doch keine Bewegung aus!) In der Tat wirken noch die *vertikalen* Schubkräfte T_s und T_s' (Fig. 181d). Letztere bestimmen sich aus den Gleichgewichtsbedingungen $R_y = 0$ und $\Sigma M = 0$. Für den einfachen Fall, daß innerhalb der Strecke Δx keine Last steht, lauten dann die Bedingungen (Punkt E' als Bezugspunkt genommen):

$$T_s = T_s',$$

$$T_s \cdot \Delta x = T_w \cdot \frac{2}{3} x = \frac{Q \cdot \Delta x}{\left(h - a - \frac{x}{3}\right)} \cdot \frac{2}{3} x.$$

Hieraus

$$\text{(VI)} \qquad T_s = T_s' = \frac{2}{3} \frac{Q \cdot x}{\left(h - a - \frac{x}{3}\right)}.$$

Jetzt erst, nach Hinzufügung der beiden Kräfte T_s und T_s', ist das betrachtete Balkenstück so weit, daß sämtliche drei Gleichgewichtsbedingungen erfüllt sind. (S. Fig. 181d!) Erfahrungsgemäß sind jedoch die vertikalen Schubkräfte von untergeordneter Bedeutung, so daß die betreffenden Beanspruchungen pro Flächeneinheit nicht untersucht zu werden brauchen.

b) Zulässiger Wert der Schubspannung τ_0.

Als größten zulässigen Wert für die Schubspannung τ_0 schreiben die preußischen Vorschriften für Betonhochbauten vor:

$\tau_{0,\max} = 4{,}5$ kg/qcm,

bzw. $= \frac{1}{5}$ der nachgewiesenen Bruchfestigkeit gegen Schub.

Da man die Bruchfestigkeit eines Betonkörpers gegen Schubbeanspruchung selten untersucht, so rechnet man allgemein mit dem Werte von 4,5 kg/qcm.

c) Beispiele.

Erstes Beispiel. Bei dem im vorigen Absatze untersuchten Eisenbetonbalken („Erstes Beispiel“, S. 629) ist die größte Schubspannung des Betons zu bestimmen!

Digitized by Google

Die größte Querkraft Q dieses Balkens ist (am Auflager):

$$Q = A = \frac{1}{2} 3200 = 1600 \text{ kg}.$$

Ferner hatten wir bereits den Abstand der Nullinie berechnet:

$$x = 12{,}6 \text{ cm}; \quad h - a - \frac{x}{3} = 31{,}8 \text{ cm}.$$

Hidraus ergibt sich:

$$\tau_0 = \frac{Q}{b\left(h - a - \frac{x}{3}\right)} = \frac{1600}{20{,}0 \cdot 31{,}8}$$

$$= 2{,}5 \text{ kg/qcm}.$$

Die Beanspruchung bleibt also unter der zulässigen von 4,5 kg/qcm.

Zweites Beispiel. Bei der im Absatze II dieses Paragraphen untersuchten Eisenbetondecke ist die größte Schubspannung des Betons zu berechnen!

Lösung:

$$\tau_0 = \frac{620}{100{,}0 \cdot 7{,}53} = 0{,}8 \text{ kg/qcm}.$$

d) Mittel zur Herabminderung der Schubspannung τ_0.

Nicht immer fallen diese Schubspannungen τ_0 so gering aus, wie in den obigen zwei Beispielen. Dann hat man hauptsächlich zwei Mittel, um die Beanspruchung des Materials zu vermindern.

α) Aufbiegen der Eiseneinlagen an den Enden (Fig. 182). Da an den Balkenenden die Momentensumme M und also auch die Beanspruchung der Eiseneinlagen sehr gering ist, kann man einige derselben aufbiegen und aus der Zugzone in die Druckzone überführen. Hierdurch entsteht eine gute Verbindung des über der Nullinie liegenden Betons mit dem unterhalb der Nullinie befindlichen, so daß ein gegenseitiges Verschieben der beiden Teile in horizontaler Richtung verhindert wird.

Die Beanspruchung der aufgebogenen Eiseneinlagen pflegt man folgendermaßen darzustellen: Da die Schubspannungen τ_0 direkt proportional den Kraftsummen Q sind, so sind sie, wie diese, am Auflager am größten, und nehmen von hier aus nach der Mitte Spannweite ab. Der Einfachheit wegen setzen wir voraus, daß sie *gleichmäßig* von den Balkenenden nach der Balkenmitte abnehmen. Trägt man die Werte τ_0 für die verschiedenen Stellen des Balkens zeichnerisch auf, so bekommt man nach dieser Annahme die in Fig. 182c gezeichnete Fläche. (Nur bei gleich mäßig verteilter, ständiger Belastung ist diese Darstellung *genau*

Digitized by Google

richtig, da nur in diesem Falle die Querkraftfläche ebenfalls durch eine gerade Linie begrenzt ist; vgl. Fig. 96.)

Zunächst ergibt sich jetzt die Stelle, an der die Schubspannung den zulässigen Wert von 4,5 kg/qcm gerade erreicht. Bezeichnet man die Schubspannung am Auflager mit τ_0 (größer als 4,5), so finden wir jene Stelle aus den ähnlichen Dreiecken in Fig. 182c:

$$(\tau_0 - 4{,}5) : c = \tau_0 : \frac{l}{2},$$

$$\text{(VII)} \qquad c = \frac{\tau_0 - 4{,}5}{\tau_0} \cdot \frac{l}{2}.$$

Innerhalb der Strecken c in Fig. 182 muß also für eine Verbindung der Druckzone mit der Zugzone des Balkens gesorgt werden, da sonst ein gegenseitiges Verschieben der beiden Zonen zu befürchten ist. Nimmt man an, daß innerhalb dieser Längen c der vom Beton aufgenommene Anteil der Schubspannungen gerade 4,5 kg/qcm beträgt, so müßte der Rest von den aufgebogenen Eisen übertragen werden. Dieser Rest ist aber in Fig. 182c durch das schraffierte Dreieck dargestellt. Dessen Inhalt, multipliziert mit der Breite b des Balkens, gibt also den Teil der Schubkraft an, den der Beton nicht mehr aufnehmen kann, bzw. soll, und der mithin dem Eisen zuzuweisen ist. Dieser Teil werde mit T'_w bezeichnet. Er beträgt somit

$$T'_w = \frac{1}{2}(\tau_0 - 4{,}5)\, c \cdot b\,.$$

Die, unter einem Winkel von rund 45° abgebogenen, Eisen müssen also eine horizontale Seitenkraft gleich diesem Werte T'_w liefern. Bezeichnen wir die gesamte von den Eisen ausgeübte Kraft mit Z, so ist demnach:

$$Z \cdot \cos 45° = T'_w = \frac{1}{2}(\tau_0 - 4{,}5)\, c \cdot b\,,$$

$$Z = \frac{1}{2}\,\frac{(\tau_0 - 4{,}5)\, c \cdot b}{0{,}707}\,,$$

$$\text{(VII)} \qquad Z = 0{,}707\,(\tau_0 - 4{,}5)\, c \cdot b\,.$$

Werden mehrere Eisen aufgebogen, so verteilt sich diese Kraft Z auf die Anzahl der betreffenden Eisen. Man wird dann das erste Eisen so aufbiegen, daß es ungefähr im Punkte C durch die neutrale Schicht des Balkens hindurchgeht. Die anderen Eisen verteilt man innerhalb der Strecke c, und zwar derart, daß sie nach dem Auflager zu am nächsten beieinander stehen (entsprechend dem Anwachsen der Schubkräfte). Eine genauere Verteilung dieser

Digitized by Google

Eisen, etwa so, daß das aufzunehmende Schubkraftdreieck in eine Anzahl inhaltsgleicher Streifen geteilt und dann jedem Eisen ein Streifen zugewiesen wird, erscheint aber als übertriebene Sorgfalt. Sie verleiht der ganzen Rechnung einen Anstrich von Sicherheit, der ihr, mit Rücksicht auf die ganz willkürlichen Annahmen, absolut nicht zuzusprechen ist. (Aus welchem Grunde soll der Beton denn gerade die 4,5 kg/qcm Schubspannung aufnehmen, die wir ihm gern zuweisen möchten?!)

Hinsichtlich der Richtung der Aufbiegungen merke man, daß in der Richtung, in der die Momente wachsen, die Eisen aus der Druckzone in die Zugzone schräg übergehen müssen.

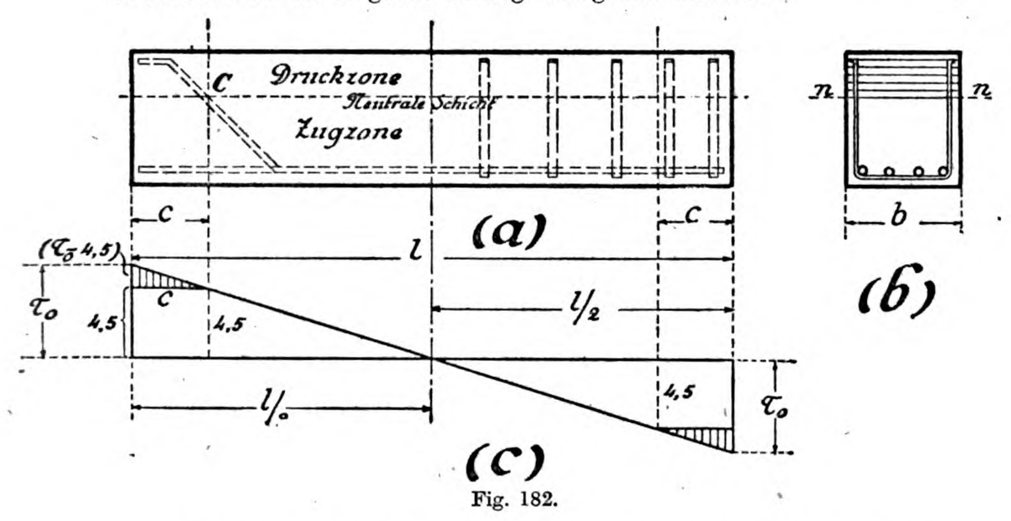


Fig. 182.

β) *Einlegen von Bügeln.* Ein zweites Mittel, um ein Abscheren des Betons zu verhindern, ist das Einlegen von Bügeln (Fig. 182a, rechte Seite). Die von den Bügeln aufzunehmende horizontale Schubkraft berechnet sich, wie vorhin, zu:

$$T'_w = \frac{1}{2}(\tau_0 - 4{,}5)\, c\, b\,,$$

worin c durch die Formel gegeben ist:

$$c = \frac{\tau_0 - 4{,}5}{\tau_0} \cdot \frac{l}{2}\,.$$

Beträgt die innerhalb einer Strecke c befindliche Anzahl der Bügel n, so entfällt auf jeden derselben eine horizontale Kraft gleich $\frac{1}{n} T'_w$. Diese Kraft $\frac{1}{n} T'_w$ beansprucht jeden Bügel in dem Querschnitte,

Digitized by Google

der innerhalb der neutralen Balkenschicht liegt, auf Abscheren. Man erhält also die Scherbeanspruchung eines Bügels, indem man die aufzunehmende Kraft $\frac{1}{n} T'_w$ durch die vorhandene Scherfläche dividiert. (Zulässige Scherspannung für Eisen: 800 kg/qcm). Diese ganze Berechnung ist aber ebenfalls sehr unsicher, da die Bügel außerdem auf Abbiegen und Zerreißen beansprucht sind. In der Nähe der Balkenenden setzt man die Bügel natürlich am dichtesten beieinander. Um den Eiseneinlagen einen Halt zu geben, legt man, in größeren Abständen, auch im mittleren Teile der Spannweite Bügel ein. Hierdurch werden auch die bei eventueller einseitiger Belastung des Balkens entstehenden Querkräfte des mittleren Teiles unschädlich gemacht.

IV. Die Haftspannungen τ_1 der Eiseneinlagen.

a) Berechnung der Spannungen τ_1.

Betrachten wir in Fig. 181a das zwischen den Schnitten α und β befindliche Stück der Eiseneinlagen. Auf die Endflächen dieses Stückes wirken von den anschließenden Teilen die inneren Kräfte Z und Z'. Die Momente für die Schnitte α und β hatten wir mit M und M' und die Querkraft an dieser Stelle mit Q bezeichnet. Dann ist

$$\text{(I)} \qquad Z = \frac{M}{\left(h - a - \frac{x}{3}\right)}; \qquad Z' = \frac{M'}{\left(h - a - \frac{x}{3}\right)};$$

$$\text{(II)} \qquad Z' - Z = \frac{M' - M}{\left(h - a - \frac{x}{3}\right)} = \frac{Q \cdot \Delta x}{\left(h - a - \frac{x}{3}\right)}.$$

(Vgl. die genau entsprechende Ableitung bei den Schubspannungen τ_0!) Das betrachtete Stück der Eiseneinlage stellt also einen Stab von der Länge Δx dar, auf dessen Endflächen die beiden verschieden großen Kräfte Z' und Z wirken (Fig. 181a und e). Aus der Tatsache, daß dieser Körper trotzdem eine Ruhelage einnimmt, folgt, daß der umschließende Beton eine ebenfalls horizontal gerichtete Kraft ausübt, die der Differenz $Z' - Z$ das Gleichgewicht hält. Dieses ist die „Haftkraft" T_1, die im durchgebogenen (gespannten) Zustande des Balkens zwischen Eisen und umschließenden Beton besteht. Es ist also

$$\text{(III)} \qquad T_1 = Z' - Z = \frac{Q \cdot \Delta x}{\left(h - a - \frac{x}{3}\right)}.$$

Digitized by Google

Bezeichnen wir nun den Umfang des Eisenquerschnittes mit „u“, so dient zur Aufnahme dieser Haftkraft T_1 eine Haftfläche (Berührungsfläche) zwischen Eisen und Beton von der Größe $u \cdot \Delta x$. Auf die Flächeneinheit dieser gesamten Haftfläche entfällt somit ein Betrag:

$$\tau_1 = \frac{T_1}{u \cdot \Delta x} = \frac{Q \cdot \Delta x}{\left(h - a - \frac{x}{3}\right) u \cdot \Delta x} = \frac{Q}{u\left(h - a - \frac{x}{3}\right)}.$$

Mit dieser Kraft pro Flächeneinheit (Quadratzentimeter) müssen also Eisen und Beton aneinander haften. Die Formel für τ_1 unterscheidet sich von der Formel für die Schubspannung τ_0 nur dadurch, daß im Nenner statt der Balkenbreite b der Umfang u der Eiseneinlagen steht. Man schreibt deshalb die obige Formel auch in der Form:

$$\textbf{Haftspannung } \tau_1 = \frac{Q}{u\left(h - a - \frac{x}{3}\right)} = \frac{\tau_0 \cdot b}{u}.$$

b) Zulässiger Wert von τ_1.

Die zulässige Haftspannung zwischen Eisen und Beton ist gleich der zulässigen Schubspannung des Betons (4,5 kg/qcm). Die Haftspannungen sind stets rechnerisch nachzuweisen!

c) Beispiele.

Erstes Beispiel. Bei dem im II. Absatze dieses Paragraphen untersuchten Betonbalken (S. 629) ist die größte Haftspannung zu bestimmen!

Es war $b = 20{,}0$ cm. Die Schubspannung τ_0 hatten wir bereits im vorigen Absatze berechnet zu 2,5 kg/qcm. Der Umfang der Eiseneinlagen (vier Rundeisen von 1,2 cm ∅) ist:

$$u = 4 \cdot 1{,}2 \cdot \pi = 15{,}1 \text{ cm}.$$

Somit wird die Haftspannung:

$$\tau_1 = \frac{2{,}5 \cdot 20{,}0}{15{,}1} = 3{,}3 \text{ kg/qcm}.$$

Zweites Beispiel. Bei der im II. Absatze dieses Paragraphen untersuchten Eisenbetondecke (S. 630) ist die größte Haftspannung zu bestimmen!

Es ist:

$$b = 100{,}0 \text{ cm}; \quad \tau_0 = 0{,}8 \text{ kg/qcm (s. Absatz III)};$$
$$u = 10 \cdot 0{,}8 \cdot \pi = 25{,}2 \text{ cm}.$$

Digitized by Google

Hieraus folgt:

$$\tau_1 = \frac{0,8 \cdot 100}{25,2} = 3,2 \text{ kg/qcm.}$$

d) Mittel bei zu großen Haftspannungen τ_1.

Zu große Haftspannungen sind sehr gefährlich, da sich dann leicht die Eiseneinlagen gegen den Beton verrücken, wodurch aus dem Eisenbetonbalken ein einfacher Betonbalken (ohne wirksame Armierung) entstehen würde. Ein Mittel, um die Haftspannung zu verkleinern, besteht darin, daß an Stelle einer starken Eiseneinlage mehrere dünnere Eisen mit demselben Gesamtquerschnitt gewählt werden. Das Gewicht des eingebauten Eisens wird hierdurch nicht vergrößert, wohl aber der Umfang u und somit die vorhandene Haftfläche.

Zur Festhaltung der Eisen im Beton sollen bei Drahteinlagen die Enden stets umgebogen werden! Auch das Überführen der Einlagen an den Balkenenden aus der Zugzone in die Druckzone und Umbiegen daselbst hat sich als gutes Mittel zur Sicherung der Lage erwiesen. Namentlich mögen die Erfinder von neuen Eisenbetonkonstruktionen beachten, daß eine Anordnung um so besser ist, je sicherer die Einlagen im Beton sitzen. In dieser Hinsicht sind die Konstruktionen, bei denen die Eisen durch ihre besondere Form, durch Schlaufen, durch aufgenietete Winkeleisen u. dgl. unlösbar mit dem Beton verbunden sind, den Anordnungen mit glatten Einlagen entschieden überlegen.

§ 103.

Hilfstabellen zur Berechnung der Spannungen und zur Dimensionierung.

Die wichtigste Untersuchung ist natürlich die der Spannungen σ_b und σ_e. Um die Rechenarbeit zu erleichtern, hat man Tabellen aufgestellt, aus denen sich die gesuchten Größen leicht entnehmen lassen. Hierbei sind die beiden Aufgaben unterschieden: I. Bei einem Eisenbetonträger sind die Abmessungen gegeben, bzw. angenommen; wie groß sind die auftretenden Spannungen? II. Bei einem Träger sind die Spannungen vorgeschrieben; wie groß sind seine Abmessungen zu wählen?

I. Ermittlung der Spannungen bei gegebenen Abmessungen.

Der im vorigen Paragraphen abgeleitete Rechnungsgang war folgender: Aus

Digitized by Google

Höhe h, Breite b des Balkens,

Eisenquerschnitt f_e, Abstand a desselben von Unterkante,

Verhältniszahl n (= 15) der Elastizitätsmodul E_e und E_b bestimmen wir zunächst den Abstand der Nullinie (neutralen Schicht) von der äußersten Druckschicht:

$$x = \frac{n \cdot f_e}{b}\left[-1 + \sqrt{1 + \frac{2b(h-a)}{n \cdot f_e}}\right].$$

Aus diesem Werte und der Momentensumme M der betreffenden Balkenstelle folgen dann die Spannungen:

$$\sigma_b = \frac{2M}{b \cdot x\left(h - a - \frac{x}{3}\right)}; \qquad \sigma_e = \frac{M}{f_e\left(h - a - \frac{x}{3}\right)}.$$

Zur Erleichterung der Rechnung wollen wir zunächst aus b, h, a und f_e einen Hilfswert „m" einführen, nämlich den Bruch

$$\boxed{m = \frac{b(h-a)}{f_e}.}$$

Drücken wir dann durch diesen Hilfswert m den Eisenquerschnitt f_e in der Form aus:

$$f_e = \frac{b(h-a)}{m},$$

und setzen ferner für n den Wert 15 ein, so läßt sich der für x aufgestellte Ausdruck umformen in:

$$x = \frac{15\,b(h-a)}{m \cdot b}\left[-1 + \sqrt{1 + \frac{2m}{15}}\right]$$

$$= \frac{15(h-a)}{m}\left[-1 + \sqrt{1 + \frac{2m}{15}}\right].$$

Man ersieht aus dieser Form, daß für die verschiedenen Werte des Bruches m der Abstand x direkt durch die Höhe $(h-a)$ ausgedrückt werden kann. In der folgenden Tabelle ist die Ausrechnung der obigen Formel für eine Anzahl von Werten m durchgeführt, so daß der Abstand x als Bruchteil von $(h-a)$ abzulesen ist.

Aber auch die Spannungen σ_e und σ_b lassen sich in dieser Weise darstellen. Setzt man den obigen Wert von x in die Formeln von σ_b und σ_e ein, so ergeben sich Ausdrücke, in denen außer Zahlen nur das Moment M, die Breite b, die Höhe $(h-a)$ und der Koeffizient m vorkommen. (Man stelle diese Ausdrücke selber auf!) Hieraus lassen sich dann σ_b und σ_e für die verschiedenen

Digitized by Google

Werte von m durch M und $(h-a)$ darstellen, wie es in der folgenden Tabelle geschehen ist. Am wichtigsten sind natürlich die beiden letzten Spalten der Tabelle. Man beachte auch, daß, sobald σ_b berechnet ist, σ_e direkt als Vielfaches von σ_b gefunden wird.

Tabelle I.

Werte von m $\left[=\frac{b(h-a)}{f_e}\right]$	Hierzu gehörige Werte		
	x	σ_b	σ_e
100	$0{,}418(h-a)$	$5{,}559\frac{M}{b(h-a)^2}$	$116\frac{M}{b(h-a)^2}=20{,}867\cdot\sigma_b$
110	$0{,}403(h-a)$	$5{,}735\frac{M}{b(h-a)^2}$	$127\frac{M}{b(h-a)^2}=22{,}145\cdot\sigma_b$
120	$0{,}391(h-a)$	$5{,}895\frac{M}{b(h-a)^2}$	$138\frac{M}{b(h-a)^2}=23{,}409\cdot\sigma_b$
130	$0{,}379(h-a)$	$6{,}040\frac{M}{b(h-a)^2}$	$149\frac{M}{b(h-a)^2}=24{,}668\cdot\sigma_b$
140	$0{,}368(h-a)$	$6{,}194\frac{M}{b(h-a)^2}$	$160\frac{M}{b(h-a)^2}=25{,}831\cdot\sigma_b$
150	$0{,}358(h-a)$	$6{,}344\frac{M}{b(h-a)^2}$	$170\frac{M}{b(h-a)^2}=26{,}797\cdot\sigma_b$
160	$0{,}349(h-a)$	$6{,}485\frac{M}{b(h-a)^2}$	$181\frac{M}{b(h-a)^2}=27{,}911\cdot\sigma_b$
170	$0{,}341(h-a)$	$6{,}617\frac{M}{b(h-a)^2}$	$192\frac{M}{b(h-a)^2}=29{,}016\cdot\sigma_b$
180	$0{,}333(h-a)$	$6{,}756\frac{M}{b(h-a)^2}$	$203\frac{M}{b(h-a)^2}=30{,}049\cdot\sigma_b$
190	$0{,}326(h-a)$	$6{,}883\frac{M}{b(h-a)^2}$	$213\frac{M}{b(h-a)^2}=30{,}946\cdot\sigma_b$
200	$0{,}320(h-a)$	$7{,}000\frac{M}{b(h-a)^2}$	$224\frac{M}{b(h-a)^2}=32{,}000\cdot\sigma_b$

Erstes Beispiel. Der im vorigen Paragraphen mehrfach untersuchte Eisenbetonträger ist mittels Tabellen zu berechnen!

Es war

$b=20{,}0$ cm, $h-a=36{,}0$ cm, $f_e=4{,}52$ qcm, $M=120000$ cmkg.

Digitized by Google

Zunächst bestimmen wir den Faktor

$$m = \frac{20{,}0 \cdot 36{,}0}{4{,}52} = \text{rd. } 160 .$$

Dann liefert die Tabelle (neben $m = 160$):

$$\sigma_b = 6{,}485 \frac{120000}{20{,}0 \cdot 36{,}0^2} = 30 \text{ kg/qcm},$$

$$\sigma_e = 27{,}911 \cdot 30 = 837 \text{ kg/qcm}.$$

Zweites Beispiel. Die im vorigen Paragraphen untersuchte Betondecke ist mittels Tabellen zu berechnen!

Die nötigen Angaben sind:

$b = 100{,}0$ cm, $h - a = 8{,}5$ cm, $f_e = 5{,}03$ qcm, $M = 32500$ cmkg.

Hieraus folgt der Hilfswert:

$$m = \frac{100{,}0 \cdot 8{,}5}{5{,}03} = 169 .$$

In der Tabelle stehen nur die zu $m = 160$ und $m = 170$ gehörigen Faktoren. Um die zu $m = 169$ gehörigen Werte zu erhalten, schalten wir zwischen $m = 160$ und $m = 170$ geradlinig ein; d. h. wir nehmen den zu $m = 170$ gehörigen Faktor und ziehen davon $\frac{1}{10}$ der Differenz zwischen den beiden aufeinander folgenden Faktoren ab. Hiernach ergibt sich:

$$\sigma_b = \left[6{,}617 - \frac{1}{10}(6{,}617 - 6{,}485)\right] \frac{M}{b(h-a)^2}$$

$$= 6{,}604 \frac{32500}{100{,}0 \cdot 8{,}5^2} = 29{,}7 \text{ kg/qcm},$$

$$\sigma_e = (29{,}016 - 0{,}111)\, 29{,}7 = 858 \text{ kg/qcm}.$$

II. Ermittlung der Abmessungen bei vorgeschriebenen Spannungen.

Meistens liegt ja in der Praxis der Fall vor, daß man die zulässigen Spannungen von Beton und Eisen möglichst ausnützen will und nun die Abmessungen sucht, die der Balken erhalten muß, damit jene Spannungen nicht überschritten werden. Die Breite b des Balkens und den Abstand a der Einlagen wird man von vornherein annehmen. Es sind dann also ferner gegeben σ_b und σ_e, und gesucht sind die Höhe h und der Eisenquerschnitt f_e.

Zwischen den Werten σ_b, σ_e und x besteht die Gleichung (s. § 102)

$$\sigma_e : \sigma_b = n(h - a - x) : x .$$

(Grundlegende Annahme zur Berechnung von Eisenbetonkonstruktionen.) Durch Ausmultiplizieren folgt:

Digitized by Google

$$\sigma_e \cdot x = n \cdot \sigma_b(h - a - x) = n \cdot \sigma_b(h - a) - n \cdot \sigma_b \cdot x\,,$$

$$x = \frac{n \cdot \sigma_b(h - a)}{\sigma_e + n \cdot \sigma_b}\,.$$

Somit ist zunächst x durch σ_b, σ_e und $(h - a)$ ausgedrückt.

Nun setzen wir diesen Ausdruck von x in die Formeln von σ_b und σ_e ein, und erhalten:

$$\sigma_b = \frac{2\,M}{b\,\frac{n\,\sigma_b(h-a)}{\sigma_e + n\,\sigma_b}\left[h - a - \frac{1}{3}\,\frac{n\,\sigma_b(h-a)}{\sigma_e + n\,\sigma_b}\right]}$$

$$= \frac{2\,M}{(h-a)\,\frac{b \cdot n \cdot \sigma_b}{\sigma_e + n\,\sigma_b} \cdot (h-a)\left[1 - \frac{1}{3}\,\frac{n\,\sigma_b}{\sigma_e + n\,\sigma_b}\right]}$$

$$= \frac{2\,M}{(h-a)^2\,\frac{b \cdot n \cdot \sigma_b}{\sigma_e + n\,\sigma_b}\left[1 - \frac{n\,\sigma_b}{3(\sigma_e + n\,\sigma_b)}\right]}\,.$$

Aus dieser Formel folgt $(h - a)$:

$$(h-a)^2 = \frac{2\,M}{\frac{\sigma_b \cdot b \cdot n \cdot \sigma_b}{\sigma_e + n\,\sigma_b}\left[1 - \frac{n\,\sigma_b}{3(\sigma_e + n\,\sigma_b)}\right]}\,,$$

$$h - a = \sqrt{\frac{2}{\left[1 - \frac{n\,\sigma_b}{3(\sigma_e + n\,\sigma_b)}\right]\frac{n\,\sigma_b}{\sigma_e + n\,\sigma_b} \cdot \sigma_b}} \cdot \sqrt{\frac{M}{b}}\,.$$

Diese Formel läßt sich nun in folgender Weise zur Berechnung von $(h - a)$ verwenden. Unter dem ersten Wurzelzeichen stehen nur *bekannte* Größen. Denn n ist gegeben, und σ_b und σ_e sind vorgeschrieben. Man kann also diese Wurzel für verschiedene Werte von σ_b und σ_e ein für allemal berechnen. Sobald dieses geschehen ist, ergibt sich $(h - a)$ durch die Formel:

$$h - a = r \cdot \sqrt{\frac{M}{b}}\,,$$

worin r der vorhin berechnete Wurzelwert ist. Auf diese Weise läßt sich die erforderliche Höhe des Balkens direkt aus den vorgeschriebenen Spannungen ermitteln. Leider ist die Formel so unbequem, daß man sie ohne Hilfe von Tabellen kaum benutzen kann.

In derselben Art läßt sich für den erforderlichen Eisenquerschnitt ein Ausdruck aufstellen, der die Form hat:

$$f_e = t \cdot \sqrt{M \cdot b}\,.$$

Der Faktor t ist ebenso kompliziert wie der vorige Faktor r und muß in Tabellen berechnet werden.

Digitized by Google

Tabelle II.

Vorgeschriebene Spannungen (in kg/qcm)		Dann ist der Abstand x (cm)	Erforderlich sind	
σ_e	σ_b		Höhe $(h-a)$ (cm)	Eisenquerschnitt f_e (qcm)
1000	45	$0{,}403(h-a)$	$0{,}357\sqrt{\frac{M}{b}}$	$0{,}00324\sqrt{M\cdot b}$
1000	44	$0{,}398(h-a)$	$0{,}363\sqrt{\frac{M}{b}}$	$0{,}00317\sqrt{M\cdot b}$
1000	42	$0{,}387(h-a)$	$0{,}376\sqrt{\frac{M}{b}}$	$0{,}00306\sqrt{M\cdot b}$
1000	40	$0{,}375(h-a)$	$0{,}390\sqrt{\frac{M}{b}}$	$0{,}00293\sqrt{M\cdot b}$
1000	38	$0{,}363(h-a)$	$0{,}406\sqrt{\frac{M}{b}}$	$0{,}00280\sqrt{M\cdot b}$
1000	36	$0{,}351(h-a)$	$0{,}423\sqrt{\frac{M}{b}}$	$0{,}00267\sqrt{M\cdot b}$
1000	34	$0{,}338(h-a)$	$0{,}443\sqrt{\frac{M}{b}}$	$0{,}00254\sqrt{M\cdot b}$
1000	32	$0{,}325(h-a)$	$0{,}464\sqrt{\frac{M}{b}}$	$0{,}00242\sqrt{M\cdot b}$
1000	30	$0{,}310(h-a)$	$0{,}490\sqrt{\frac{M}{b}}$	$0{,}00228\sqrt{M\cdot b}$
1000	28	$0{,}296(h-a)$	$0{,}518\sqrt{\frac{M}{b}}$	$0{,}00214\sqrt{M\cdot b}$
1000	26	$0{,}280(h-a)$	$0{,}550\sqrt{\frac{M}{b}}$	$0{,}00200\sqrt{M\cdot b}$
1000	24	$0{,}265(h-a)$	$0{,}588\sqrt{\frac{M}{b}}$	$0{,}00187\sqrt{M\cdot b}$
1000	22	$0{,}248(h-a)$	$0{,}632\sqrt{\frac{M}{b}}$	$0{,}00173\sqrt{M\cdot b}$
1000	20	$0{,}230(h-a)$	$0{,}686\sqrt{\frac{M}{b}}$	$0{,}00159\sqrt{M\cdot b}$
900	40	$0{,}400(h-a)$	$0{,}380\sqrt{\frac{M}{b}}$	$0{,}00337\sqrt{M\cdot b}$
900	35	$0{,}368(h-a)$	$0{,}420\sqrt{\frac{M}{b}}$	$0{,}00302\sqrt{M\cdot b}$
900	30	$0{,}333(h-a)$	$0{,}475\sqrt{\frac{M}{b}}$	$0{,}00263\sqrt{M\cdot b}$
900	25	$0{,}294(h-a)$	$0{,}549\sqrt{\frac{M}{b}}$	$0{,}00224\sqrt{M\cdot b}$
900	20	$0{,}250(h-a)$	$0{,}660\sqrt{\frac{M}{b}}$	$0{,}00184\sqrt{M\cdot b}$
800	40	$0{,}429(h-a)$	$0{,}367\sqrt{\frac{M}{b}}$	$0{,}00397\sqrt{M\cdot b}$
800	35	$0{,}396(h-a)$	$0{,}408\sqrt{\frac{M}{b}}$	$0{,}00353\sqrt{M\cdot b}$
800	30	$0{,}360(h-a)$	$0{,}459\sqrt{\frac{M}{b}}$	$0{,}00309\sqrt{M\cdot b}$
800	25	$0{,}319(h-a)$	$0{,}530\sqrt{\frac{M}{b}}$	$0{,}00264\sqrt{M\cdot b}$
800	20	$0{,}273(h-a)$	$0{,}635\sqrt{\frac{M}{b}}$	$0{,}00217\sqrt{M\cdot b}$
			r	t

Digitized by Google

In der vorstehenden Tabelle sind für verschiedene Zusammenstellungen von σ_e und σ_b der Abstand x, die Höhe $(h-a)$ und der Querschnitt f_e angegeben. Zum Entwerfen braucht man natürlich nur die beiden letzten Spalten. (Abmessungen in cm, Momente in cmkg einsetzen.)

Beispiel. Ein Eisenbetonbalken von 20,0 cm Breite hat ein Moment von 120000 cmkg aufzunehmen. Der Beton hatte bei der Untersuchung eine Bruchfestigkeit (gegen Druck) von 180 kg/qcm. Welche Abmessungen sind zu wählen?

Wir haben:

$$b = 20{,}0 \text{ cm}, \quad M = 120000 \text{ cmkg}, \quad \sigma_e = 1000 \text{ kg/qcm},$$

$$\sigma_b = \frac{180}{6} = 30 \text{ kg/qcm}.$$

Hieraus folgt aus der Tabelle:

$$h - a = 0{,}490\sqrt{\frac{120000}{20}} = 0{,}490 \cdot 77{,}46 = 38{,}0 \text{ cm},$$

$$f_e = 0{,}00228\sqrt{120000 \cdot 20{,}0} = 0{,}00228 \cdot 1549{,}2 = 3{,}6 \text{ qcm}.$$

Zum Schlusse:

$$h = 38{,}0 + a = \text{rd. } 41 \text{ cm},$$

und für die Eiseneinlagen:

4 Rundeisen von 1,1 cm ∅ = 3,8 qcm.

Wodurch kann man unter Beibehaltung der Breite die Höhe dieses Trägers verringern? (Ermäßigung von σ_e.) Wäre z. B. $(h-a) = 36$ cm erwünscht, so bestimmen wir hieraus den Faktor

$$r = (h-a) : \sqrt{\frac{M}{b}} = \frac{36{,}0}{77{,}46} = 0{,}46$$

und finden (neben $\sigma_b = 30$ und $r = \text{rd. } 0{,}46$) $f_e = 0{,}00309\sqrt{Mb} = 4{,}8$ qcm.

§ 104.

Zusammenstellung von Formeln für die verschiedenen Eisenbetonkonstruktionen.

In diesem Paragraphen mögen für die verschiedenen Betonkonstruktionen die entsprechenden Formeln zusammengestellt werden. Die Ableitungen einzeln vorzuführen dürfte nicht nötig sein. Wer die Untersuchungen von § 102 wirklich durchgearbeitet hat, muß die folgenden Formeln selbständig aufstellen können. Der Leser betrachte diese Arbeit als *Übungsaufgabe* *).

*) Die Formeln nebst kurzen Ableitungen sind enthalten in „Bestimmungen für die Ausführung von Konstruktionen aus Eisenbeton bei Hochbauten vom 24. Mai 1907“.

Digitized by Google

Beim Gebrauche der Formeln ist folgendes zu beachten: Die preußischen „Bestimmungen für die Ausführung . . .“ schreiben vor, daß jede Eisenbetonkonstruktion zunächst so zu berechnen ist, daß dem Beton überhaupt keine Zugspannungen zugemutet werden (§ 102). Aber: „Bei Bauten oder Bauteilen, die der Witterung, der Nässe, den Rauchgasen und ähnlichen schädlichen Einflüssen ausgesetzt sind, ist *außerdem* nachzuweisen, daß das Auftreten von Rissen im Beton durch die vom Beton zu leistenden Zugspannungen vermieden wird.“ Bei derartigen Bauten muß also die Rechnung für zwei Möglichkeiten durchgeführt werden, nämlich: A. Der Beton nimmt keine Zugspannungen auf, B. der Beton nimmt Zugspannungen auf. Der erste Fall ist maßgebend für die Druckspannung des Betons und für die Eiseneinlagen; der zweite Fall ist maßgebend für die Zugbeanspruchung des Betons (Sicherheit gegen Bildung von Rissen). Und zwar darf im zweiten Falle die aus der Rechnung sich ergebende Zugbeanspruchung des Betons betragen:

$$\sigma_z = \frac{2}{3} \text{ der Bruchfestigkeit des Betons gegen Zug}$$

oder, falls keine Zugversuche vorliegen,

$$\sigma_z = \frac{1}{10} \text{ der Bruchfestigkeit des Betons gegen Druck.}$$

Bei geschützt liegenden Hochbaukonstruktionen wird im allgemeinen nur eine Untersuchung nach Fall A nötig sein.

Bezeichnungen:

x = Abstand der Nullinie von der äußersten Druckschicht,
σ_b = Betonspannung in der äußersten Druckschicht,
σ_e bzw. σ_e' = Spannung der Eiseneinlagen f_e bzw. f_e',
τ_0 = Schubspannung des Betons in der neutralen Schicht,
τ_1 = Haftspannung der Eiseneinlagen (deren Umfang = u).

A. Ohne Berücksichtigung der Betonzugspannungen.

I. Rechteckiger Balken mit einseitiger Eiseneinlage (Fig. 180).

$$\text{(Ia)} \qquad x = \frac{n \cdot f_e}{b}\left[-1 + \sqrt{1 + \frac{2b(h-a)}{n \cdot f_e}}\right]$$

$$\text{(Ib)} \qquad \sigma_b = \frac{2M}{b \cdot x\left(h - a - \frac{x}{3}\right)}$$

Digitized by Google

(Ic) $$\sigma_e = \sigma_b \frac{n(h-a-x)}{x} = \frac{M}{f_e\left(h-a-\frac{x}{3}\right)}$$

(Id) $$\tau_0 = \frac{Q}{b\left(h-a-\frac{x}{3}\right)}$$

(Ie) $$\tau_1 = \frac{\tau_0 \cdot b}{u}.$$

II. Rechteckiger Balken mit zweiseitiger Einlage (Fig. 183).

Diese Konstruktion wird dann gewählt, wenn an der betreffenden Stelle auch negative Biegungsmomente (oben Zug,

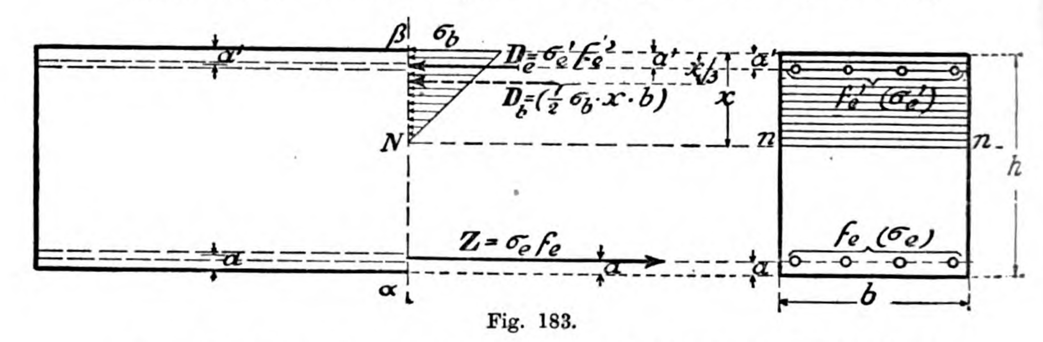


Fig. 183.

unten Druck) auftreten. Sonst nur bei sehr beschränkter Bauhöhe, um den Beton zu entlasten.

(IIa) $$x = -\frac{n(f_e+f_e')}{b} + \sqrt{\left[\frac{n(f_e+f_e')}{b}\right]^2 + \frac{2n}{b}[f_e' \cdot a' + f_e(h-a)]},$$

(IIb) $$\sigma_b = \frac{M}{\frac{b \cdot x}{2}\left(h-a-\frac{x}{3}\right) + n \cdot f_e' \frac{x-a'}{x}(h-a-a')},$$

(IIc) $$\sigma_e = \sigma_b \frac{n(h-a-x)}{x},$$

(IId) $$\sigma_e' = \sigma_b \frac{n(x-a')}{x},$$

(IIe) $$\tau_0 = \frac{Q}{b(h-a-x+y)}, \quad \text{wobei } y = \frac{\frac{b\,x^3}{3} + n \cdot f_e'(x-a')^2}{\frac{b\,x^2}{2} + n \cdot f_e'(x-a')},$$

(IIf) $$\tau_1 = \frac{\tau_0 \cdot b}{u}.$$

Digitized by Google

III. Plattenbalken mit einseitiger Einlage (Fig. 184).

Da bei einem Eisenbetonbalken der Beton in der Zugzone doch nicht in Rechnung gestellt werden darf, so läßt man ihn hier so weit fort, als es eine ausreichende Umhüllung der Eiseneinlagen gerade noch gestattet. Der hierdurch gewonnene Beton kann dann in nützlicherer Weise zur Verstärkung (Verbreiterung) der Druckzone verwendet werden. Aus diesen Erwägungen sind die „Plattenbalken" entstanden, die namentlich als Deckenkonstruktionen vorzüglich geeignet sind. Als tragende Breite soll aber von der Balkenmitte ab nach jeder Seite nicht mehr als ein Sechstel der Balkenlänge in Rechnung gestellt werden.

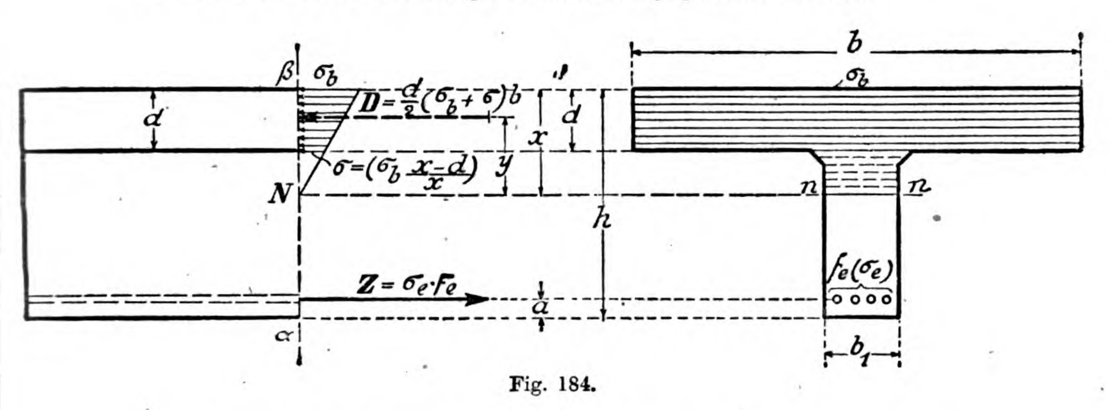


Fig. 184.

Bei Plattenbalken fängt man zunächst mit Formel (Ia) an. Ergibt sich hierbei, daß die Nullinie in die Platte selbst oder in die Unterkante derselben fällt, so gelten die für den Fall I abgeleiteten Formeln. Denn der unter der Nullinie liegende Beton ist ja auch im Falle I nicht in Rechnung gestellt worden. Ergibt dagegen die (probeweise) Anwendung der Gleichung (Ia), daß die Nullinie in den Steg fällt, so gilt folgender Rechnungsgang:

(IIIa) $$x = \frac{\frac{b\,d^2}{2} + n \cdot f_e (h - a)}{b \cdot d + n \cdot f_e};$$ hieraus ein Hilfswert

(IIIb) $$y = x - \frac{d}{2} + \frac{d^2}{6(2x - d)},$$

(IIIc) $$\sigma_e = \frac{M}{f_e (h - a - x + y)},$$

(IIId) $$\sigma_b = \sigma_e \cdot \frac{x}{n(h - a - x)},$$

Digitized by Google

(IIIe) $$\tau_0 = \frac{Q}{b_1(h - a - x + y)},$$

(IIIf) $$\tau_1 = \frac{\tau_0 \cdot b_1}{u}.$$

Bemerkung: Bei der Ableitung dieser Formeln läßt man im Interesse einer einfachen Berechnung die im Steg auftretende Druckspannung unberücksichtigt (Fig. 184). Der Abstand y ist die Entfernung des Schwerpunktes des Drucktrapezes von der Nullinie.

B. Mit Berücksichtigung der Betonzugspannungen.

In den folgenden Formeln bezeichnen $\sigma_{b,d}$, bzw. $\sigma_{b,z}$ die Spannung in der äußersten Druck-, bzw. Zugzone des Betons. In Betracht kommt $\sigma_{b,z}$, da für die anderen Spannungen der Fall A ungünstiger ist.

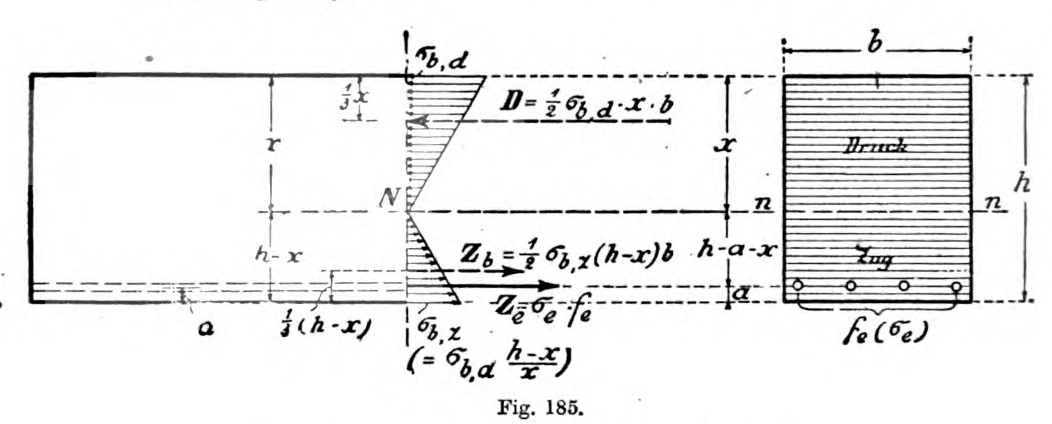


Fig. 185.

1. Rechteckiger Balken mit einseitiger Eiseneinlage (Fig. 185).

(1a) $$x = \frac{\frac{b\,h^2}{2} + n \cdot f_e(h - a)}{b \cdot h + n \cdot f_e}.$$

(1b) $$\sigma_{b,d} = \frac{M \cdot x}{\frac{b\,x^3}{3} + \frac{b\,(h - x)^3}{3} + n \cdot f_e(h - a - x)^2},$$

(1c) $$\sigma_{b,z} = \sigma_{b,d} \cdot \frac{h - x}{x},$$

(1d) $$\sigma_e = \sigma_{b,d} \cdot \frac{n\,(h - a - x)}{x}.$$

Digitized by Google

2. Rechteckiger Balken mit zweiseitiger Einlage (Fig. 186).

$$(2\text{a})\qquad x = \frac{\dfrac{b \cdot h^2}{2} + n\,[f'_e \cdot a' + f_e(h-a)]}{b \cdot h + n\,(f'_e + f_e)},$$

$$(2\text{b})\qquad \sigma_{b,d} = \frac{M \cdot x}{\dfrac{b \cdot x^3}{3} + \dfrac{b\,(h-x)^3}{3} + n\,[f'_e(x-a')^2 + f_e(h-a-x)^2]},$$

$$(2\text{c})\qquad \sigma_{b,z} = \sigma_{b,d} \cdot \frac{h-x}{x},$$

$$(2\text{d})\qquad \sigma_e = \sigma_{b,d} \cdot \frac{n\,(h-a-x)}{x} \quad \text{(in der Zugzone)},$$

$$(2\text{e})\qquad \sigma'_e = \sigma_{b,d} \cdot \frac{n\,(x-a')}{x} \quad \text{(in der Druckzone)}.$$

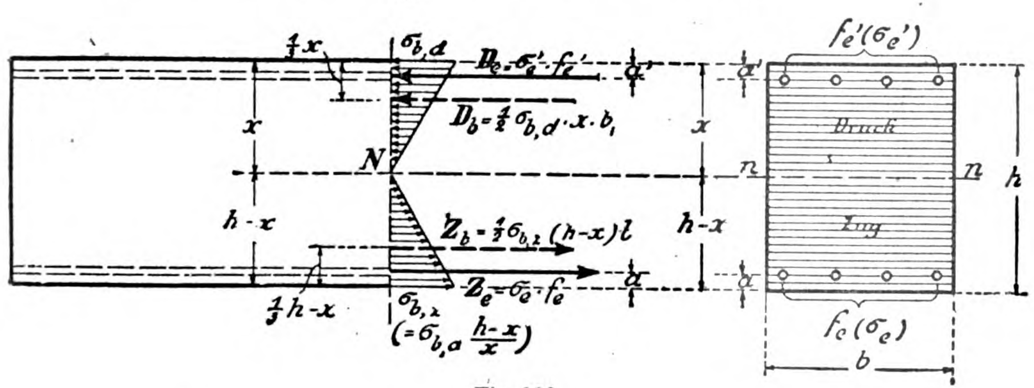


Fig. 186.

3. Plattenbalken mit einseitiger Einlage (vgl. Fig. 184).

Für den Fall, daß die Nullinie durch den Steg geht, gilt folgender Rechnungsgang:

$$x = \frac{\dfrac{b_1 \cdot h^2}{2} + (b - b_1)\dfrac{d^2}{2} + n \cdot f_e(h-a)}{b_1 \cdot h + (b - b_1)\,d + n \cdot f_e}; \quad \text{hieraus}$$

$$y = x - \frac{d}{2} + \frac{d^2}{6\,(2x - d)},$$

$$\sigma_{b,d} = \frac{M \cdot x}{\dfrac{b \cdot d}{2}(2x - d)\,y + \dfrac{b_1}{3}[(x-d)^3 + (h-x)^3] + n \cdot f_e(h-a-x)^2},$$

$$\sigma_{b,z} = \sigma_{b,d} \cdot \frac{h-x}{x},$$

$$\sigma_e = \sigma_{b,d} \cdot \frac{n\,(h-a-x)}{x}.$$

Digitized by Google

Bemerkung: In den obigen Formeln ist (bei Fall A_{II} und B) die Verringerung des Betonquerschnittes durch die Einlagen vernachlässigt. Zur Berücksichtigung dieser geringfügigen Verschwächung müßte an einzelnen Stellen der Faktor „n“ durch „$n-1$“ ersetzt werden. (S. die „Bestimmungen . . .“, die allerdings in dieser Frage nicht konsequent sind.)

§ 105.

Berechnung von Eisenbetonstützen.

I. Die Stütze ist *zentrisch* belastet.

a) Berechnung der Spannungen.

Wir setzen den Fall voraus, daß die Last P der Stütze zentrisch (innerhalb der Mittellinie) wirke, und daß die Eiseneinlagen symmetrisch im Querschnitte angeordnet seien. Dann ergeben sich nach § 101 die Spannungen σ_b und σ_e von Beton und Eisen:

$$\text{(I)} \qquad \sigma_b = \frac{P}{F + n \cdot f_e}$$

$$\text{(II)} \qquad \sigma_e = n \cdot \sigma_b = \frac{n \cdot P}{F + n \cdot f_e}.$$

Hierin bedeutet F den Betonquerschnitt, f_e den *gesamten* Eisenquerschnitt. (Für F wird meistens der gesamte Querschnitt der Stütze genommen, ohne Rücksicht darauf, daß ein Teil der Fläche durch das Eisen fortgenommen ist.)

Zulässige Spannungen sind nach den „Bestimmungen“:

$$\sigma_b = \frac{1}{10} \text{ der Bruchfestigkeit des Betons gegen Druck,}$$

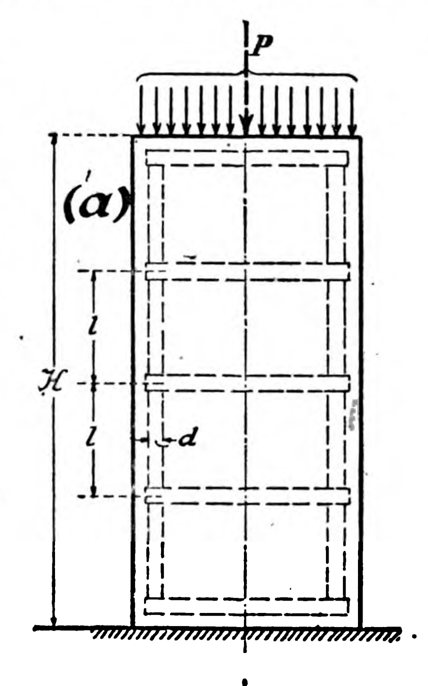
$$\sigma_e = 1000 \text{ kg/qcm}.$$

b) Untersuchung hinsichtlich Knicken.

Die Untersuchung der Stützen auf Knicken muß nach den „Bestimmungen“ erfolgen, sobald die Höhe mehr als das **18** fache der kleinsten Querschnittsabmessung beträgt. Die Berechnung geschieht nach der *Euler*schen Knickformel (§ 98). Es wird eine **10** fache Knicksicherheit der Stütze verlangt, wobei bei Berechnung des Trägheitsmomentes die Eiseneinlagen mit ihrer n fachen Fläche einzusetzen sind. (Diese Bestimmung trägt der größeren Unnachgiebigkeit des Eisens gegenüber dem Beton Rechnung. Eine genaue theoretische Untersuchung der Knicksicherheit eines Eisenbetonkörpers ist aussichtslos.)

Digitized by Google

Auch die Eiseneinlagen für sich müssen knicksicher gemacht werden, und zwar mit 5 facher Knicksicherheit, wozu die Querverbände dienen. Der Abstand der letzteren darf höchstens das Dreißigfache der Stärke der Längsstäbe betragen, vorausgesetzt, daß die Knicksicherheit der Einlagen nicht eine engere Teilung verlangt.



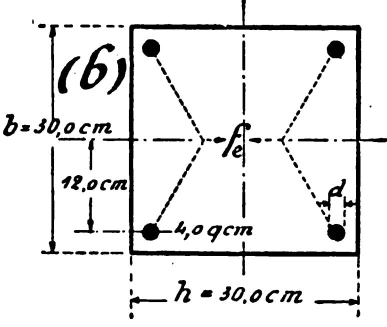


Fig. 187.

Beispiel. Ein quadratischer Eisenbetonpfeiler von $b = h = 30{,}0$ cm Seitenlänge, 4,0 m Höhe und 4 Rundeisen von je 4,0 qcm trägt eine zentrische Last $P = 30000$ kg. Spannungen und Knicksicherheit sind zu berechnen. (Fig. 187.) Es ist

$P = 30000$ kg,

$F =$ rd. $30 \cdot 30 = 900$ qcm,

$f_e = 16$ qcm,

$h = 400$ cm,

$$J = \frac{b^4}{12} + n \cdot 4 \cdot 4{,}0 \cdot 12{,}0^2$$

$$= \frac{30{,}0^4}{12} + 15 \cdot 4 \cdot 4{,}0 \cdot 12{,}0^2$$

$$= 102060 \text{ cm}^4.$$

Hiermit folgt zunächst

$$\sigma_b = \frac{30000}{900 + 15 \cdot 16} = \frac{30000}{900 + 240}$$

$$= 26{,}3 \text{ kg/qcm},$$

$$\sigma_e = 15 \cdot 26{,}3 = 395 \text{ kg/qcm}.$$

(Für die obige Beanspruchung müßte der Beton eine Bruchfestigkeit von mindestens 263 kg/qcm gehabt haben.)

Die zulässige Belastung der Stütze ist nach der *Euler*schen Knickformel (Fig. 175 b) bei 10 facher Sicherheit:

$$P = \frac{1}{10} \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J}{H^2}.$$

Den Elastizitätsmodul des Betons nehmen wir zu

$$E = 140000 \text{ kg/qcm}.$$

Digitized by Google

Dann ergibt sich eine zulässige Last

$$P = \frac{1}{10} \cdot \frac{10 \cdot 140000 \cdot 102060}{400^2} = \text{rd. } 89000 \text{ kg.}$$

Die Stütze als Ganzes ist also sehr knicksicher.

Jede der Eiseneinlagen nimmt eine Kraft

$$P_e = \sigma_e \cdot \frac{d^2\pi}{4} = 395 \cdot \frac{d^2\pi}{4}$$

auf. Ist der Abstand der Querverbindungen voneinander l, so muß, da die Eiseneinlagen eine fünffache Knicksicherheit haben sollen, die Beziehung bestehen:

$$\sigma_e \cdot \frac{d^2\pi}{4} = \frac{1}{5} \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J}{l^2} = \frac{1}{5} \frac{\pi^2 \cdot 2150000 \cdot \frac{\pi d^4}{64}}{l^2},$$

$$\sigma_e \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{1}{5} \frac{\pi^3 \cdot 2150000 \cdot d^2}{64 \cdot l^2},$$

$$l^2 = \frac{\pi^2 \cdot 2150000}{5 \cdot 16 \cdot \sigma_e} d^2$$

$$= \frac{265250}{\sigma_e} \cdot d^2,$$

$$l = d\sqrt{\frac{265250}{\sigma_e}} = \frac{515\,d}{\sqrt{\sigma_e}},$$

$$l = \frac{515\,d}{\sqrt{395}} = 26\,d.$$

Die Einlagen müssen also in Abständen von höchstens $l = 26 \cdot d$ miteinander verbunden werden.

II. Die Stütze ist *exzentrisch* belastet.

a) Berechnung der Spannungen.

In diesem Falle wird die Stütze auf Druck und auf Biegung beansprucht. Nach § 90, I würde sich folgender Rechnungsgang ergeben: Wir bestimmen zunächst die Spannung, die an der betreffenden Stelle auftreten würde, wenn die Last *zentrisch* wirken würde. Zu dieser Spannung addieren wir dann den Betrag infolge des Biegungsmomentes aus der Last P mal ihrem Abstande p von dem Schwerpunkte. Bei Eisenbetonstützen ist der erstere Betrag nach den Formeln (I) und (II) dieses Paragraphen zu bestimmen. Der zweite Betrag ist nach den Formeln (2a)—(2e) des vorigen Paragraphen zu berechnen, denn es handelt sich hier

Digitized by Google

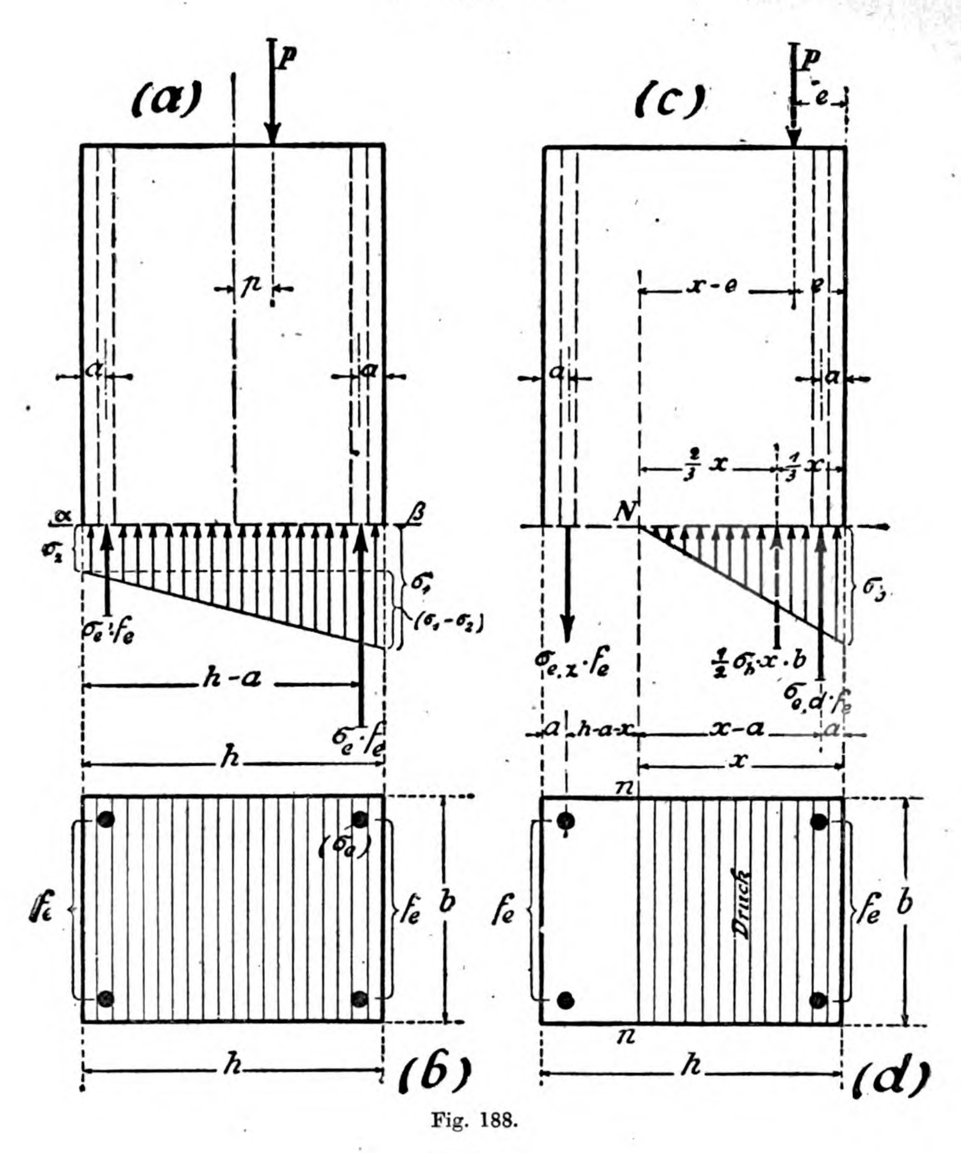


Fig. 188.

um einen doppelt armierten Stab, bei dem das Biegungsmoment sowohl Druck als auch Zug hervorbringen würde. (Die Zugspannungen werden aber beim Endresultat infolge des Druckes der zentrisch wirkenden Last wieder in Druck verwandelt.) In unserem Falle vereinfachen sich die Formeln (2a) usw. ganz erheblich, da $f_e = f_e'$, $a = a'$, und also $x = \frac{h}{2}$ ist. Insgesamt ergeben sich für die Spannungen der äußersten Betonstreifen der

Digitized by Google

Stütze nach einigen Umformungen folgende Formeln (Fig. 188a) (f_e bezeichne jetzt die Eisenfläche der *einen* Seite):

$$\text{(III)} \qquad \sigma_1 = -\left[\frac{P}{F + n \cdot 2 f_e} + \frac{P \cdot p \cdot \frac{h}{2}}{\frac{b h^3}{12} + 2 n f_e \left(\frac{h}{2} - a\right)^2}\right],$$

$$\text{(IV)} \qquad \sigma_2 = -\left[\frac{P}{F + n \cdot 2 f_e} - \frac{P \cdot p \cdot \frac{h}{2}}{\frac{b h^3}{12} + 2 n f_e \left(\frac{h}{2} - a\right)^2}\right].$$

Für die Eisenspannung ergibt sich aus den Betonspannungen leicht die Formel (s. Fig. 188a):

$$\text{(V)} \qquad \sigma_e = n \left[\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)(h - a)}{h} + \sigma_2\right].$$

Hiermit sind Beton und Eisen untersucht.

Die Formeln (III)—(V) *gelten aber nur so lange, als sich sowohl für* σ_1 *als für* σ_2 ***Druck*** *ergibt.* Stellt sich Zug heraus, so bedeutet dieses, daß ein Teil des Betonquerschnittes überhaupt nicht mitträgt. Dann muß ein ganz anderer Rechnungsgang eingeschlagen werden (Fig. 188c und d):

Da diese Untersuchung vollständig der Berechnung der Anker von eisernen Stützen ähnelt (§ 99a), braucht sie hier nur kurz vorgeführt zu werden. Nach Fig. 188c bestehen zunächst die Beziehungen zwischen den Spannungen:

$$\sigma_{e,d} : \sigma_b = n(x - a) : x ,$$
$$\sigma_{e,z} : \sigma_b = n(h - a - x) : x .$$

In Verbindung mit diesen Beziehungen liefern die Gleichgewichtsbedingungen $R_y = 0$ und $\Sigma M = 0$ die Gleichungen:

$$(1) \qquad \sigma_b \frac{b x}{2} + n \cdot f_e \cdot \sigma_b \left(\frac{x - a}{x} - \frac{h - a - x}{x}\right) = P ,$$

$$(2) \qquad \sigma_b \frac{b x^2}{3} + n \cdot f_e \sigma_b \left[\frac{(x - a)^2}{x} + \frac{(h - a - x)^2}{x}\right] = P(x - e) .$$

Nach Division dieser Gleichungen und verschiedenen Umformungen ergibt sich zunächst zur Bestimmung von x die Beziehung:

$$\text{(VI)} \qquad x^3 \frac{b}{6 n f_e} - x^2 \frac{b \cdot e}{2 n f_e} + x(h - 2e) = 2a^2 + h^2 - (2a + e) h .$$

Hierin werden die Zahlenwerte eingesetzt, und dann wird die Gleichung durch Probieren gelöst (s. Beispiel). Liegt der Abstand e außerhalb der Stütze, so ist er *negativ* einzuführen.

Digitized by Google

Sobald x gefunden ist, folgt aus Gleichung (1) die Spannung σ_b:

$$\text{(VII)} \qquad \sigma_b = \frac{P}{\frac{b \cdot x}{2} + n \cdot f_e \frac{2x - h}{x}}.$$

Ferner folgen aus den zuerst aufgestellten Beziehungen:

$$\text{(VIII)} \qquad \sigma_{e,z} = \sigma_b \frac{n(h - a - x)}{x},$$

$$\text{(IX)} \qquad \sigma_{e,d} = \sigma_b \frac{n(x - a)}{x}.$$

Somit sind auch für diesen Fall die Spannungen ermittelt.

b) Untersuchung hinsichtlich Knicken.

Die Untersuchung hinsichtlich Knicken geschieht in derselben Weise wie bei zentrisch belasteten Stützen. Eine ursprüngliche Exzentrizität kommt in der *Euler*schen Betrachtungsweise des Knickungsproblems überhaupt nicht zur Geltung.

Erstes Beispiel. Die in Fig. 188 gezeichnete Stütze trage eine Last $P = 14000$ kg im Abstande $p = 6{,}0$ cm. Der Querschnitt sei:

$$b = 30{,}0 \text{ cm}; \quad h = 40{,}0 \text{ cm}; \quad f_e = 2 \cdot \frac{2{,}2^2 \pi}{4} = 7{,}60 \text{ qcm}; \quad a = 3{,}0 \text{ cm}.$$

Wie groß sind die Spannungen σ_b und σ_e?

Zunächst muß entschieden werden, ob die Formeln (III)—(V) oder aber (VI)—(IX) gelten. Die ersteren formen wir wegen des Folgenden um in:

$$\sigma_1 = - \frac{P \cdot \frac{h}{2}}{\frac{b h^3}{12} + 2 n f_e \left(\frac{h}{2} - a\right)^2} \left[\frac{\frac{b h^3}{12} + 2 n f_e \left(\frac{h}{2} - a\right)^2}{(F + 2 n f_e) \frac{h}{2}} + p \right],$$

$$\sigma_2 = - \frac{P \cdot \frac{h}{2}}{\frac{b h^3}{12} + 2 n f_e \left(\frac{h}{2} - a\right)^2} \left[\frac{\frac{b h^3}{12} + 2 n f_e \left(\frac{h}{2} - a\right)^2}{(F + 2 n f_e) \frac{h}{2}} - p \right].$$

Der in der Klammer stehende Bruch werde mit „k“ bezeichnet; also

$$\text{(X)} \qquad k = \frac{\left[\frac{b h^3}{12} + 2 n f_e \left(\frac{h}{2} - a\right)^2\right] : \frac{h}{2}}{(F + 2 n f_e)}.$$

Digitized by Google

Dann ergibt sich die übersichtliche Schreibweise:

$$\text{(IIIa)} \qquad \sigma_1 = -\frac{P(k+p)}{\left[\frac{b h^3}{12} + 2 n f_e \left(\frac{h}{2} - a\right)^2\right] : \frac{h}{2}},$$

$$\text{(IVa)} \qquad \sigma_2 = -\frac{P(k-p)}{\left[\frac{b h^3}{12} + 2 n f_e \left(\frac{h}{2} - a\right)^2\right] : \frac{h}{2}}.$$

Nun erkennt man folgendes: Ist p größer als k, so wird in der letzten Formel der Zähler negativ. Die Spannung σ_2 selber würde sich also *positiv* ergeben. Da wir aber *Zug*festigkeit des Betons nicht annehmen, werden in diesem Falle die Formeln (III)—(V) unbrauchbar. Das Kennzeichen lautet also:

(XI) $\begin{cases} p < k: \text{ der } \textit{ganze} \text{ Querschnitt trägt} & \text{[Form. (III)—(V)]} \\ p > k: \textit{ nur ein Teil} \text{ des Querschn. trägt} & \text{[„ (VI)—(IX)]} \end{cases}.$

Für unser Zahlenbeispiel ergibt sich nun:

$$k = \frac{\left[\frac{30{,}0 \cdot 40{,}0^3}{12} + 2 \cdot 15 \cdot 7{,}60 \cdot 17{,}0^2\right] : 20{,}0}{30{,}0 \cdot 40{,}0 + 2 \cdot 15 \cdot 7{,}60} = \frac{[160\,000 + 65\,890] : 20{,}0}{1200 + 228}$$

$$= \frac{225\,890 : 20{,}0}{1428} = \frac{11\,294{,}5}{1428} = 7{,}9 \text{ cm.}$$

Da der Abstand p nur 6,0 cm beträgt, erstrecken sich die Druckspannungen über den ganzen Querschnitt. Die Größe der Spannungen ist [nach (IIIa), (IVa) und (V)]:

$$\sigma_1 = -\frac{14000(7{,}9 + 6{,}0)}{11\,294{,}5} = -17{,}2 \text{ kg/qcm,}$$

$$\sigma_2 = -\frac{14000(7{,}9 - 6{,}0)}{11\,294{,}5} = -2{,}4 \text{ kg/qcm,}$$

$$\sigma_e = -15\left[(17{,}2 - 2{,}4)\frac{37{,}0}{40{,}0} + 2{,}4\right] = -15 \cdot 16{,}1 = -242 \text{ kg/qcm.}$$

Zweites Beispiel. Bei der im vorigen Beispiele untersuchten Eisenbetonsäule betrage der Abstand der Last: $p = 12{,}0$ cm. Die Spannungen sind zu berechnen!

Da p größer als k ist, kann nur ein Teil des Querschnittes als tragende Konstruktion in Rechnung gestellt werden. Zunächst bestimmen wir den Abstand $e = 20{,}0 - 12{,}0 = 8{,}0$ cm.

Da er *innerhalb* des Querschnittes liegt, wird er positiv eingeführt. Die Gleichung (VI) formen wir noch etwas um:

$$\text{(VIa)} \quad x^3 - x^2 \cdot 3e + x\frac{6 n f_e (h - 2e)}{b} - \frac{6 n f_e}{b}[h(h - 2a - e) + 2a^2] = 0,$$

Digitized by Google

$$x^3 - x^2 \cdot 3 \cdot 8{,}0 + x \frac{6 \cdot 15 \cdot 7{,}60 \cdot 24}{30{,}0} - \frac{6 \cdot 15 \cdot 7{,}60}{30{,}0} [40{,}0 \cdot 26{,}0 + 18{,}0] = 0,$$

$$\text{(XI)} \qquad x^3 - x^2 \cdot 24 + x \cdot 547 - 24120 = 0.$$

Nun probieren wir den Wert von x aus, der diese Gleichung erfüllt. Bei $x = 30$ cm würde die linke Seite ergeben:

$$27000 - 21600 + 16410 - 24120 = \text{rd.} - 2300.$$

Dieser Wert stimmt also nicht. Wir probieren $x = 31$ cm:

$$29790 - 23060 + 16960 - 24120 = -430.$$

Bei nochmaligem Probieren ergibt sich als genauer Wert: $x = 31{,}2$ cm. Nun folgen die Spannungen:

$$\sigma_b = \frac{14000}{\frac{30{,}0 \cdot 31{,}2}{2} + 15 \cdot 7{,}60 \frac{2 \cdot 31{,}2 - 40{,}0}{31{,}2}} = \frac{14000}{468 + 82} = 25{,}5 \text{ kg/qcm},$$

$$\sigma_{e,z} = 25{,}5 \frac{15(40{,}0 - 3{,}0 - 31{,}2)}{31{,}2} = 71 \text{ kg/qcm},$$

$$\sigma_{e,d} = 25{,}5 \frac{15(31{,}2 - 3{,}0)}{31{,}2} = 346 \text{ kg/qcm}.$$

Somit sind die Beanspruchungen der Stütze ermittelt. Die Untersuchung hinsichtlich Knicken geschieht in genau derselben Weise wie bei dem in Fig. 187 dargestellten Beispiele.

§ 106.

Zusammenfassung zum 19. Vortrag.

I. Einleitende Betrachtungen.

Um die Wirkungsweise einer Eisenbetonkonstruktion überhaupt verstehen zu können, haben wir zunächst die Eigenschaften der beiden Materialien Eisen und Beton miteinander verglichen. Hierbei zeigte sich:

a) Hinsichtlich der **Festigkeitseigenschaften:** Beton kann im wesentlichen nur Druck aufnehmen; Eisen kann sowohl Druck als auch Zug aufnehmen. Eisen kann also Beton verstärken (wenn es sich um Druck handelt) oder ersetzen (wenn es sich um Zug handelt).

b) Hinsichtlich des **elastischen Verhaltens:** Eisen ist bedeutend starrer (unnachgiebiger) als Beton. Und zwar ergibt sich dieser Unterschied, wenn man den Elastizitätsmodul des Eisens mit dem des Betons vergleicht. (Denn der Elastizitätsmodul ist ja die

Digitized by Google

Hilfsgröße, durch die wir die Formänderung eines Materials bestimmen.) In Zahlen ist das Verhältnis:

$$(1)\qquad \frac{\text{Elastizitätsmodul d. E.}}{\text{Elastizitätsmodul d. B.}} = \frac{E_e}{E_b} = n = 15.$$

Aus dieser größeren Starrheit des Eisens ergibt sich dann folgende lehrreiche Gegenüberstellung: Denkt man sich mit einem Eisen- und einem Betonstabe eine gleichgroße Formänderung (Zusammendrückung λ) vorgenommen, so wird der Eisenstab infolge seiner größeren Starrheit in eine n-mal so große Spannung σ versetzt als der Beton (d. h. die Kraft im Eisenquerschnitt ist pro qm $n(=15)$-mal so stark als im Betonquerschnitt). Daraus folgt aber hinsichtlich des Zusammenarbeitens von Eisen und Beton die Grundlage aller Eisenbetonberechnungen: Wenn in einen Betonquerschnitt Eisen hineingelegt wird, so wirkt dieses mit derselben Kraft, als wenn an seiner Stelle eine n-mal so große Betonfläche eingelegt wäre.

Dies ist der Grund, weshalb in allen Formeln über Eisenbeton die Eisenfläche mit dem Faktor „n“ erscheint ($n \cdot f_e$).

II. Druckkörper mit zentrischer Last (ohne Knickung).

Als direkte Anwendung dieser grundsätzlichen Betrachtungen ergab sich die Berechnung von zentrisch belasteten Druckkörpern aus Eisenbeton:

Beide Materialien — Beton und Eisen — zusammen müssen natürlich die gesamte Last P aufnehmen. Sie geraten aber nicht in gleichgroße Spannung, sondern das Eisen erhält, da es $n(=15)$-mal starrer ist als Beton, eine n-mal so große Spannung als dieser. Die Gegenkraft, die das Eisen pro qcm ausübt, ist als auch n-mal so groß als beim Beton; oder — mit anderen Worten —: die Eisenfläche f_e verstärkt den übrigen Querschnitt F ebenso, als wenn man $n \cdot f_e$ Betonfläche hinzugefügt hätte.

Durch diese Überlegungen kann man die für zentrisch belastete Druckkörper abgeleiteten Formeln direkt hinschreiben:

$$(2)\qquad \begin{cases} \sigma_b = \dfrac{P}{F + n \cdot f_e}, \\[2ex] \sigma_e = n \cdot \sigma_b = \cdot \dfrac{P}{F + n \cdot f_e}. \end{cases}$$

Digitized by Google

III. Balken auf Biegung beansprucht (reine Biegung).

Ein Eisenbetonbalken hat, wie jeder andere auf Biegung beanspruchte Körper, eine Nullinie, die den Querschnitt in eine Zug- und eine Druckzone teilt. Die Bestimmung der Lage der Nullinie und der Größe der Spannungen geschieht wie bei jedem anderen Balken; nur müssen natürlich die besonderen Eigenschaften der beiden Materialien beachtet werden. Nämlich:

1. Da der Beton gegen Zug sehr unsicher ist, wird auf seine Mitwirkung innerhalb der Zugzone überhaupt nicht gerechnet (d. h. er wird innerhalb der Zugzone einfach als nicht vorhanden angesehen). (Fig. 180b—d; 181a—b; 183; 184.)

2. Dagegen wirken in der Zugzone die Eiseneinlagen, und zwar pro qcm n-mal so stark, als wenn an ihrer Stelle Beton wäre [d. h. die Eisenfläche erscheint im Verhältnis zum Beton in einem n-fach vergrößerten Querschnitt ($n \cdot f_e$)].

Zusatz: In gewissen Fällen, nämlich wenn die betreffende Konstruktion Rauchgasen, Feuchtigkeit oder dgl. ausgesetzt ist, muß allerdings auch auf die Zugbeanspruchung des Betons eingegangen werden. [Denn vorhanden ist diese ja, da der am Eisen anhaftende Beton die Dehnungen des Eisens mitmacht.] Dann muß also angenommen werden, daß der Beton auch in der Zugzone wirksam wäre, und untersucht werden, ob die auf Grund dieser Annahme sich ergebenden *Zug*spannungen nicht so groß sind, daß (Zug-)Risse im Beton zu befürchten sind. [Der Eisenbetonbalken wird dann also wie ein gewöhnlicher Balken — aus zug- und druckfestem Material — behandelt; nur daß er an einer Stelle eine besonders widerstandsfähige Schicht, nämlich die Eiseneinlagen, aufweist; Fig. 185, 186.] Insgesamt hat man also bei einem auf Biegung beanspruchten Eisenbetonbalken folgende zwei Untersuchungen durchzuführen:

A. Der Beton wird nur auf seine Druckfestigkeit in Anspruch genommen, dagegen innerhalb der Zugzone der Sicherheit wegen einfach als nicht vorhanden angesehen. Auf Grund dieser Annahme werden dann die größte Druckspannung (Beton) und die größte Zugspannung (Eisen) berechnet: $\sigma_{b,\,\mathrm{Druck}}$ und σ_e.

B. Es wird angenommen, daß der Beton auch in der Zugzone mitarbeitet. Dieser Zustand ist maßgebend zur Beurteilung, ob an der Zugseite des Balkens eventuell Rissebildung im Beton zu befürchten ist: $\sigma_{b,\,\mathrm{Zug}}$.

Wie bereits gesagt, braucht der Fall B überhaupt nur bei besonderen Umständen berücksichtigt zu werden. Für den

Digitized by Google

eigentlichen Festigkeitsnachweis genügt die Untersuchung von Fall A.

Im folgenden sind nun die in § 102 u. f. entwickelten Formeln noch einmal zusammengestellt:

A. Für den Fall, daß der Beton nur Druck überträgt.

1. Einfacher Balken mit einseitiger Bewehrung. Fig. 180—182.

$$(3)\quad \begin{cases} \text{Lage der Nullinie:} & x = \dfrac{n \cdot f_e}{b}\left[-1 + \sqrt{1 + \dfrac{2b(h-a)}{n \cdot f_e}}\right], \\ \text{Betonspannung:} & \sigma_b = \dfrac{2M}{bx\left(h - a - \dfrac{x}{3}\right)}, \\ \text{Eisenspannung:} & \sigma_e = \sigma_b \cdot \dfrac{b}{2}\,\dfrac{x}{f_e} = \dfrac{M}{f_e\left(h - a - \dfrac{x}{3}\right)}, \\ \text{Schubsp. (Beton):} & \tau_0 = \dfrac{Q}{b\left(h - a - \dfrac{x}{3}\right)}, \\ \text{Haftsp. (Eisen):} & \tau_1 = \tau_0 \cdot \dfrac{b}{u} = \dfrac{Q}{u\left(h - a - \dfrac{x}{3}\right)}. \end{cases}$$

In diesen Formeln sind M und Q das Moment und die Querkraft, die der Balken auf eine Breite b aufzunehmen hat. Bei Platten rechnet man alle Größen zweckmäßig für eine Breite $b = 100$ cm.

Zusatz 1: Durch die Tabelle I in § 103 kann man sich das Ausrechnen der Spannungen bei einem gegebenen Balken von der Höhe h und der Eiseneinlage f_e erleichtern: Man berechnet nur das Moment M und den Hilfswert $m = b(h-a):f_e$, und findet dann daneben sofort die Spannungen σ_b und σ_e.

Zusatz 2: Beim Konstruieren muß man meistens umgekehrt vorgehen: Die Spannungen σ_b und σ_e sind vorgeschrieben, während die Höhe h und der Eisenquerschnitt f_e bestimmt werden sollen. Hierzu dient Tabelle II in § 103: Man berechnet zunächst das Moment M, das der Balken auf eine Breite b aufzunehmen hat, und einigt sich auf die Spannungen σ_e und σ_b, die man zulassen will. Dann findet man neben dem betreffenden Spannungspaar σ_e und σ_b sofort die erforderliche Nutzhöhe $(h-a)$ und Eiseneinlage f_e. Ist die herauskommende Höhe aus anderen, praktischen Gründen nicht genehm, so muß man ein anderes

Digitized by Google

Spannungspaar wählen, das eine zusagende Höhe $(h - a)$ liefert. Und zwar wähle man, um eine kleine Höhe h zu erhalten, eine niedrige Eisenspannung mit hoher Betonspannung.

2. Einfacher Balken mit zweiseitiger Bewehrung. Fig. 183.

Formeln für x, σ_b, σ_e, σ_e', τ_0 und τ_1 s. § 104, Fig. 183.

Zu beachten: In die Formeln ist als „f_e" diejenige Eiseneinlage einzusetzen, die an der Druckseite des Querschnittes liegt; und als f_e' die Eiseneinlage an der Zugseite. Fig. 183b bezieht sich also auf den Fall, daß der Querschnitt ein positives Moment hätte, — oben Druck, unten Zug; andernfalls ist die Figur umzukehren.

Zusatz: Wie bereits in § 104 gesagt, ist eine doppelte Bewehrung immer dann erforderlich, wenn an der betreffenden Balkenstelle die Biegungsmomente infolge der verschiedenen Belastungen mit verschiedenen Vorzeichen auftreten können. (Einmal oben Druck und unten Zug, und dann umgekehrt.) Außerdem verwendet man doppelte Bewehrung, um bei vorgeschriebener Betonspannung mit einer kleinen Balkenhöhe auszukommen. Doch ist dies dann ein teures Hilfsmittel.

3. Plattenbalken mit einseitiger Bewehrung. Fig. 184.

Zunächst untersucht man, ob die Nullinie vielleicht innerhalb der Plattendicke d fällt. (Ausrechnung von x nach der Formel für den gewöhnlichen Balken mit der Breite b.) Ist dies der Fall, so erfolgt auch die weitere Durchrechnung wie beim gewöhnlichen Eisenbetonbalken (Formeln 3), da dann tatsächlich kein Unterschied in statischer Hinsicht besteht.

Ergibt sich aber bei dieser probeweisen Berechnung für x ein Wert größer als die Plattendicke d, so muß die Berechnung nach besonderen Formeln erfolgen (s. § 104, Fig. 184).

4. Plattenbalken mit doppelseitiger Bewehrung.

Als Nachtrag zu § 104 mögen an dieser Stelle noch die Formeln für den doppeltarmierten Plattenbalken mitgeteilt werden. Die Eiseneinlage an der *Zug*seite heiße f_e; ihr Abstand sei a; ihre Spannung sei σ_e. Die entsprechenden Werte an der Druckseite seien f_e', a' und σ_e'. Der Übersichtlichkeit wegen wollen wir folgende zwei Fälle unterscheiden:

a) Die Druckzone sei an der Plattenseite

(entsprechend Fig. 184; nur, daß auch oben Armierung ist). Zunächst untersuchen wir, ob die Nullinie vielleicht innerhalb der

Digitized by Google

Plattendicke fällt. (Ausrechnung des Abstandes x nach der Formel für den doppeltarmierten Balken mit der Breite b.) Ist dies der Fall, so erfolgt auch die weitere Durchrechnung nach den Formeln für den doppeltarmierten Balken.

Ergibt sich aber dieses probeweis berechnete x größer als d, so muß ein neuer Rechnungsgang stattfinden:

$$(4)\quad \begin{cases} x = \dfrac{\dfrac{b d^2}{2} + n[f_e \cdot (h-a) + f'_e \cdot a']}{b d + n(f_e + f'_e)}; \qquad \text{hieraus Abstand} \\ y = x - \dfrac{d}{2} + \dfrac{d^2}{6(2x-d)}, \\ \sigma_b = \dfrac{M \cdot x}{b \cdot d \cdot y \cdot \left(x - \dfrac{d}{2}\right) + n\left[f_e(h-a-x)^2 + f'_e(x-a')^2\right]}, \\ \sigma_e = n \cdot \sigma_b \dfrac{h-a-x}{x}, \\ \sigma'_e = n \cdot \sigma_b \dfrac{x-a'}{x}. \end{cases}$$

b) Die Druckzone sei an der Unterseite.

(An der betreffenden Stelle herrscht also ein negatives Biegungsmoment.) Dann liegt die Nullinie innerhalb des Steges und der Plattenbalken wirkt in statischer Hinsicht als doppeltarmierter Balken mit der Breite b_1.

B. Untersuchung der Beton-Zugspannungen.

Die betreffenden Formeln sind für die beiden wichtigsten Anordnungen zu den Fig. 185 und 186 hinzugeschrieben.

IV. Zentrisch belastete Stütze (Druck und Knickung).

Die Spannungen σ_b und σ_e infolge der zentrisch wirkenden Druckkraft P werden wie im Belastungsfalle II nachgewiesen (Formeln 2).

Falls die Höhe der Stütze größer als das 18fache der kleinsten Querschnittsabmessung beträgt, muß aber außer den Spannungen auch die Knicksicherheit untersucht werden. Hierbei ist zu unterscheiden:

a) Untersuchung der Stütze als Ganzes. Nach den Preußischen Bestimmungen ist hierbei (in Ermangelung eines Besseren) die Eulersche Formel zugrunde zu legen (§ 105, Fig. 187):

$$\text{zul. Last } P = \frac{1}{s} \frac{\pi^2 E \cdot J}{H^2}.$$

Digitized by Google

Hierin bedeutet:

s = verlangter Sicherheitsgrad gegen Ausknicken = 10,
E = Elastizitätsmodul des Betons = 140 000 kg/qcm,
J = Trägheitsmoment der Stütze (wobei die Eisen im 15fachen Betrage genommen)
H = Knickhöhe der Stütze.

Setzt man diese Werte von s und E ein, und nimmt $\pi^2 = 3{,}14^2 = \sim 10$, so ergibt sich

$$P = \frac{1}{10} \frac{10 \cdot 140\,000 \cdot J}{H^2} = 140\,000 \frac{J}{H^2}. \quad \begin{pmatrix} P \text{ in kg,} \\ J \text{ „ cm}^4, \\ H \text{ „ cm.} \end{pmatrix}$$

Führt man jetzt H in Metern ein und dividiert die rechte Seite der Gleichung durch 1000, um P in Tonnen zu erhalten, so entsteht:

$$P = 140\,000 \frac{J}{(100\,H)^2} \cdot \frac{1}{1000},$$

$$(5) \qquad \textbf{zul. Last } P = 0{,}014 \frac{J}{H^2}. \quad \begin{pmatrix} P \text{ in t,} \\ J \text{ „ cm}^4, \\ H \text{ „ m.} \end{pmatrix}$$

b) *Untersuchung der einzelnen Eiseneinlagen.* Jede Eiseneinlage muß von Bügel zu Bügel knicksicher sein. Hieraus ergab sich als höchste zulässige Bügelentfernung (§ 105):

$$(6) \qquad l = \frac{515\,d}{\sqrt{\sigma_e}}.$$

Auf Grund von Versuchen besteht aber in der Praxis die Übung, die Bügel recht nahe aneinander zu legen (30 cm).

V. Exzentrisch belastete Stütze (Druck, Biegung, Knickung).

Wenn die Last um eine Strecke p seitlich von der Schwerachse der Stütze steht, kommt infolge des Biegungsmomentes $P \cdot p$ noch eine Zusatz-Biegungsspannung in die Stütze hinein. Hierdurch werden sich die Spannungen nicht mehr gleichmäßig, sondern trapezförmig oder dreieckförmig über den Querschnitt verteilen (Fig. 188). Für die weitere Berechnung müssen nun die beiden Fälle unterschieden werden:

a) Die Spannungen verteilen sich zwar ungleichmäßig, aber es bleibt trotzdem im ganzen Querschnitt *Druck*spannung (Fig. 188a). Dann wirkt die ganze Querschnittsfläche als tragende Konstruktion.

b) Die Druckspannungen fallen (infolge der großen Exzentrizität der Laststellung) so stark ab, daß sie schon innerhalb

Digitized by Google

des Querschnittes den Wert Null erreichen. Dann wirkt der Beton nur in einem Teile des Querschnittes (nämlich innerhalb der Druckzone) als tragende Konstruktion.

Die Untersuchung einer solchen exzentrischen Stütze muß also in folgender Weise erfolgen:

Zunächst muß untersucht werden, welcher der beiden Fälle der Spannungsverteilung vorliegt. Sobald dies entschieden ist, werden dann die für den betreffenden Fall geltenden Formeln angewendet:

1. Die zu erwartende Spannungsverteilung. Hierüber haben wir für den wichtigsten Fall: rechteckige Stütze mit gleicher Armierung f_e auf jeder Seite, folgendes Kennzeichen abgeleitet. Wir berechnen den Hilfswert

$$k = \frac{\left[\frac{b h^3}{12} + 2 n f_e \left(\frac{h}{2} - a\right)^2\right] : \frac{h}{2}}{(F + 2 n f_e)} \tag{7}$$

Ist dann die Exzentrizität p der Last *kleiner* als dieser Hilfswert k, so liegt der Fall a vor. (Die Spannungen sind über den ganzen Querschnitt *Druck*; es trägt also die ganze Querschnittsfläche.) Ist aber p *größer* als k, so liegt der Fall b vor. (Dann bekommt nur ein Teil des Querschnittes Druck, und es wirkt also auch nur der innerhalb dieses Teiles vorhandene Beton.)

2. Die eigentliche Spannungsberechnung. Für Fall a ergeben sich direkt die Spannungen:

$$\text{(8)} \quad \begin{cases} \sigma_1 = -\left[\dfrac{P}{F + n \cdot 2 f_e} + \dfrac{P \cdot p \cdot \frac{h}{2}}{\frac{b h^3}{12} + 2 n f_e \left(\frac{h}{2} - a\right)^2}\right], \\[2ex] \sigma_2 = -\left[\dfrac{P}{F + n \cdot 2 f_e} - \dfrac{P \cdot p \cdot \frac{h}{2}}{\frac{b h^3}{12} + 2 n f_e \left(\frac{h}{2} - a\right)^2}\right], \end{cases}$$

σ_1 ist stets die größere der beiden Spannungen.

Für Fall b ist folgender Rechnungsgang: Zunächst finden wir die Lage des Nullpunktes N aus der Gleichung (VIa von § 105):

$$x^3 - x^2 \cdot 3 e + \frac{6 n f_e}{b}(h - 2e) = \frac{6 n f_e}{b}[h(h - 2a - e) + 2a^2].$$

Digitized by Google

Dann ergeben sich die Spannungen:

$$(9)\quad \begin{cases} \sigma_b = \dfrac{P}{\dfrac{b\,x}{2} + n\,f_e\,\dfrac{2x-h}{x}} & \text{(Betonspannung)},\\[2ex] \sigma_{e,z} = \sigma_b\,\dfrac{n\,(h-a-x)}{x} & \text{(Eisenzugspannung)},\\[2ex] \sigma_{e,d} = \sigma_b\,\dfrac{n\,(x-a)}{x} & \text{(Eisendruckspannung)}. \end{cases}$$

In Betracht kommen nur die Spannungen σ_b und $\sigma_{e,z}$. Die Spannung des Eisens in der Druckzone — $\sigma_{e,d}$ — bleibt stets unter dem zulässigen Werte.

Außer der Spannungsermittlung muß, sofern die Höhe das 18fache der kleinsten Querschnittsabmessung überschreitet, auch eine Untersuchung hinsichtlich Knicken durchgeführt werden. Diese geschieht genau so wie bei zentrischer Belastung; auf die Exzentrizität p wird beim Knicken keine Rücksicht genommen.

Zusatz. Der Wert „k“ (Formel 7) ist nichts anderes als der Kernradius des Eisenbetonquerschnittes. Denn unter Kernradius irgendeines Querschnittes verstehen wir allgemein den Quotienten $W:F$ (s. § 90_{II}). Nur muß im vorliegenden Falle — Eisenbetonquerschnitt — bei Einsetzung von W und F natürlich berücksichtigt werden, daß die Eisenfläche f_e im Verhältnis zu der Betonfläche im n-fachen Betrage zu zählen ist. Dann kann man direkt hinschreiben:

$$(10)\qquad \text{Trägheitsmoment } J = \frac{b\,h^3}{12} + 2\,n\cdot f_e(h-a)^2$$

[Die Trägheitsmomente der Eisen in bezug auf ihre eigenen Schwerachsen sind hierbei vernachlässigt];

$$(11)\qquad \text{Widerstandsm. } W = \frac{J}{h/_2} = \left[\frac{b\,h^3}{12} + 2\,n\,f_e\,(h-a)^2\right] : \frac{h}{2}\,,$$

und schließlich:

$$(12)\qquad \text{Kernradius } k = \frac{W}{F} = \frac{\left[\dfrac{b\,h^3}{12} + 2\,n\,f_e\,(h-a)^2\right] : \dfrac{h}{2}}{(F_b + 2\,n\,f_e)}\,.$$

Auch die Spannungen σ_1 und σ_2 ergeben sich in diesem Gedankengange direkt aus den in § 90_{II} abgeleiteten Formeln, indem man die Biegungsmomente der Last P in bezug auf die Kernpunkte einführt: $M_1 = P(k+p)$, bzw. $M_2 = P(k-p)$. [Man zeichne die Kernpunkte ein!] Dann kann man hinschreiben:

$$(8\text{a})\qquad \sigma_1 = \frac{P(k+p)}{W}\,, \qquad \sigma_2 = \frac{P(k-p)}{W}\,.$$

Digitized by Google

62

Verlag von HERMANN MEUSSER in Berlin W 35

Statik und Festigkeitslehre

Vollständiger Lehrgang zum Selbststudium
für Ingenieure, Techniker und Studierende

von

Max Fischer.

Band II

Berechnung von statisch bestimmten Fachwerkkonstruktionen.

Inhalt: a) Allgemeine Untersuchungen und Methoden zur Bestimmung von Stabkräften.

Kräfteplan, Rittersche Schnittmethode, Culmannsche Methode. Einteilung in statisch bestimmte, labile und statisch unbestimmte Konstruktionen. Ersatzstabmethode, Systeme von absoluter und begrenzter Beweglichkeit. Besondere Belastungen und Konstruktionen.

b) Besondere Methoden beim Fachwerkträger mit beweglicher Belastung.

Einflußlinien. Rein analytische und rein graphische Methoden.

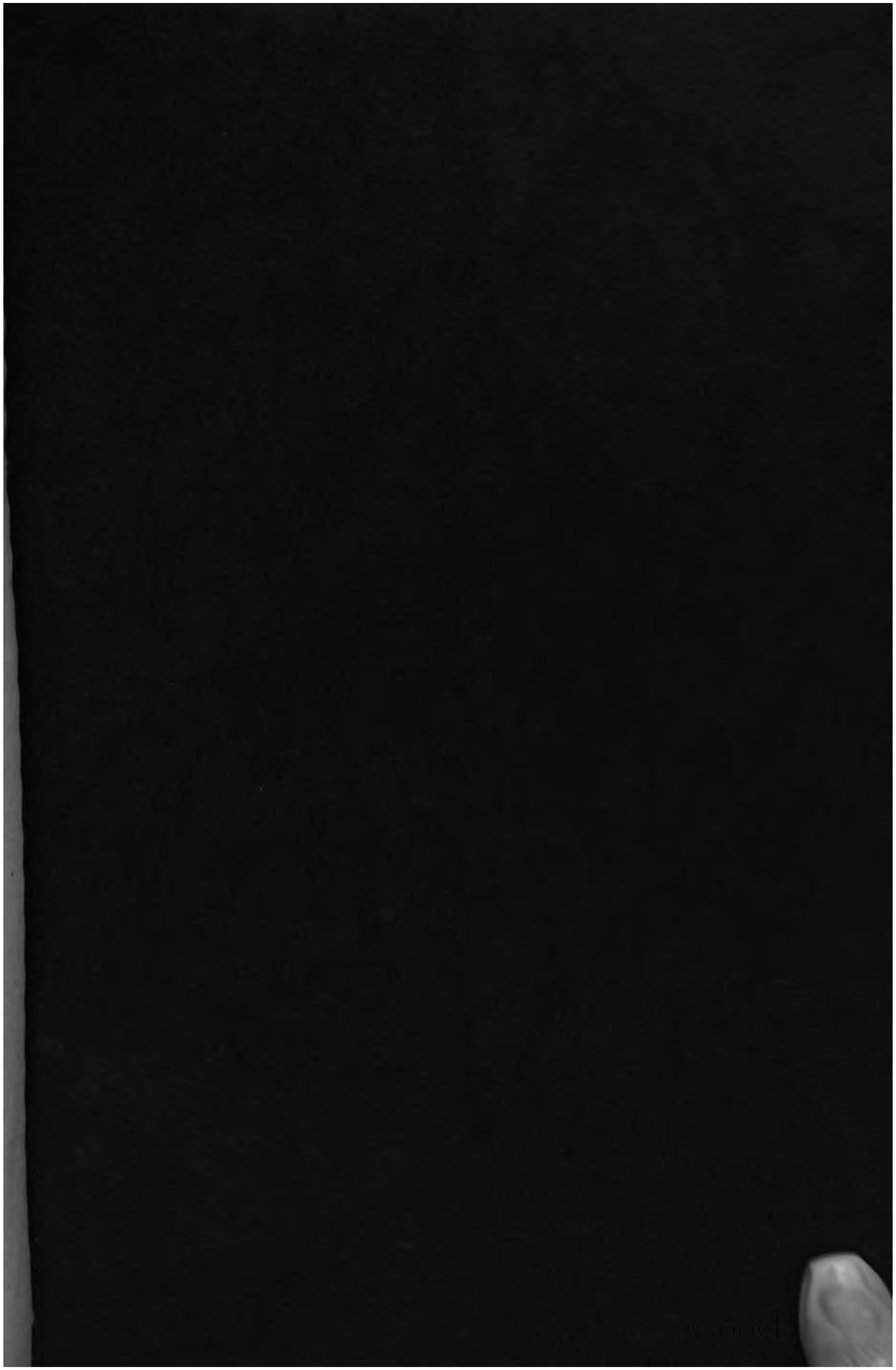
c) Der Gerbersche Fachwerkträger. — d) Der Dreigelenkbogen. — e) Kinematische Methoden.

Die „**Zeitschrift des Vereins Deutscher Ingenieure**" urteilt zu Band II: . . . Wie bereits bei Besprechung des I. Bandes hervorgehoben, liegt der Wert dieses Werkes hauptsächlich in der durchweg elementaren, anschaulichen, leichtfaßlichen Darstellungsweise, bei der mit Rücksicht auf den Zweck des Buches als Mittel zum Selbststudium besonderes Gewicht darauf gelegt ist, daß der Leser den Gedankengang der einzelnen Entwicklungen leicht verstehen lernt und so befähigt wird, das Gebotene in sich aufzunehmen und selbständig alle ähnlichen Aufgaben zu lösen.

Die „**Deutsche Techniker-Zeitung**" schreibt zu Band II: Der Aufbau des Buches ist sehr sorgfältig hergestellt. Erfreulich ist es, zu sehen, wie folgerichtig der Verfasser vom Einzelnen aufs Ganze kommt, wie er am rechten Platze Wiederholungen des früher Gesagten bringt und durch Zahlenbeispiele das Interesse am Gegenstand zu befestigen weiß.

APR 9 1920

Digitized by Google







Engin. Library
TA
350
.F53
1919
.350391

Fischer
Statik und
festigkeitslehr
v I pt I

Digitized by Google


Digitized by Google